① Domain – المجال

- جبرياً
- بيانياً

- متعددة الحدود
- الدالة الكسرية
- الدالة الجذرية
- الدالة الأسية واللوغاريتمية
- الدوال الدائرية

– متعددة الحدود Domain

مثال: $f(x)=5x-1$ ← ليزه حدود

$f(x)=x^2+x+1$ ←

* لاحظ ليزه حدود لانها اي عدد يوضع بدل x تحقق الدالة

ماه مجال ليزه الحدود هو $\mathbb{R}$ دائماً او $(-\infty,+\infty)$

مثال: $f(x)=4x^2+3x+1$ ← كل ليزه حدود

$f(x)=\frac{4}{x^2}+3x+1$ ✗ كسر

* اي ان الدالة متعددة الحدود يجب ان تكون الأسس اعداد صحيحة موجبة

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x-8x$ ✗

$\sqrt{x}$ جذر وليس متعددة حدود

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

- مجال التعريف Domain

- $f(x) = \frac{4}{x+5}$

الحل $x+5=0 \Rightarrow \boxed{x=-5}$

نقط الإعدام

$D_f = \mathbb{R} / \{-5\}$ أو $(-\infty,-5),(-5,+\infty)$

- ex $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-x-12}$

الحل $x^2-x-12=0$

أو $(x-4)(x+3)=0$

$\boxed{x=4}$; $\boxed{x=-3}$

نقط الإعدام

$D_f = \mathbb{R} / \{-3,4\}$ أو $(-\infty,-3),(-3,+4),(4,+\infty)$

- ex $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$

الحل $x^2-4=0$

أو $(x+2)(x-2)=0$

$x = \mp 2$

$D_f = \mathbb{R} / \{\pm 2\}$

أو $(-\infty,-2)(-2,+2),(+2,+\infty)$

∴ مجال التعريف لكسر هو $\mathbb{R}$ ماعدا الأعداد التي تجعل المقام (البسط) يساوي الصفر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

1. Domain مجال الدالة الجذرية

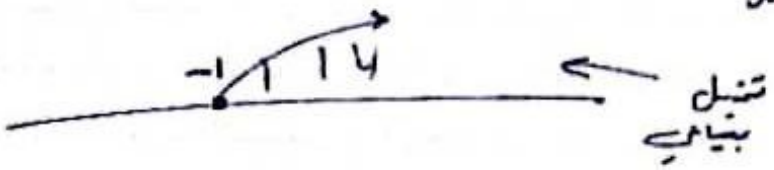
* $\sqrt{x}$ ، $x \geq 0$

أي أن x دائماً موجبة أو صفر

مثال $f(x) = \sqrt{x+1}$

الحل $x+1 \geq 0 \longrightarrow x \geq -1$

* نحل كمتباينة لأننا مقيدون بالأرقام والكميات غير السالبة عند حل كل المعادلة



المجال $[-1, +\infty)$ أو $\{x : x \geq -1\}$

مثال $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$

الحل $x^2 - x - 6 \geq 0$

* لأنه غير مقيد بالأرقام لذا نحل كمعادلة

$x^2 - x - 6 = 0$

∴ نحولها إلى معادلة ونحلها لإيجاد أصفارها

$(x-3)(x+2) = 0$

$x = 3$ ، $x = -2$

* ماعدا الجذرين حالة الإشارة x^2

وخارج الجذرين مخالفة الإشارة x^2

المجال $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

* لم يتم أخذ المتباينة الأولية بعين الاعتبار لأن الجذر سالب الغير وشرط الجذر هو ($x \geq 0$)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$

