University of Mosul
College of Petroleum & Mining Engineering

The Lines
Lecture No.4

Asst.Lect. Zaid Salahaldeen Thanoon

Petroleum and Refining Engineering Department

Email: zeadsalahaldeen@uomosul.edu.iq

LECTURE CONTENTS:

- Introduction to Lines.
- In Plane 2D axes.
- In Space 3D axes.
- Ways for express the equation of lines.
- Examples.

- In plane (2D) (x, y) axes : a line can be defined by point and a number giving the slope of the line.

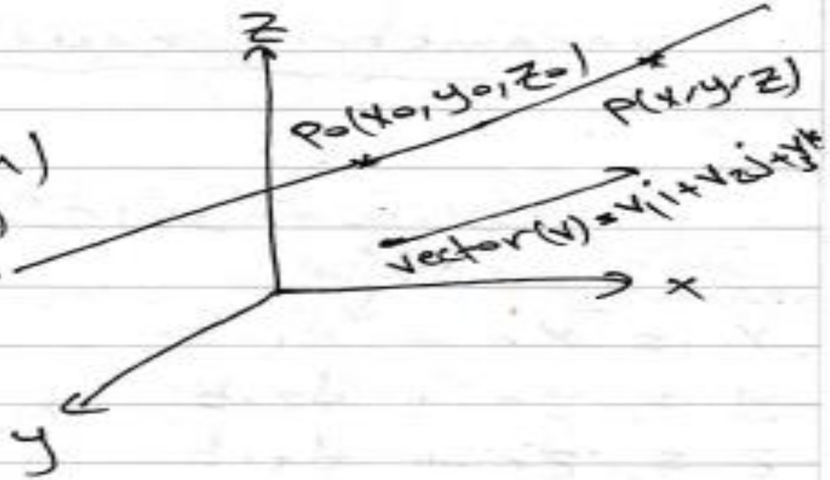
$$\left.\begin{array}{l} m = \text{slope} = \dfrac{dy}{dx} \\ p(x_0, y_0) \end{array}\right] \rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \text{(equation of line)}$$

- In space (3D) (x, y, z) axes : a line can be defined by point and a vector giving the direction of the line.

- let $(L) \parallel \vec{v}$
- $P_0(x_0, y_0, z_0)$ lies on (L) (given)
- $P(x, y, z)$ lies also on (L) (unknown)

if we create a vector $\overrightarrow{P_0P} \parallel v$: lines (L)

so, $\overrightarrow{P_0P} = t \cdot v$



where (t) is scalar parameter

* (t) : هو عدد يمثل نسبة طول $\overrightarrow{P_0P}$ بالمقارنة مع طول ($\vec{v}$)
فإذا كانت (t) = 0 فهنا يعني ان P_0P هو نفسه ($\vec{v}$) ،
بالاضافة الى ان (t) تحدد موقع النقطة P(x, y, z) على
طول الخط (L) .

م: المتجه يمكن تحريكه في الفضاء (3D) او في المستوي (2D) بمعنى ان
يتغير ، على شرط ان يحافظ على طوله واتجاهه .

- <u>There are too ways for express the equation of lines:</u>

هنالك طريقتان للتعبير عن معادلات الخطوط

1- parametric equation of lines.

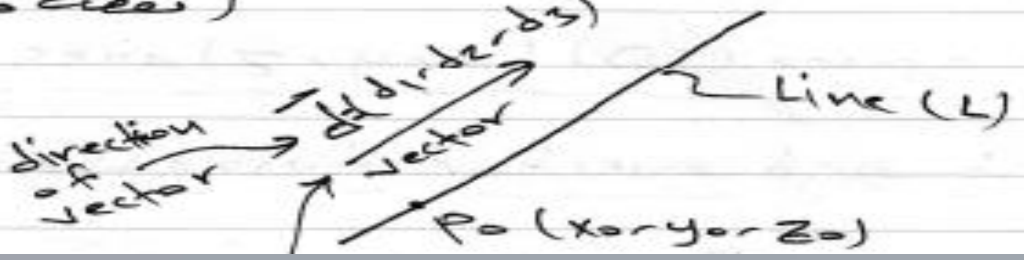
2- symmetric equation.

- بصورة عامة هنالك عدة متطلبات يجب توافرها لكي نستطيع التعبير
عن معادلات الخطوط .

1- point (نقطة تمر فيها الخط)

ميل   متجه موازي لـ (L)

2- slope <u>or</u> vector



1- **parametric equation:**

متجه موازي للخط (L)

١: parametric equation) مكونة من ثلاثة محددات (ثلاث معادلات):

احداثيات النقطة (P_0) احداثيات المتجه

$$x = x_0 + d_1 \cdot t$$
$$y = y_0 + d_2 \cdot t$$
$$z = z_0 + d_3 \cdot t$$

equation of line as parametric equation.

٢: معامل الـ(t) هو (direction vector)

٣: قيمة (t) متساوية في الثلاث معادلات.

