— University of Mosul —
College of Petroleum & Mining Engineering

The Planes

Lecture No.5

Asst.Lect. Zaid Salahaldeen Thanoon

Petroleum and Refining Engineering Department

Email: zeadsalahaldeen@uomosul.edu.iq

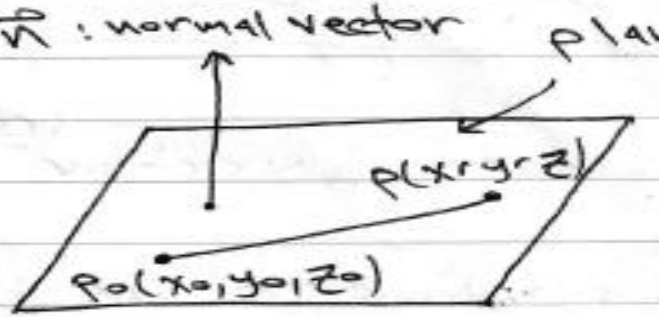
LECTURE CONTENTS:

- Introduction to Planes.
- Equation for plane in space.
- Distance from a point to plane.
- Examples.

- planes: هو عباره عن سطح مستوي سواء كان افقي او عمودي او مائل

- equation for plane in space:

a plane in space can be defined by a point on the plane نقطة على المستوي and its orientation الاتجاه.



عندما تكون النقطة $P_0(x_0,y_0,z_0)$ معلومة و تقع على المستوي، والنقطة $p(x,y,z)$ هي نقطة أخرى غير معلومة وتقع على المستوي أيضاً، ومن أجل تعريف المستوي يجب ان يكون هناك متجه عمودي على المستوي ويسمى الـ (normal vector) $(\vec{n})$

$$\vec{n} = a\,i + b\,j + c\,k \quad \text{(normal vector)}$$

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \qquad (\theta = 90^\circ)$$

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{P_0P}|\,|\vec{n}| \cdot \cos\theta$$

$$= |\overrightarrow{P_0P}|\,|\vec{n}| \cdot \cos(90)$$

$$= 0.0$$

$\therefore \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = \text{zero}$

$\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k$

$\vec{n} = ai + bj + ck$

$\therefore [(x-x_0)i + (y-y_0)j + (z-z_0)k] \cdot [ai + bj + ck] = 0.0$

$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0.0$

$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0.0$

$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$

$\therefore \boxed{ax + by + cz = d}$ d: is ascalar value.

- $\vec{n}$: normal vector (متجه) $\perp$ to plane, $\vec{n} = ai + bj + ck$

P_o : point on plane (known point) $P_o(x_o, y_o, z_o)$

P : unknown point on plane $P(x, y, z)$

$\overrightarrow{P_oP} \cdot \vec{n} = 0.0$

$$ax + by + cz = d$$ ← equation of plane

$ax_o + by_o + cz_o = d$, d : scalar value

$\vec{n}$ (normal vector) تمثل بـ (x, y, z) معاملات : ملاحظة

Ex: find equation of plane passes through $P(3,-1,5)$ and normal vector is $5i+3j+9K$

solution:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.0$$

$$5(x-3)+3(y+1)+9(z-5)=0.0$$

$$5x-15+3y+3+9z-45=0.0$$

$$\boxed{5x+3y+9z=57}$$ — eq. of plane.

Ex: find the equation of plane that passes through $P_0(1,-1,3)$ and this plane is parallel (//) to plane $3x+y+z=7$.

solution:

لايجاد معادلة الـ (plane) نحتاج الى نقطة تقع على المستوي (P_0) والمتجه العمودي على المستوي (normal vector) وبما ان المستوي الاول موازي للمستوي الثاني فمنها يعني ان (normal vector) للمستوي الثاني هو نفسه للمستوي الاول.