الحل) $x - 3 > 0$

$x > 3$

* لم يتم التذكير بالجذر لأنه يجذر على الطرفين ولا يمكن أن يكون بالمقام صفر

المجال: $(3, +\infty)$

مثال) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x} - 1}$

الحل) البسط $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

المقام ① $x \geq 0$

② $\sqrt{x} - 1 \neq 0$

$\sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1$ بتربيع الطرفين

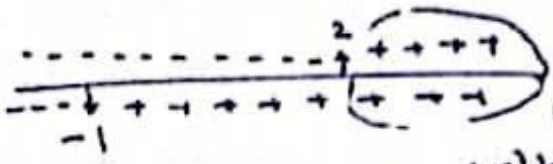
$x = 1$ مرفوضة

$[0, +\infty) / \{1\}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ب) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$

أ) $\frac{x-2}{x+1} \geq 0$



اصفار البسط (2)
اصفار المقام (-1)

$\left(\frac{+}{+} = +\right)$
$\left(\frac{-}{-} = +\right)$
$\left(\frac{+}{-} = -\right)$

المجال $(-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$ الاتحاد

* القوسان المزدوجة معناه ان العدد يستثنى
والعدد المربع معناه يساويا او يزيد

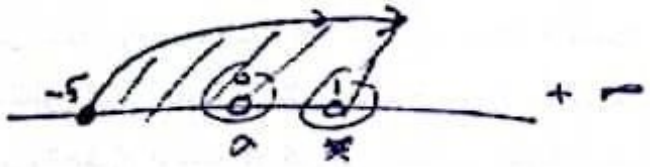
ج) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x^2 - x}$

① البسط $x + 5 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq -5}$

② المقام $x^2 - x \neq 0$

$\therefore x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0 \Rightarrow \therefore \boxed{x = 0}$ or $\boxed{x = 1}$



المجال $[-5, +\infty) / \{0, 1\}$ ماعدا

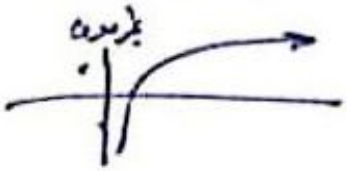
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مجال الدالة اللوغاريتمية

* $f(x) = \ln x$ $\quad x > 0$

مجال $(\ln(x))$ هو مجموعة

$(0, +\infty)$



---

ex) $f(x) = \ln(x+4)$

Sol) $x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4$

المجال $(-4, +\infty)$

---

ex) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$ Find The Domain

الحل

البسط $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow$ نحل المعادلة

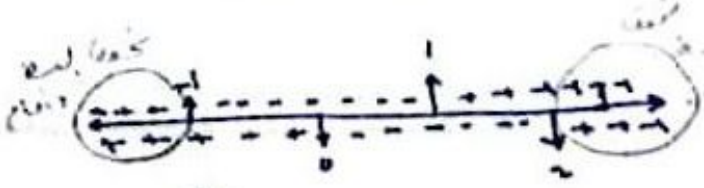
$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

المقام $x^2 - 2x > 0$ نحل كمعادلة

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$\boxed{x = 0}, \boxed{x = 2}$



المجال $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

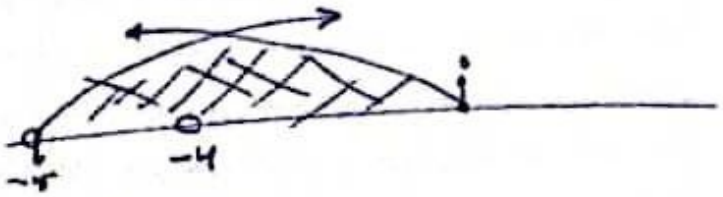
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ex) $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{\ln(x+5)}$

الحل: البسط $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

المقام: $x+5 \neq 1 \Rightarrow x \neq -4$ ، و $x+5 > 0 \Rightarrow x > -5$

نحلل ونستخرج الجذور ونضعها على خط الأعداد



$\therefore$ المجال $(-5, 0] / \{-4\}$

---

ex) $f(x) = \frac{x^2+5}{[x]}$ [x] صحيح بكسر

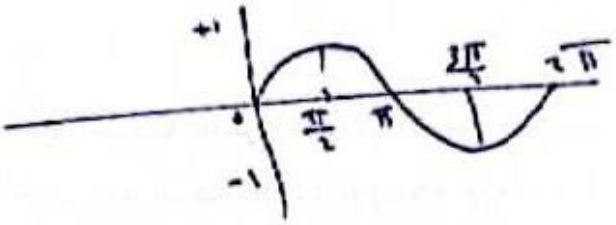
الحل) $[x] \neq 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$ [x]