2- **symmetric equation:**

من الطريقة الاولى بما انه قيمة (t) متساوية في الثلاث معادلات فهذا يعني:

$$x = x_0 + d_1 \cdot t \rightarrow t = \frac{x - x_0}{d_1}$$

$$y = y_0 + d_2 \cdot t \rightarrow t = \frac{y - y_0}{d_2}$$

$$z = z_0 + d_3 \cdot t \rightarrow t = \frac{z - z_0}{d_3}$$

$$\therefore \frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2} = \frac{z - z_0}{d_3}$$

وهذه طريقة ثانية للتعبير عن معادلة الخط.

Ex: find parametric equation of line passes through the point $p(2,-1,3)$ and parallel to $\vec{d} = 2i - 3j + 4k$.

solution:

point $(\overset{x_0}{2}, \overset{y_0}{-1}, \overset{z_0}{3})$, vector $\vec{d} = 2i - 3j + 4k$

$$x = x_0 + d_1 \cdot t$$
$$y = y_0 + d_2 \cdot t$$
$$z = z_0 + d_3 \cdot t$$

$$> x = 2 + (2) \cdot t \longrightarrow x = 2 + 2t$$

$$y = (-1) + (-3) \cdot t \longrightarrow y = -1 - 3t$$

$$z = (3) + (4) \cdot t \longrightarrow z = 3 + 4t$$

Ex: write symmetric equation of line, $P(2,-1,3)$, $\vec{d}=(2,-3,4)$.

solution:

$$\frac{x-x_0}{d_1} = \frac{y-y_0}{d_2} = \frac{z-z_0}{d_3} \quad \text{(symmetric equation)}$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-(-1)}{(-3)} = \frac{z-3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-3}{4}$$

Ex: find parametric equation of line passes through

موازي

$p(4,3,-1)$ and parallel to $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-4} = 3z$

solution:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + d_1 . t \\ y &= y_0 + d_2 . t \\ z &= z_0 + d_3 . t \end{aligned}\right\} \text{parametric equation}$$

م: في هذا السؤال أعطى نقطة يمر فيها المستقيم واعطى معادلة
فقط مستقيم موازي للمستقيم الاول ، وهذا يعني ان المستقيمان لهم
نفس الاتجاه ، ولحل السؤال يجب ان نجد المتجه (vector) اولاً وهو
نفسه للمستقيم الاصلي .

$\Rightarrow \vec{d_1} = \vec{d_2}$

direction

لايجاد المتجه ($\vec{d}$) :

$$\frac{x - x_0}{\underline{d_1}} = \frac{y - y_0}{\underline{d_2}} = \frac{z - z_0}{\underline{d_3}} \qquad \vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$$

$$\boxed{d_{(1,2,3)} = \frac{\text{المقام}}{\text{المعامل}}}$$

$$d_1 = \frac{2}{1} \longrightarrow \Rightarrow d_1 = 2$$

$$d_2 = \frac{-4}{1} \longrightarrow \Rightarrow d_2 = -4$$

$$d_3 = \frac{1}{3} \longrightarrow \Rightarrow d_3 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{d} = \left(2, -4, \frac{1}{3}\right)$$

$$x = x_0 + d_1 \cdot t \longrightarrow x = 4 + 2t$$

$$y = y_0 + d_2 \cdot t \longrightarrow y = 3 + (-4) \cdot t \rightarrow y = 3 - 4t$$

$$z = z_0 + d_3 \cdot t \longrightarrow z = -1 + \frac{1}{3} t$$

Ex: find parametric equation for line through $p(1,-2,3)$
موازي
and parallel to $L: \frac{2-3x}{6} = \frac{1-y}{4} = z$.

solution: بما ان الخط الاول موازي للخط الثاني، فهذا
يعني ان لهم نفس (direction vector) $(\vec{d}_1 = \vec{d}_2)$

$x = x_0 + d_1 \cdot t$

$y = y_0 + d_2 \cdot t$

$z = z_0 + d_3 \cdot t$

عليه نجد الـ (direction vector اولاً:

$\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$

$$d_1 = \frac{\text{المقام}}{\text{المعامل}} = \frac{6}{-3} = -2 \longrightarrow \Rightarrow d_1 = -2$$

$$d_2 = \frac{\text{المقام}}{\text{المعامل}} = \frac{4}{-1} = -4 \longrightarrow \Rightarrow d_2 = -4$$

$$d_3 = \frac{\text{المقام}}{\text{المعامل}} = \frac{1}{1} = 1 \longrightarrow \Rightarrow d_3 = 1$$

$$\Rightarrow \vec{d} = (-2, -4, 1)$$

$$x = x_0 + d_1 \cdot t \longrightarrow x = 1 + (-2) \cdot t \longrightarrow \Rightarrow x = 1 - 2t$$

$$y = y_0 + d_2 \cdot t \longrightarrow y = -2 + (-4) \cdot t \longrightarrow \Rightarrow y = -2 - 4t$$

$$z = z_0 + d_3 \cdot t \longrightarrow z = 3 + t \longrightarrow z = 3 + t$$