

Trancendental Functions

الدوال المتسامية

كل دالة ليست جبرية تسمى دالة متسامية وامثلة على ذلك الدوال اللوغاريتمية ، الاسية، المثلثية والدوال المثلثية العكسية .

The Natural Logarithm

دالة اللوغاريتم الطبيعي

is the function define as :

$$Ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0$$

its domain is the set of all positive number.

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

if $f(x)=Ln(x)$ then :

$$\frac{d}{dx} Ln(x) = \frac{1}{x}$$

and in general form

$$\frac{d}{dx} Ln(u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

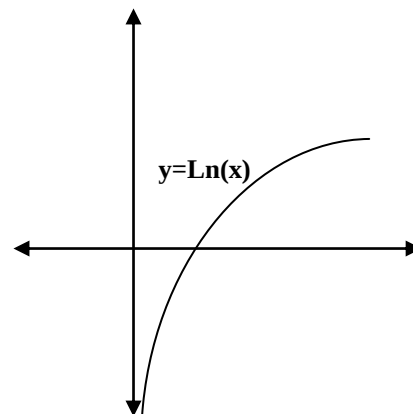
THEOREM : if **a&b** are positive number and **n** is any rational number then :

1] $Ln1 = 0$ 2] $Ln e = 1$, $e = 2.718...$

3] $Lnab = Lna + Lnb$ 4] $Lnabc...z = Lna + Lnb + ...Lnz$

5] $Ln \frac{a}{b} = Lna - Lnb$ 6] $Ln \frac{1}{a} = -Lna$ 7] $Ln x^n = n.Lnx$

8] graph of $y = Lnx$ is :



EXAM : Find $\frac{dy}{dx}$ to

1) $y = Ln(2x + 7) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2x + 7}$

2) $y = Ln(x^2 + 8) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + 8}$

3) $y = Ln(Lnx) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{Lnx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{xLn x}$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

and in general form

$$\int \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \ln|u| + C$$

EXAM : Find

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C$$

$$\int \frac{x^3 + 4x + 1}{x} dx$$

عندما تكون درجة البسط اعلى من درجة المقام نقسم اولاً ثم نكمل .

$$= \int \frac{x^3}{x} dx + \int \frac{4x}{x} dx + \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \int x^2 dx + \int 4 dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} + 4x + \ln(x) + C$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^3} dx = \int x (x^2+1)^{-3} dx = \frac{1}{2} \int 2x (x^2+1)^{-3} dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{-2}}{-2} + C$$

Logarithm Diff.

الاشتقاق اللوغاريتمي

يستخدم الاشتقاق اللوغاريتمي في حالة عدم استطاعتنا اشتقاق الدالة المعطاة بالطرق السابقة وعادة ما تستخدم هذه الطريقة في الدوال الكسرية والدوال المضروبة ببعضها وتحتوي على حدود كثيرة وتتلخص الطريقة كالآتي :

(1) اخذ لوغاريتم $\ln$ الطرفين .

(2) نبسط الدالة باستخدام خواص اللوغاريتمات .

(3) نشق الطرفين ضمناً بالنسبة لـ x .

(4) ضرب الطرفين بـ y .

(5) تعويض قيمة y بما يعادلها بالمتغير x .

EXAM : Find $\frac{dy}{dx}$ to

$$1) y = x^x$$

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x \frac{1}{x} + \ln x (1) = 1 + \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y (1 + \ln x) = x^x (1 + \ln x)$$

$$2) y = \frac{(x^2 + 3)^{1/2} (2x + 1)^5}{(x^4 + 1)^2 x^3}$$

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln \frac{(x^2 + 3)^{1/2} (2x + 1)^5}{(x^4 + 1)^2 x^3} = \ln(x^2 + 3)^{1/2} (2x + 1)^5 - \ln(x^4 + 1)^2 x^3 \\ &= \ln(x^2 + 3)^{1/2} + \ln(2x + 1)^5 - \ln(x^4 + 1)^2 - \ln x^3 \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) + 5 \ln(2x + 1) - 2 \ln(x^4 + 1) - 3 \ln x \end{aligned}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 3} + 5 \frac{2}{2x + 1} - 2 \frac{4x^3}{x^4 + 1} - \frac{3}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{x}{x^2 + 3} + \frac{10}{2x + 1} - \frac{8x^3}{x^4 + 1} - \frac{3}{x} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{(x^2 + 3)^{1/2} (2x + 1)^5}{(x^4 + 1)^2 x^3} \right) \left(\frac{x}{x^2 + 3} + \frac{10}{2x + 1} - \frac{8x^3}{x^4 + 1} - \frac{3}{x} \right)$$