$\therefore$ المجال $R / [0, 1)$

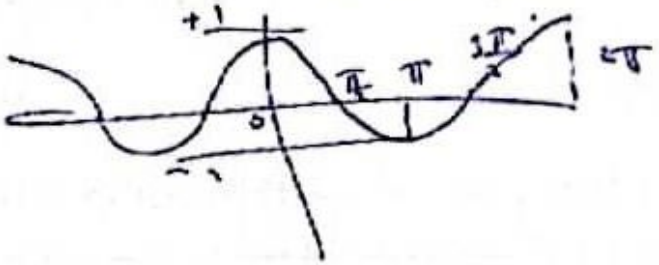
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مجال تعريف الدالة

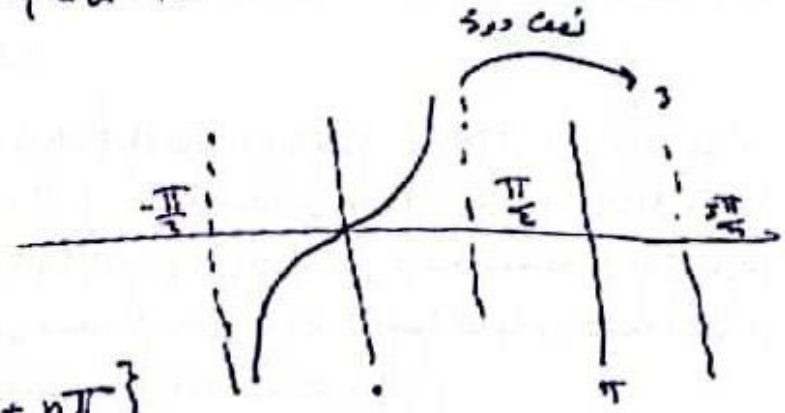
① $f(x) = \sin x \Rightarrow D: (-\infty, +\infty)$ or $\mathbb{R}$



② $f(x) = \cos x \Rightarrow D: (-\infty, +\infty)$ or $\mathbb{R}$



③ $f(x) = \tan x$



$D: \mathbb{R} / \{x \in \{\frac{\pi}{2} \pm n\pi\}$

or $x \notin \{\frac{\pi}{2} \pm n\pi\}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ج) $f(x) = \sqrt{\sin 2x - 2\cos^2 x}$

ملحوظة) $\sin 2x - 2\cos^2 x \geq 0$

$2\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$

$2\cos x(\sin x - \cos x) = 0$

$2\cos x = 0 \quad \div 2$

$\cos x = 0$

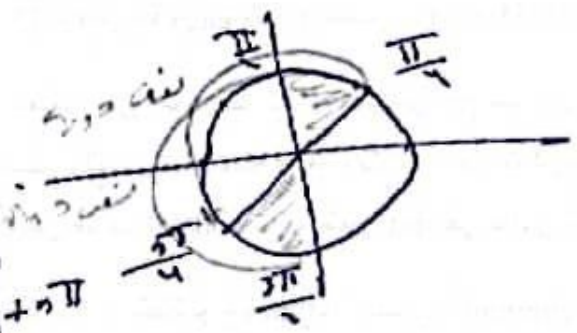
$x = \frac{\pi}{2}$

أو $\sin x - \cos x = 0$

$\sin x = \cos x$

$x = \frac{\pi}{4}$

دائرة الوحدة



D: $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\} + n\pi$

نعلم أن الدالة ظا دورية

* نأخذ فترة واحدة ونضيف لها $n\pi$

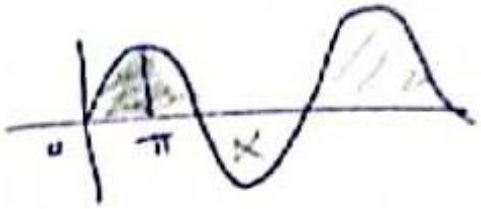
أو $\left\{\frac{\pi}{4} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$

