المحاضرة الثالثة

* مؤثر الفرق: difference operator:

تعريف: مؤثر الفرق

ان الفرق بين a_n ، a_{n+1} يرمز له Δa_n ويعرف على النحو الآتي:

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

تعريف: مؤثر التغير الامامي ,

$$a_{n+1} = Fa_n \ , \ a_{n+2} = F^2 a_n \ , \ \ldots \ , \ a_{n+k} = F^k a_n$$

ملاحظة:

من التعريفين السابقين نستنتج بأن

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

$$= Fa_n - a_n$$

$$= (F - 1)\, a_n$$

فتكون العلاقة بين مؤثر الفرق ومؤثر التغير الأمامي هي أن:

$$\Delta = F - 1$$

المعادلات الفرقية difference Equations

لو كان لدينا المتتالية $A=\{a_n\}$ وكان العنصر a_{n+1} هو دالة بدلالة العنصر الذي يسبقه a_n فعندئذٍ تكون العلاقة

$$a_{n+1}=g(a_n);\quad n=0,1,2,\dots$$

وهذه المعادلة تسمى معادلة فرقية من المرتبة الاولى

First order difference Equation

ولو كانت الدالة g هي دالة خطية، فعندئذٍ تكون المعادلة الفرقية خطية لها الصيغة العامة الآتية

$$a_{n+1}=c_0(n)+c_1(n)\,a_{n-1};\quad n=0,1,2,\dots$$

اذ ان $c_0(n)$, $c_1(n)$ يعرفان بمعاملي المعادلة الفرقية. وللتيسير يفترض غالبا ان المعادلة ذات معاملات ثابتة لا تعتمد على n . $\therefore$ تصبح المعادلة على النحو الآتي

$$a_{n+1}=c_0+c_1a_n,\quad n=0,1,2,\dots$$

وهي معادلة فرقية خطية من المرتبة الاولى وذات معاملات ثابتة

حل المعادلات الفرقية
Solution of difference Equations

- هناك عدد من الطرائق الرياضية التي تستخدم لحل المعادلات الفرقية وهي

١- الطريقة المباشرة: تستخدم هذه الطريقة عندما تكون مرتبة المعادلة الفرقية صغيرة، وبخاصة المرتبة الاولى

٢- الطريقة الرياضية العامة: تستخدم هذه الطريقة عندما تكون مرتبة المعادلة الفرقية تزيد عن المرتبة الاولى ويكون حل المعادلة الفرقية بهذه الطريقة مشابه تماما لحل معادلة تفاضلية.

٣- طريقة تحويل-Z: تستخدم هذه الطريقة على نطاق واسع في التطبيقات التقنية. كما تتوفر في MatLab ادوات حاسوبية جاهزة للتعامل مع هذه الطريقة.

حل المعادلة الفرقية الخطية من المرتبة الاولى

بفرض لدينا المعادلة الفرقية

$$a_{n+1} = c_0 + c_1 a_n \ ; \ n \in N \quad --- (1)$$

نحل المعادلة بطريقة مباشرة

نفرض $n = 0$

$$a_1 = c_0 + c_1 a_0$$

عندما $n = 1$

$$a_2 = c_0 + c_1 a_1$$

وبتعويض المعادلة اعلاه

$$= c_0 + c_1 (c_0 + c_1 a_0)$$

$$= c_0 (1 + c_1) + c_1^2 a_0$$

بتكرار العملية على باقي قيم $n = 2, 3, \ldots$ نجد ان

$$a_n = c_0 (1 + c_1 + c_1^2 + \ldots + c_1^{n-1}) + c_1^n a_0$$

وكما هو واضح فان الحد الاول من المقدار الأخير هو متوالية هندسية منتهية أساسها c_1 ، ومجموعها

$$\frac{(1 - c_1^n)}{1 - c_1}$$ بشرط ان تكون $c_1 \neq 1$

أما إذا كانت $c_1 = 1$ فأن الحد الاول من المقدار السابق سيكون $n c_0$ ، وبذلك يكون الحل النهائي للمعادلة

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{c_0(1-c_1^n)}{1-c_1} + a_0 c_1^n \,; & c_1 \neq 1 \\ n c_0 + a_0 \,; & c_1 = 1 \end{cases} \quad \text{--- (٩)}$$

ملاحظة :

في المعادلة رقم (١) أعلاه اذا اعطينا قيمة a_n ، فيمكن بيسر إيجاد قيمة n المقابلة على النحو الآتي

١- اذا كانت $c_1 \neq 1$ فمن الشطر الاول من المعادلة (٩) نجد أن :

$$a_n = \frac{c_0(1-c_1^n)}{1-c_1} + c_1^n a_0$$

وبعد تبسيط المقدار الاخير وذلك بجعل المقدار

الذي يتضمن المجهول n ، a_n في الطرف الايسر ، وباقي المعلمات في الطرف الأيمن ، نجد أن

$$c_1^n = \frac{c_0 + a_n (c_1 - 1)}{c_0 + a_0 (c_1 - 1)}$$

وبأخذ Ln طرفي المعادلة الأخيرة ، وبعد التبسيط نجد أن

$$n = \frac{Ln\left[\frac{c_0 + a_n (c_1 - 1)}{c_0 + a_0 (c_1 - 1)}\right]}{Ln(c_1)} \;;\; c_1 \neq 1 \quad \text{----- (3)}$$

وبطبيعة الحال فأن قيمة n الناتجة من المعادلة الأخيرة تقرب الى أقرب عدد صحيح

ب- اذا كانت $c_1 = 1$ فمن الشطر الثاني من المعادلة (2) نجد أن

$$n = \frac{a_n - a_0}{c_0} \;;\; c_1 = 1 \quad \text{----- (4)}$$

مثال: اذا كان النموذج الرياضي للمتتالية $\{a_n\}$ هو

$$a_{n+1} = 5 + a_n \;;\; n \in N$$
$$a_0 = 3$$

١- جد أول اربع حدود من هذه المتتالية

٢- جد الحد الخامس عشر والحد المائة من هذه المتتالية

٣- ما هو الحد في هذه المتتالية والذي قيمته 103؟

الحل: نلاحظ انه

$$c_1 = 1 , c_0 = 5$$

١- طالما أن $c_1 = 1$ ضمن الشطر الثاني من المعادلة (2) نجد

$$a_n = n c_0 + a_0$$

$$\therefore \; a_1 = 5 + 3 = 8 \;,\; a_2 = 2 \times 5 + 3 = 13$$

$$a_3 = 3 \times 5 + 3 = 18 \;,\; a_4 = 4 \times 5 + 3 = 23$$

٢-

$$a_{15} = 15 \times 5 + 3 = 78 \;,\; a_{100} = 100 \times 5 + 3 = 503$$

٢- من المعادلة (٤) نجد ان

$$n = \frac{a_n - a_0}{c_0} = \frac{103 - 3}{5} = 20$$

اي ان الحد العشرون تكون قيمته 103

مثال: اذا كان المعرف الرياضي للمتتالية $\{a_n\}$ هو:

$$a_{n+1} = 1 + 3a_n \quad , \quad n \in N$$

$$a_0 = 2$$

١- جد اول خمس حدود من هذه المتتالية

٢- جد الحد الخامس عشر من هذه المتتالية

٣- ماهو الحد الذي من هذه المتتالية والذي قيمته 47622

يترك واجب للطالب