المحاضرة الرابعة

دراسة حالات في النمذجة الحتمية للتغيير

قانون نيوتن للتبريد :

من تطبيقات نمذجة التغيير ، نمذجة التغيير في درجة حرارة شيء يوضع في بيئة ذات حرارة ثابتة ، مثل وضع جسم دافئ داخل مجمدة او ادخال قطعة من الايس كريم الباردة الى داخل غرفة .

فلو كانت T_0 يرمز الى درجة الحرارة الابتدائية للجسم

C : يرمز الى درجة الحرارة الثابتة في البيئة المحيطة بالشيء

T_n : يرمز الى درجة حرارة الشيء بعد n من الوحدات الزمنية

مقدار التغيير في درجة حرارة الشيء في الوحدة الزمنية الواحدة يحسب من المعادلة الفرقية الاتية : وهذا هو قانون نيوتن للتبريد

$$\Delta T_n = T_{n+1} - T_n = k\,(T_n - C) \quad ; n \in N \qquad (5)$$

اذ ان k هو مقدار ثابت

∴ قانون نيوتن للتبريد ينص على :

الفرق في درجة الحرارة ΔT_n بين الجسم الساخن والبيئة المحيطة يتناقص بنسبة تتناسب مع الفرق بين درجتي الحرارة

مثال: أدخل كوب شاي درجة حرارته 62 درجة مئوية الى داخل غرفة درجة حرارتها 22 درجة مئوية، وبعد دقيقة واحدة اصبحت درجة حرارته 60 درجة مئوية

١- كم ستكون حرارة الشاي بعد 5 دقائق

٢- بعد كم دقيقة سوف تتساوى تقريباً درجة حرارة الشاي بدرجة حرارة الغرفة.

الحل: نفرض T_0 : يرمز الى درجة الحرارة الابتدائية للشاي

C : يرمز الى درجة حرارة الغرفة

T_n : يرمز الى درجة حرارة الشاي بعد n من الدقائق

من السؤال نلاحظ ان

$$T_0 = 62 \quad , \quad T_1 = 60 \quad , \quad C = 22$$

وبتطبيق هذه المعطيات على قانون نيوتن للتبريد المعادلة (5) نجد ان:

$$\Delta T_0 = T_1 - T_0 = k(T_0 - C)$$

$$60 - 62 = k(62 - 22)$$

$$\therefore \quad k = \frac{-2}{40} = -0.05$$

∴ النموذج الرياضي المعبر عن التغير في درجة حرارة الشاي بعد n

$$\Delta T_n = T_{n+1} - T_n = -0.05(T_n - 22) \;;\; n \in N$$

$$T_{n+1} = -0.05T_n + T_n + 1.1$$

$$\left.\begin{array}{l} T_{n+1} = 1.1 + 0.95T_n \quad ;n \in N \\ T_0 = 62 \end{array}\right\} \text{نموذج}$$

∴ سنجد T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 الذي يمثل درجة حرارة الشاي بعد 5 دقائق باستخدام النموذج اعلاه.

الجدول التالي يبين النتائج

n	0	1	2	3	4	5		
T_n	62.0	60.0	58.1	56.3	54.6	53.0		

حل الفرع ٢ :

$$\left.\begin{aligned} T_{n+1} &= 1.1 + 0.95\, T_n \\ T_0 &= 62 \end{aligned}\right\}$$ بمقارنة النموذج الرياضي

مع المعادلة الفرضية التالية

$$a_{n+1} = C_0 + C_1 a_n$$

نجد ان : $C_0 = 1.1$, $C_1 = 0.95$ فيكون حل النموذج

باستخدام المعادلة

$$a_n = \frac{c_0(1-c_1^n)}{1-c_1} + a_0 c_1^n$$

$$\therefore T_n = \frac{1.1(1-0.95^n)}{1-0.95} + 62(0.95^n)$$

$$= \frac{1.1}{0.05} - 22(0.95^n) + 62(0.95^n)$$

$$T_n = 22 + 40(0.95)^n$$

ولما كانت الغاية

$$\lim_{n\to\infty} 0.95^n = 0$$

لذا نجد بأن

$$\lim_{n \to \infty} T_n = 22$$

اي انه اذا بقي الشاي لمدة طويلة في الغرفة فأن درجة حرارته سوف تؤول في النهاية الى درجة حرارة الغرفة.

وبما انه درجة حرارة الشاي سوف تؤول الى درجة حرارة الغرفة بعد مدة طويلة. فبالامكان الاستعانة ببرنامج بلغة الماتلاب باستخدام دالة for للوصول للحل المطلوب بعد تكرار خطوات الحل.

شهادات التوفير:

شهادة توفير قيمتها الابتدائية c دينار تتقاضى فائدة شهرية مقدارها $\alpha\%$

١- اكتب النموذج الحركي لقيمة هذه الشهادة

٢- جد الحل للنموذج الحركي

٣- جد مقدار الربح الشهري في هذه الشهادة

٤- جد عدد الاشهر اللازمة لكي تتضاعف فيها قيمة شهادة التوفير k من المرات.