$n = \pm 0, 1, 2 \ldots$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ex) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$

sol) $\sin x > 0$



$D: (0, \pi) + 2n\pi$

or $(0 + 2n\pi, \pi + 2n\pi)$, $n = \pm 1, -\!-\!-$

or $(2n\pi, \pi + 2n\pi)$

---

ex) $f(x) = \sqrt{\sin x - \cos x}$

sol) $\sin x - \cos x \geq 0$

$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$

$2 \cos \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cdot \sin \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} \geq 0$

$2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{2x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \geq 0$

$\sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \quad \div \sqrt{2}$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

$0 \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi \quad + \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$

$\therefore D: \left[\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right]$, $n = \pm 1, -\!-\!-$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

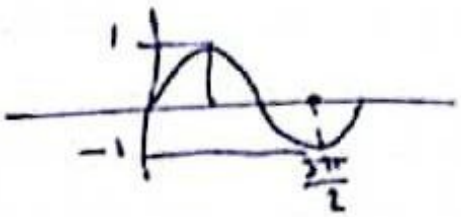
ex) $f(x) = \frac{1}{\sin x + 1}$

sol) $\sin x + 1 \neq 0$

$\sin x \neq (-1)$

$\sin x \neq \sin \frac{3\pi}{2}$

$\therefore x \neq \frac{3\pi}{2}$



$\therefore D: R / x \in \{\frac{3\pi}{2} \pm 2n\pi\}$, $n = \{0, 1, 1 \dots$

---

ex) $f(x) = \frac{3x+7}{\cos x - 1}$

sol) $\cos x - 1 \neq 0$

$\cos x \neq (1)$

$\cos x \neq \cos(0)$

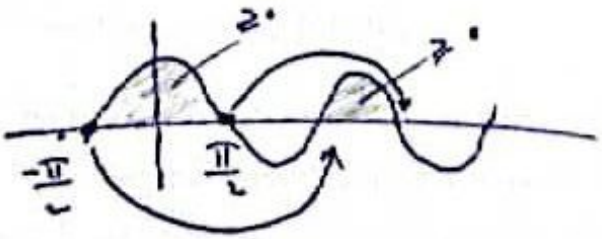
$\boxed{x = 0}$

$D: R / x \in \{0 \pm 2n\pi\}$

---

ex) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

sol) $\cos x \geq 0$



$D: [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] + 2n\pi$

or $\{\frac{-\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\}$, $n = \pm 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المدى Range =

ex) $y = \frac{x+1}{x-2}$ اوجد بدلالة x جبرياً

$\rightarrow D: R/\{2\}$

sol) نجد x بدلالة y

$$xy - 2y = x + 1$$
$$xy - x = 2y + 1$$
$$x(y-1) = 2y + 1$$

$\therefore x = \frac{2y+1}{y-1}$ اذا وجدنا مجال المقدار الجذري سوف نجد بدون

المقام $\neq 0$ $\Rightarrow y - 1 \neq 0$

$y = 1$

المدى : $R/\{1\}$

$D: R$

ex) $y = x + 3$

sol) $x = y - 3$

المدى : R

اذا كانت الدالة من الدرجة الثانية

ex) $y = x^2 + 3x + 4$ اوجد بدلالة x

$ax^2 + bx + c = y$

sol) $x^2 + 3x + 4 - y = 0$

المميز $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ لانها تحتاج

$(3)^2 - 4(1)(4-y) \geq 0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$9-16+4y \geq 0$