$$3) y = (5x^2 + x + 1)(x^3 - 2)^3 \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\ln y = \ln(5x^2 + x + 1)(x^3 - 2)^3 \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\ln y = \ln(5x^2 + x + 1) + \ln(x^3 - 2)^3 + \ln \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\ln y = \ln(5x^2 + x + 1) + 3 \ln(x^3 - 2) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{10x + 1}{5x^2 + x + 1} + 3 \frac{3x^2}{x^3 - 2} + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{10x + 1}{5x^2 + x + 1} + \frac{9x^2}{x^3 - 2} + \frac{x}{x^2 + 1} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left((5x^2 + x + 1)(x^3 - 2)^3 \sqrt{x^2 + 1} \right) \left(\frac{10x + 1}{5x^2 + x + 1} + \frac{9x^2}{x^3 - 2} + \frac{x}{x^2 + 1} \right)$$

Logarithm with base a

اللوغاريتم الاعتيادي ذو الاساس a

$\ln x = \log_e x$ ويمكن ان يكتب بصيغة اخرى هي اللوغاريتم الطبيعي هو اللوغاريتم الذي اساسه هو e

اما اللوغاريتم الاعتيادي فهو اللوغاريتم الذي اساسه ليس e مثل اللوغاريتم العشري واللوغاريتم الذي اساسه a

وهناك علاقة مهمة تربط اللوغاريتم الاعتيادي باللوغاريتم الطبيعي وهي : $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, $a \neq 1$

مشتقة دالة اللوغاريتم الاعتيادي :

$$\frac{d}{dx} \text{Log}_a x = \frac{d}{dx} \frac{\text{Ln} x}{\text{Ln} a} = \frac{1}{x \text{Ln} a}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \text{Log}_a x = \frac{1}{x \text{Ln} a}$$

and in general form :

$$\frac{d}{dx} \text{Log}_a u = \frac{du}{u \text{Ln} a}$$

EXAM : Find $\frac{dy}{dx}$ to $y = \text{Log}_2(3x + 1)$

$$1) y = \frac{\text{Ln}(3x + 1)}{\text{Ln} 2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{(3x + 1)\text{Ln} 2}$$

$$2) \frac{dy}{dx} = \frac{3}{(3x + 1)\text{Ln} 2}$$

EXAM : Find $\frac{dy}{dx}$ to $y = \text{Ln} \text{Ln} x + \text{Log}_3(x^2 + 5)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \text{Ln} x} + \frac{2x}{(x^2 + 5)\text{Ln} 3}$$

HOMEWORK

1) Find $\frac{dy}{dx}$ to $y =$

$$\text{Ln}(2x^3) , \text{Ln}\left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2}}\right) , \text{Ln}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) , x^2 \text{Ln} \sqrt{3x+5} , \frac{\text{Ln}(x+1)}{\text{Ln}(x-1)}$$

$$\frac{2x^2 + 1}{\text{Ln}(2x^2 + 1)} , x (\text{Log}_2(x^2 - 2x))^3 , \frac{\text{Log}_3 x}{1 + \text{Log}_3 x}$$

2) Find $\frac{dy}{dx}$ to $y = \text{Sin} x . \text{Ln} x . (x^3 + 1)^5 . \sqrt{x^2 + 1} . \frac{1}{x}$

3) if $\text{Ln} 2 = a$, $\text{Ln} 3 = b$, find $\text{Ln} 4, \text{Ln} 9, \text{Ln} 6, \text{Ln} 1.5, \text{Ln} 8$

$$4) \text{Find} \int \frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 + 3x^2 + 12x + 10} dx , \int \frac{8x + 18}{(2x - 1)(x + 5)} dx$$