$\because \vec{M_1} \parallel \vec{M_2}$

$\Rightarrow \vec{n_1} = \vec{n_2}$

from equation $(M_2) = 3x+y+z=7$

$\vec{n_2} = 3i+j+k$ (normal vector)

$\Rightarrow \vec{n_1} = 3i+j+k$

eq. of plane $ax+by+cz=d$

find (d) from $p_0(1,-1,3)$

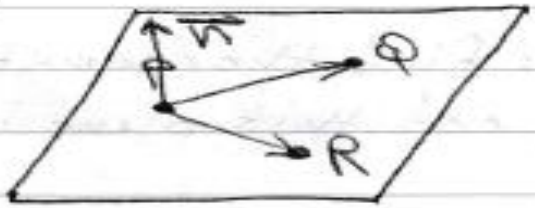
$3*1 + 1*(-1) + 1*(3) = d \rightarrow \boxed{\therefore d = 5}$

$\therefore$ equation of plane is $\boxed{3x + y + z = 5}$

Ex: find the equation of plane contains three points $P(1,1,-1)$, $Q(2,0,2)$, $R(0,-2,1)$.

Solution:

لحل السؤال يجب ان يتوفر لدينا نقطة تقع على المستوي و (normal vector) عمودي على مستوي، ومن هذا السؤال اعطت ثلاث نقاط تقع على المستوي و (normal vector) غير معلوم، عليه يجب ايجاد (normal vector) وبعدها نستطيع ايجاد معادلة المستوي.



$\vec{n} \perp$ plane

$\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR}$

$\vec{PQ} = (2-1)i + (0-1)j + (2-(-1))k$

$\therefore \vec{PQ} = i - j + 3k$

$\vec{PR} = (0-1)i + (-2-1)j + (1-(-1))k$

$\therefore \vec{PR} = -i - 3j + 2k$

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} k$$

$$= (-1*2 - 3*-3)i - (1*2 - 3*-1)j + (1*-3 - (-1)*(-1))k$$

$$\Rightarrow \vec{n} = 7i - 5j - 4k$$

equation of plane $ax + by + cz = d$

$7x - 5y - 4z = d$

find (d) from any point

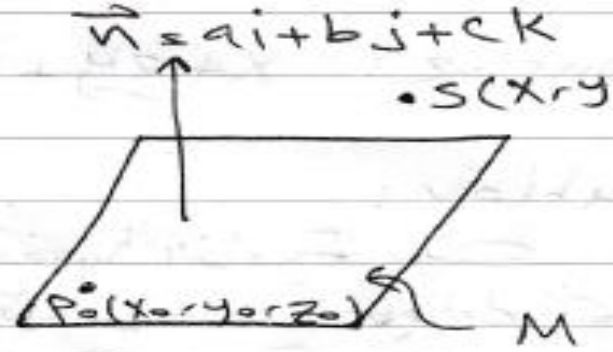
let select Q(2, 0, 2)

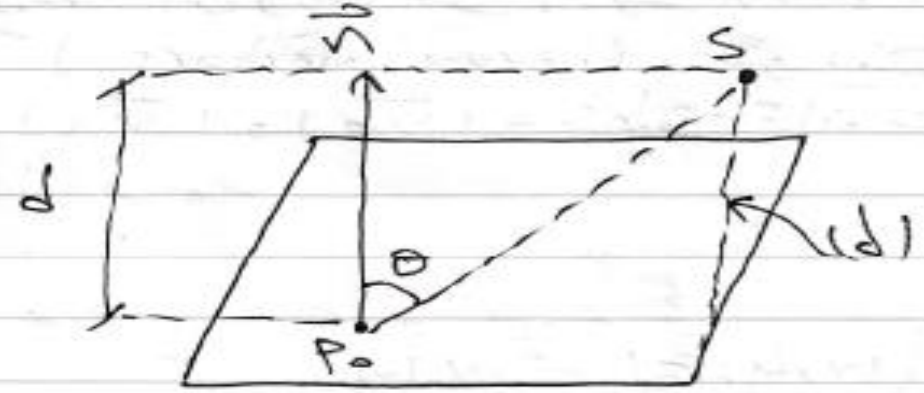
$7*2 - 5*0 - 4*2 = d \rightarrow \boxed{\Rightarrow d = 6}$

$\Rightarrow$ eq. of plane is $\boxed{7x - 5y - 4z = 6}$

The distance from a point to plane:

let us consider a plane (M) and a point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ lies on this plane, let $S(x, y, z)$ any point in space, then the distance between (S) and the plane (M) can be determined as:





$\vec{n}$ ⊥ to (M)