$-7+4y \geq 0$

$4y \geq 7 \div 4$

$y \geq \frac{7}{4}$ المدى

المدى $\left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$

او $x = \frac{-b}{2a}$ (رأس القطع)

ثم نعوض بالمعادلة

اوجد المدى

مثال) $y = \frac{x}{x^2+2}$

$yx^2+2y = x$

$yx^2 - x + 2y = 0$

$a = y$
$b = -1$
$c = 2y$

$b^2 - 4ac \geq 0$

$(-1)^2 - 4(y)(2y) \geq 0$

$1 - 8y^2 \geq 0$

$-8y^2 \geq -1$

$y^2 \leq \frac{1}{8}$

$|y| \leq \frac{1}{\sqrt{8}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{8}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$

المدى: $\left[-\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}\right]$

نزيح الطرف

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ex $y = 2\sqrt{-x^2-2x+3}$ اوجد المدى Range

داخل الجذر ≥ 0 ومخرج الجذر ≥ 0

اذا D: $[-3, 1]$

عند ايجاد المجذر

الحل بالتربيع $y^2 = -x^2-2x+3$

$x^2+2x-3+y^2 = 0$

$a = 1$
$b = 2$
$c = -3+y^2$

$b^2-4ac \geq 0$

$(2)^2 - 4(1)(-3+y^2) \geq 0$

$4+12-4y^2 \geq 0$

$16-4y^2 \geq 0$

$-4y^2 \geq -16 \div -4$

$y^2 \leq 4$ بالجذر

$|y| \leq 2$ تكتب بهذا الشكل

$-2 \leq y \leq 2$

المدى $[-2, 2]$

---

ex اوجد المجال والمدى

$y = \sqrt{x-2}$ Domain

$x-2 \geq 0$

D: $x \geq 2$

المدى $y \geq 0$

$x \geq 2$

$x-2 \geq 0$ بالتربيع

$y^2 \geq 0$ بالجذر $\Rightarrow y \geq 0$ $[0, +\infty)$

ويمكننا ان نحل كذلك بطريقة المميز:

ex $y = \frac{x^2}{x^2+2}$ مجال R

نتلاعب بالمقام

$0 \leq x^2 < x^2+2$ مميزات

$\div x^2+2$

$\frac{0}{x^2+2} \leq \frac{x^2}{x^2+2} < \frac{x^2+2}{x^2+2}$

هنا بسطنا المقام

$0 \leq \frac{x^2}{x^2+2} < 1$

$0 \leq y < 1$

المدى $[0, 1)$

---

ex $f(x) = 4+5\cos x$

اوجد المدى بالرسم

$-1 \leq \cos x \leq 1$ $\times 5$

$-5 \leq 5\cos x \leq 5$ $+4$

$-5+4 \leq 4+5\cos x \leq 5+4$

$-1 \leq 4+5\cos x \leq 9$

$-1 \leq y \leq 9$

المدى Range $[-1, 9]$

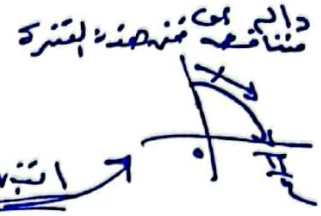
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ex ② $y = 1 + \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ هنا يوجد متغيرة

