



— University of Mosul —
College of Petroleum & Mining Engineering



The Dot Product

Lecture No.2

Asst.Lect. Zaid Salahaldeen Thanoon

Petroleum and Refining Engineering Department

Email: zeadsalahaldeen@uomosul.edu.iq



— University of Mosul —

College of Petroleum & Mining Engineering



LECTURE CONTENTS:

- Introduction to dot product.
- Properties of dot product.
- Directional Angles.
- Examples.

if the vectors $\vec{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$

Rule. 1: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$ ($\vec{u}$ dot $\vec{v}$)

Rule. 2: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overset{\text{magnitude}}{|u|} |v| \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|u| |v|}$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|u| |v|} \right).$$

θ : the angle between two non zero vectors.

Rule. 3: The vectors (u) and (v) are orthogonal if:

(من حالة التعامد فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ، $0 \leq \theta \leq 90^\circ$)
 فعند ضرب متجهين والزاوية بينهما (90°) فإن الناتج هو (صفر).

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

ملاحظة: عند إيجاد الزاوية (θ) بين كل وجود (two vectors) وبدونهم لا يمكن إيجاد الزاوية ، ولذا وجود أي متجه هو وجود نقطتين (two points).

properties of the Dot product:

if $\vec{u}, \vec{v}$ and $\vec{w}$ are any vectors and c is a scalar, then:

$$1 - \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \quad 2 - (c \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (c \cdot \vec{v}) = c(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$3 - \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \quad 4 - \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| |\vec{u}| \cos(0) = |\vec{u}|^2$$

$$5 - 0 \cdot \vec{u} = 0 \cdot 0$$

لأنهم بنفس الاتجاه

Ex: if $\vec{a} = (2, 4, -3)$ & $\vec{b} = (5, 0, 4)$ find $\vec{a} \cdot \vec{b}$

solution:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 5 + 4 \times 0 + (-3) \times 4 = -2$$

Ex: if $\vec{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\vec{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, find θ .

solution:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \quad \vec{a} = (2, 0, 3), \quad \vec{b} = (-1, 2, 4)$$

$$\cos \theta = \frac{(2 \times -1 + 0 \times 2 + 3 \times 4)}{(\sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (3)^2})(\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (4)^2})} = \frac{-2 + 0 + 12}{\sqrt{13} \times \sqrt{21}}$$

$$\cos \theta = \frac{10}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{21}} \rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{10}{\sqrt{13 \times 21}} \right) \rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{10}{\sqrt{273}} \right)$$

$$\therefore \theta = 52.7^\circ$$

Ex: if ^{magnitude} $|a| = 5$, $|b| = 8$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$, find $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

Solution:

كل هذا السؤال يجب أولاً إيجاد (vectors) $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وهذا صعب إيجادهم من المعطيات الموجودة، ولكن من السهل إيجاد قيمته:

$$\begin{aligned} |2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 &= 4\vec{a} \cdot \vec{a} - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= 4(|a||a|\cos(0)) - 12|a||b|\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 9|b||b|\cos(0) \\ &= 4|a|^2 - 12|a||b|\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 9|b|^2 \end{aligned}$$

$$= 4|a|^2 - 12|a||b|\cos\frac{2\pi}{3} + 9|b|^2$$

في هذه المعادلات أصبحت جميع المجهولات موجودة

$$= 4 \times (5)^2 - 12 \times 5 \times 8 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + 9 \times (8)^2$$

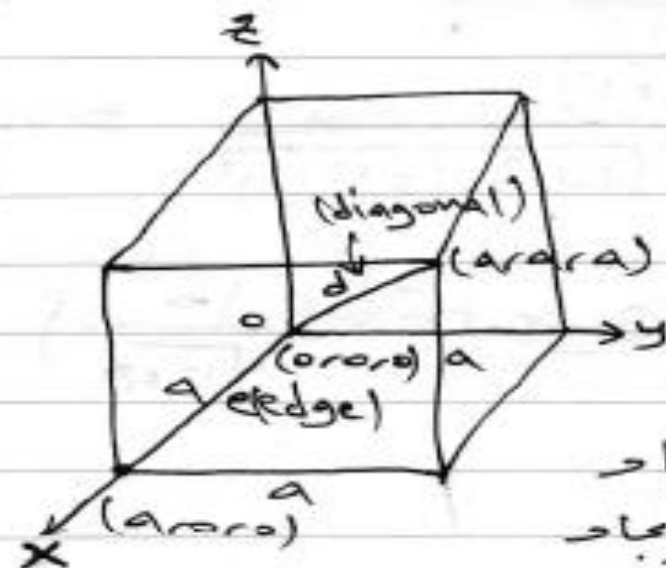
وبعد إيجاد الناتج نأخذ الجذر التربيعي.