$\vec{n}$ ← normal vector

(M) ← plane

the dot product between $(\vec{n})$ and $(\vec{PS})$:

$$\vec{n} \cdot \vec{PS} = |\vec{n}||\vec{PS}| \cdot \cos\theta \quad \text{---} (1)$$

$$\text{but} \quad \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{d}{|\vec{PS}|} \rightarrow d = |\vec{PS}| \cdot \cos\theta \text{ ...subin}\theta$$

$$\therefore \vec{n} \cdot \vec{PS} = |\vec{n}| \cdot d$$

$$\therefore d = \frac{\vec{n} \cdot \vec{PS}}{|\vec{n}|}$$

Ex: find the distance from the point $S(1,1,3)$ to the plane $3x+2y+6z=6$.

solution:

لحل السؤال نحتاج الى وجود نقطة تقع على المستوى، و متجه ($\vec{n}$) (normal vector) عمودي على المستوى.

الـ (normal vector) من السهل ايجادة من معادلة المستوى حيث يمثل معاملات (x, y, z).

$\therefore \vec{n} = 3i + 2j + 6k$

$$d = \frac{\vec{n} \cdot \vec{PS}}{|\vec{n}|}$$

لإيجاد المسافة $(\vec{PS})$ نحتاج نقطة تقع على المستوى.

ولإيجاد نقطة على المستوى نفرض قيمة لـ (x، y) ونعوضها (z) او نفرض لـ (z، x) ونجد (y) وهكذا ونعوضها في معادلة المستوى لإيجاد النقطة المجهولة.

assume $x = 0, z = 0, y = ?$

$3 * 0 + 2y + 6 * 0 = 6 \rightarrow \boxed{y = 3}$

$\therefore P_0(0, 3, 0)$ lies on the plane

$S(1, -1, 3) \, , \, P_0(0, 3, 0)$

$\therefore \vec{PS} = (1-0)i + (-1-3)j + (3-0)k$

$\vec{PS} = i - 2j + 3k$

$\vec{n} \cdot \vec{PS} = (3 * 1) + (2 * -2) + (6 * 3) = 17$

$|\vec{n}| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$

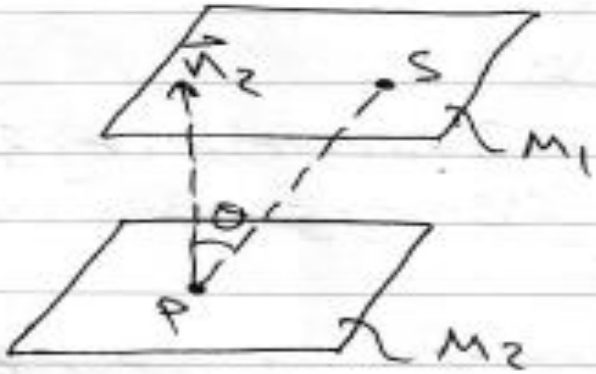
$\therefore d = \frac{\vec{n} \cdot \vec{PS}}{|\vec{n}|} = \frac{17}{7}$ unit

Ex: find the distance between the plane $(M_1): x+2y+6z=1$ to the plane $(M_2): x+2y+6z=10$.

solution:

لحل السؤال نحتاج الى ايجاد نقطة على المستوي الاول ونقطة على المستوي الثاني بالاضافة الى ايجاد الـ (normal vector) والذي يكون عمودي على المستوي.

$$d = \frac{\vec{n_2} \cdot \vec{PS}}{|\vec{n_2}|}$$



assume $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_1 = ?$

نعوض القيم في معادلة المستوي (M_1)

$$x + 2*0 + 6*0 = 1 \rightarrow \boxed{x_1 = 1}$$

$\rightarrow S(1,0,0)$

assume $y_2 = 0 , z_2 = 0 , x_2 = ?$

نعوض القيم في معادلة المستوى (M_2)

$$x + 2*0 + 6*0 = 10 \rightarrow \boxed{x_2 = 10}$$

$\therefore P(10,0,0)$

$$\therefore \overrightarrow{PS} = (10-1)i + (0-0)j + (0-0)K$$

$$\overrightarrow{PS} = 9i$$

$$\overrightarrow{n_2} = i + 2j + 6K \quad (M_2) \text{ معاملات } (x,y,z)$$

$$\therefore d = \frac{\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{PS}}{|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{9*1 + 0*0 + 0*0}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (6)^2}} = \frac{9}{\sqrt{41}} \text{ unit}$$