Find The Range

الحل

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$



$$\cos 0 \leq \cos x \leq \cos \frac{\pi}{2}$$

انقلب العلامات لانها متناقصة

$$1 \geq \cos x \geq 0$$ اضافة +1

$$2 \geq 1 + \cos x \geq 1$$

$$2 \geq y \geq 1$$

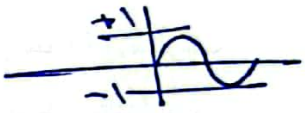
Range : $[1, 2]$

---

③ ex) find the Range for $y = -3 + \sin^2 x$

الحل

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$ بالتربيع



لاحظ $1 \geq \sin^2 x \geq 1$

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1$$ |-3

$$-3 \leq -3 + \sin^2 x \leq 1 - 3$$

$$-3 \leq -3 + \sin^2 x \leq -2$$

$$-3 \leq y \leq -2$$

Range: $[-3, -2]$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

④ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + 1}}$ find Range

Sol

* كل المدى المشكلة حل بمراجعة بناء المدى تقريباً

$-1 \le \sin x \le 1$ بالتربيع

$0 \le \sin^2 x \le 1$ $+1$

$0+1 \le \sin^2 x + 1 \le 1+1$

$1 \le \sin^2 x + 1 \le 2$ نجذر

$\sqrt{1} \le \sqrt{\sin^2 x + 1} \le \sqrt{2}$

$1 \le \sqrt{\sin^2 x + 1} \le \sqrt{2}$

$1 \le \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + 1}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

Range $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$

* هذا المعدل الكبير

⑤ $y = \sin x + \cos x$ find Range

* ليس المدى هذا $-\sqrt{1}$

Sol $y = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$y = 2\sin \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cdot \cos \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2}$ ← H.V

$y = 2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{2x - \frac{\pi}{2}}{2}\right)$

$y = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

* لا تبدأ عملية البناء

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$-1 \leq \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \quad * \sqrt{2}$

$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

Range: $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

---

ex) $y = 5 + 4\sin x$

Sol $\quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad * 4$

$-4 \leq 4\sin x \leq 4 \quad + 5$

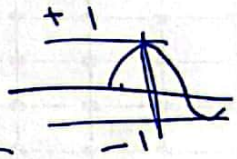
$1 \leq 5 + 4\sin x \leq 9$

$1 \leq y \leq 9$

Range: $[1, 9]$

---

ex $f(x) = -4 + 2\cos x$



$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad *2$

$-2 \leq 2\cos x \leq 2 \quad -4$

$-6 \leq -4 + 2\cos x \leq -2$

$-6 \leq y \leq -2$

Range: $[-6, -2]$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \quad * \sqrt{2}$

$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

Range: $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

---

ex) $y = 5 + 4\sin x$

Sol $\quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad * 4$

$-4 \leq 4\sin x \leq 4 \quad + 5$

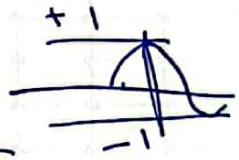
$1 \leq 5 + 4\sin x \leq 9$

$1 \leq y \leq 9$

Range: $[1, 9]$

---

ex $f(x) = -4 + 2\cos x$



$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \boxed{*2}$

$-2 \leq 2\cos x \leq 2 \quad \boxed{-4}$

$-6 \leq -4 + 2\cos x \leq -2$

$-6 \leq y \leq -2$

Range: $[-6, -2]$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال $y = \sin x + \cos x \;,\; x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 17.4

حل

$$y = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$y = 2\sin\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cdot \cos\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2}$$

$$y = 2\sin(\frac{\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{2x - \frac{\pi}{2}}{2})$$

$$y = 2(\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$y = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$ - $\frac{\pi}{4}$

$$-\frac{\pi}{4} \le x - \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} \rightarrow$$

تتصرف لفترة
تقف لفترة

$$0 \le x - \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4}$$ (cos)

$$\cos 0 \ge \cos(x - \frac{\pi}{4}) \ge \cos\frac{\pi}{4}$$

* هنا تتغير علاقة ما بين لأن الدالة متناقصة

$$1 \ge \cos(x - \frac{\pi}{4}) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2} \ge \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) \ge \frac{\sqrt{2}}{2} * \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \ge y \ge 1$$

Range $[1, \sqrt{2}]$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال $y = \sqrt{3 + 2\sin x}$ ، $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

الحل

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$ ×sin

$$\sin 0 \le \sin x \le \sin \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le \sin x \le 1$$ ×2

$$0 \le 2\sin x \le 2$$ +3

$$3 \le 3 + 2\sin x \le 5$$ بالجذر

$$\sqrt{3} \le \sqrt{3 + 2\sin x} \le \sqrt{5}$$

$$\sqrt{3} \le y \le \sqrt{5}$$

$$\text{Range} \left[\sqrt{3}, \sqrt{5}\right]$$

* لانه اعطاها قترة نبدل مكانه x او اذا لم يعطي قترة تكون x بين الواحد وبسالب واحد .