٥- افرض ان القيمة الابتدائية لشهادة التوفير هي $c = 20000$ دينار، وان الفائدة الشهرية مقدارها 1% . جد قيمة هذه الشهادة خلال اشهر السنة الاولى، وكذلك مجموع الارباح التراكمية، بعد كم سنة سوف تتضاعف قيمة هذه الشهادة

الحل: نفرض ان المتغير a_n يمثل قيمة شهادة التوفير بعد n من الاشهر

١- ان قيمة الشهادة في الشهر القادم تساوي قيمتها في الشهر الحالي مضافاً اليها الربح الناجم عن الفائدة

أي أن

$$a_{n+1} = a_n + \alpha a_n$$

فيكون النموذج الحركي لقيمة شهادة التوفير هو

$$a_{n+1} = (1+\alpha) a_n \quad ; \quad n \in N$$

$$a_0 = C$$

٢- بمقارنة النموذج السابق في الفرع ① مع المعادلة الفرقية رقم ①

$$a_{n+1} = c_0 + c_1 a_n$$

نجد أن $c_0 = 0$ ، $c_1 = 1+\alpha$ وباستخدام المعادلة التالية

$$a_n = \frac{c_0 (1 - c_1^n)}{1 - c_1} + a_0 c_1^n$$

وبما أنه $a_0 = C$ ، $c_1 = 1+\alpha$ ، $c_0 = 0$

نستنتج بأن الحل للنموذج الحركي لقيمة شهادة التوفير هو

$$a_n = C (1+\alpha)^n \quad ; \quad n \in N$$

وكما هو واضح قيمة الشهادة a_n تزداد بازدياد قيمة n (عدد الاشهر) لان $(1+\alpha)^n$ هي دالة تزايدية في n لكون $(1+\alpha) > 1$

٣- ان الربح الناجم عن الفائدة في الشهر القادم هو

$$P_{n+1} = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

وبما انه $a_{n+1} = (1+\alpha) a_n$

$$\therefore P_{n+1} = (1+\alpha) a_n - a_n$$

$$= a_n + \alpha a_n - a_n = \alpha a_n$$

ومن الفرع الثاني بما انه $a_n = c(1+\alpha)^n$ نجد انه

$$P_{n+1} = c\alpha(1+\alpha)^n \quad ; n \in N$$

٤- المطلوب إيجاد قيمة k التي تحقق العلاقة الآتية

$$a_n = k a_0 = k c$$

لأن $\boxed{a_0 = c}$

وبالتعويض من العلاقة الاخيرة في الفرع ١ لثالثة

$$a_n = c(1+\alpha)^n$$

نجد ان

$$c(1+\alpha)^n = kc$$

$$\therefore \quad k = (1+\alpha)^n$$

ولإيجاد عدد الشهور اللازمة لكي تتضاعف فيها قيمة شهادة التوفير k من المرات ، نقوم بأخذ Ln لطرفي المعادلة الأخيرة وبعد التبسيط نجد ان

$$n = \frac{Ln(k)}{Ln(1+\alpha)}$$

وبطبيعة الحال فان قيمة n الناتجة تقرب الى عدد صحيح

٥- لدينا الآن المعطيات الآتية:

$$\alpha = 0.01 \; ; \; C = 20000$$

فمن الفرع $\boxed{2}$ نجد ان قيمة هذه الشهادة في الشهر n هي

$$a_n = c(1+\alpha)^n$$

$$= 20000(1+0.01)^n = 20000(1.01)^n \, , n \in N$$

$$\therefore \; a_n = 20000(1.01)^n \;, n \in N$$

$$P_{n+1} = c\alpha(1+\alpha)^n = 20000(0.01)(1.01)^n$$

والجدول الآتي يبين قيمة الشهادة والربح الشهري P_n لاشهر السنة الاولى.

P_n الربح الشهري	a_n قيمة الشهادة	الشهر n
200	20000	0
202	20200	1
204	20402	2
206	20606	3
208	20812	4
210	21020	5
213	21230	6
214	21442	7
217	21657	8
218	21873	9
221	22092	10
223	22313	11
225	22536	12

اي ان قيمة شهادة التوفير بعد 12 شهراً سوف تصبح (22536) دينار ويكون مجمل الارباح خلال السنة الاولى هو

$$a_{12} - c = 22536 - 20000 = 2536$$

ولحساب عدد السنين اللازمة لكي تتضاعف قيمة هذه الشهادة اي ايجاد قيمة n التي عندها

$$k = 2$$

$$n = \frac{\ln(k)}{\ln(1+\alpha)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1+0.01)} = 69.6607 \cong \underline{70}$$

اي بعد 70 شهراً (اي خمسة سنوات و 10 شهر) سوف تصبح قيمة هذه الشهادة الضعف اي

$\underline{40000}$ دينار