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = 916$$

$$\Rightarrow |2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{916} \approx 30.26$$

Ex: find the angle between diagonal of cube and one of its edges.

Solution:



لكل هذا السؤال يجب أولاً إيجاد
الـ (vectors) وبعدئذ يتم إيجاد
الزاوية بين (diagonal) وأحد
حواف المكعب.

النقاط موجودة فقط يتم تحويلها إلى (vectors).

$$\text{vectors } \vec{d} = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\} = \{a, 0, a\} \\ = \{a, a, a\}$$

$$\text{vectors } \vec{e} = \{a, 0, 0\} = \{a, 0, 0\}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{d} \cdot \vec{e}}{|\vec{d}| |\vec{e}|} = \frac{\{a, a, a\} \cdot \{a, 0, 0\}}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \cdot \sqrt{a^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{3}a^2 \cdot \sqrt{a^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{a^2}{\sqrt{3}a \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow \theta = 54.7^\circ$$

Directional angles and directional cosines:

كل (vectors) زاوية مع x -axis وهى (α) ومع y -axis وهى (β) ومع z -axis وهى (γ) وهى تسمى (directional angles) ولا يجب (directional cosines) $(\cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma)$ تسمى

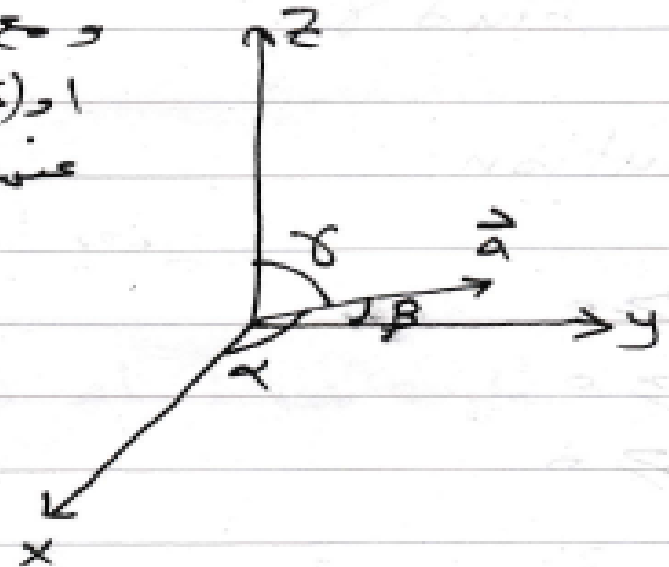
$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

$$\cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



Ex: if the vector $\vec{v}$ in a first octant and $\alpha = \frac{\pi}{4}$ - $\beta = \frac{\pi}{3}$, find γ .

Solution:

مِنَ هَإِذَا الْوَالِ ذَكَرَ (first octant) هَإِذَا يَعْنِي

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$z \geq 0$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2 + \cos^2 \gamma = 1 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 \gamma = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \rightarrow \cos^2 \gamma = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \gamma = +\frac{1}{2} \text{ or } -\frac{1}{2}$$

بِمَا أَنَّهُ ذَكَرَ first octant.

مِنَ يَعْنِي الْإِمَارَاتِ يَتَكَبَّرُ (acute angle) الزَّاوِيَةُ حَادَّةٌ

وَهَإِذَا يَعْنِي فِي الدِّبْعِ الْإِلَهِ أَيْضًا، وَإِذَا ذَكَرَ (the obtuse)

فَهَإِذَا يَعْنِي مُتَفَرِّجَةً (أي الدِّبْعِ الثَّانِي).

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}$$

Ex: let $\vec{C}$ be a vector with magnitude (3) that makes an angle $\frac{\pi}{3}$ with x-axis, an angle $\frac{\pi}{4}$ with y-axis, and an obtuse angle with z-axis, find $\vec{C}$.

solution:

كل هذا السؤال يجب أولاً إيجاد الزاوية الثالثة (8):

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \cos^2 \gamma = 1 \rightarrow \cos \gamma = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

بما أنه فُكر (obtuse) فهذا يعني بالدفع الثاني:

$$\cos \gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \gamma = \frac{2\pi}{3}$$

وال المطلوب هو إيجاد ال vector

$$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\cos \alpha = \frac{c_1}{|c|} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{c_1}{3} \rightarrow c_1 = \frac{3}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{c_2}{|c|} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{c_2}{3} \rightarrow c_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{c_3}{|c|} \rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{c_3}{3} \rightarrow c_3 = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{the vector } \vec{c} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{2} \right)$$