مثال $y = \frac{x+1}{x}$ ، $x \in [1, 2]$

الحل

$$y = \frac{x}{x} + \frac{1}{x}$$

$$y = 1 + \frac{1}{x} \quad , x \in [1, 2]$$

مثلب ما قلب علامات المتباينة

$$1 \le x \le 2$$

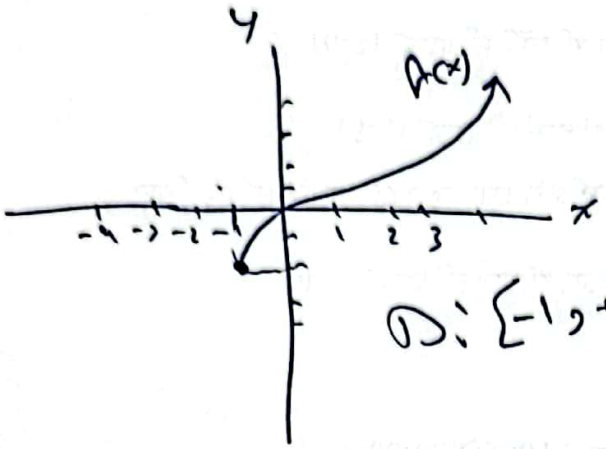
$$1 \ge \frac{1}{x} \ge \frac{1}{2}$$

$$2 \ge 1 + \frac{1}{x} \ge \frac{1}{2} + 1 \quad \therefore \text{Range} : \left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$$

$$2 \ge y \ge \frac{3}{2}$$

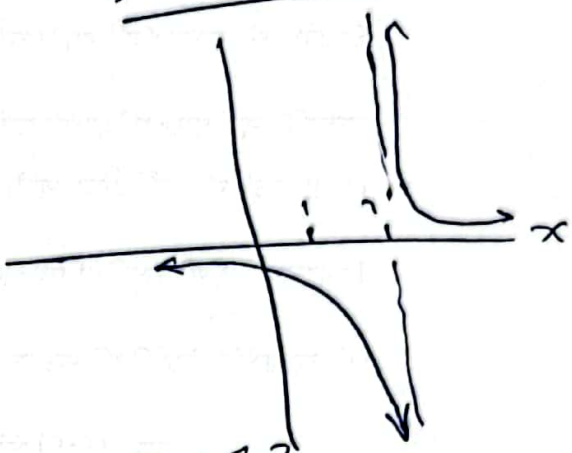
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بابة Domain



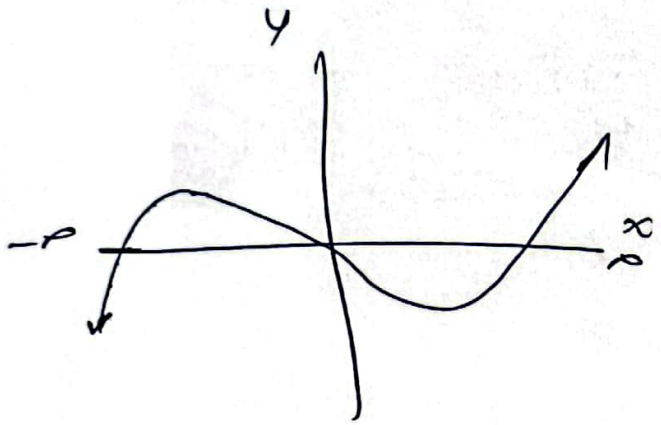
$D: [-1, +\infty)$

إلى منقطعة عند 2



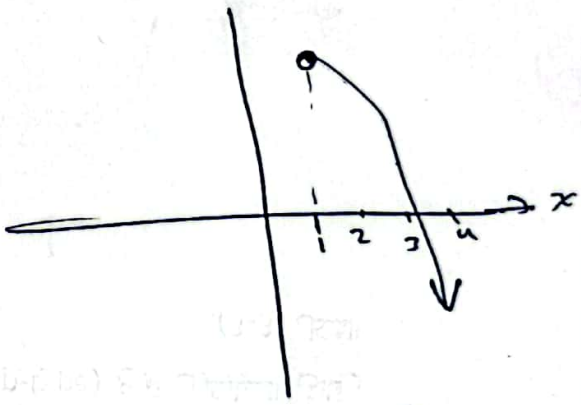
$D: R / \{2\}$

or $(-\infty, 2), (2, +\infty)$

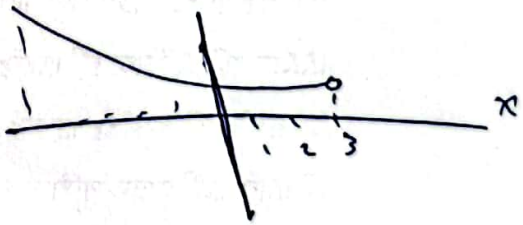


$D: R$

$(-\infty, +\infty)$



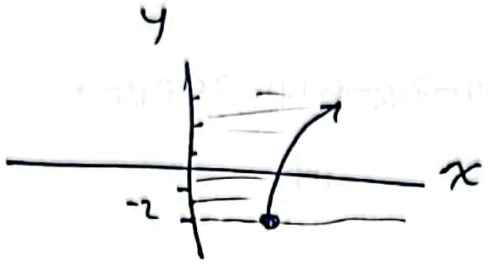
$D: (1, +\infty)$



$(-\infty, 3)$

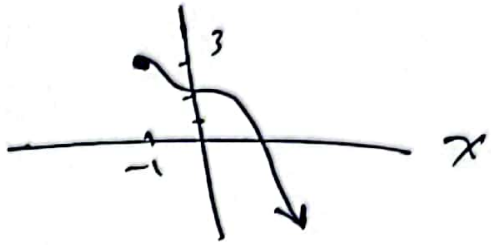
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Range

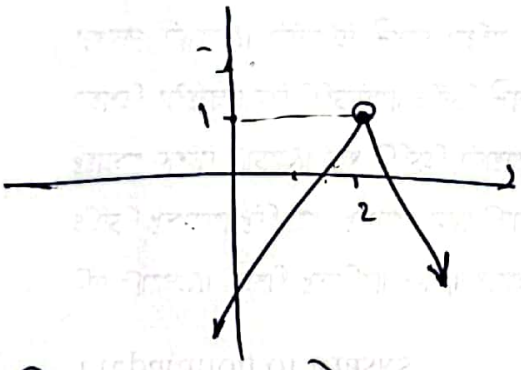


R: $[-2, +\infty]$

or $y \geq -2$

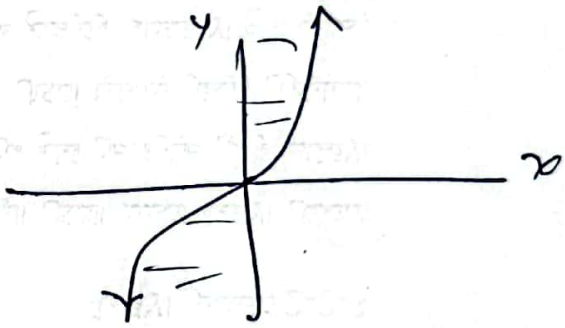


R: $(-\infty, 3]$



R $(-\infty, 1)$

or $R\ y < 1$



R: $(-\infty, +\infty)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner