المحاضرة الثامنة

النموذج اللوجستي The logistic model

النموذج اللوجستي عبارة عن معادلة فرضية من المرتبة الاولى ومن الدرجة الثانية. ويعد هذا النموذج من الامثلة المهمة والسهلة للنماذج الحركية غير الخطية. ان تطبيقات هذا النموذج تغطي العديد من المجالات، مثل الشبكات العصبية الاصطناعية، علم الاحياء، الرياضيات المالية، علم الكلام، الاقتصاد، الكيمياء، وبفرض اننا نهتم بدراسة التغير في شيء معين يتغير بتغير الزمن، مثل التغير في شبة البكتيريا في بيئة معينة، والتغير في شبة الاصابة بمرض معين في محيط معين، والتغير في شبة تكون أقامنا الفرضية الآتية:

شبة وجود الشيء عند الزمن $n+1$	تتناسب مع	شبة وجوده عند الزمن n	و	شبة عدم وجوده عند الزمن n

فلو كان المتغير x_n يرمز الى شبة وجود ذلك الشيء عند الزمن n، فان $1-x_n$ يرمز الى شبة عدم وجوده عند الزمن n. ومن الفرضية السابقة، وبعد تحويل التناسب الى معادلة مع ملاحظة أن "و" تحول الى علاقة الضرب دلالة على التفاعل، نتوصل الى النموذج الرياضي الآتي:

$$x_{n+1} = r x_n (1-x_n); \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

اذا ان r هي كمية ثابتة تمثل نسبة النمو ، ويعرف هذا النموذج بالنموذج اللوجستي في الزمن المتقطع .

تطبيقات

مثال: النمو في حجم مجتمع الحيتان

اذا علمت أن حجم مجتمع الحيتان يكون مقيداً بظروف البيئة وأنه اذا كان اقل من مستوى معين N_{min} ، فإنه يكون مهدداً بالانقراض في تلك البيئة . أما اذا كان أكبر من مستوى معين N_{max} ، فإن اعدادها سوف تتناقص لأن البيئة لا تستطيع تحمل اعداد كبيرة من الحيتان .

نموذج حجم مجتمع الحيتان في تلك البيئة بعد n من السنين

الحل: نفرض أن x_n يمثل حجم مجتمع الحيتان في تلك البيئة في السنة n لذا فإن

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

يمثل مقدار التغيير في حجم مجتمع الحيتان في سنتين متتاليتين . ومن معطيات هذه الحالة فإن Δx_n يتناسب مع كل من

$$(N_{max} - x_n) \quad , \quad (x_n - N_{min})$$

أي ان

أي أن

وبعد تحويل التناسب الى معادلة يصبح النموذج بالشكل النهائي الآتي

$$\Delta x_n = r(N_{max} - x_n)(x_n - N_{min})$$

إذ ان r هو ثابت التناسب . اي ان

$$x_{n+1} = x_n + r(N_{max} - x_n)(x_n - N_{min}) \; ; \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

مثال: انتشار مرض معد

افرض أن هناك N من الاشخاص في محيط ما، فالا يقل عن واحد من هؤلاء الأشخاص مصاب بمرض معد (أنفلونزا مثلاً) وبفرض وجود تفاعل بين المصابين وغير المصابين لنقل المرض، وعدم وجود اي علاج . نموذج اعداد المصابين بهذا المرض بهذا المحيط بعد n من الايام في ذلك المحيط عندما يكون $N = 100$ ونسبة النمو $r = 0.005$ وعدد المصابين بهذا المرض $x_0 = 3$

الحل: نفرض ان المتغير x_n يرمز الى عدد المصابين بهذا المرض وبهذا المحيط بعد n من الايام . من معطيات المثال ، نجد ان

(التغير في اعداد المصابين بهذا المرض ليوم ند) يتناسب مع
(عدد المصابين بهذا المرض لهذا اليوم)
و (عدد غير المصابين بهذا المرض لهذا اليوم)
اي ان

$$\Delta x_n \propto x_n (N - x_n)$$

أذ ان $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$

وبعد تحويل علاقة التناسب الى معادلة ، نجد أن:

$$x_{n+1} = x_n + r x_n (N - x_n) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\therefore x_1 = x_0 + r x_0 (N - x_0) = 3 + (0.005)(3)(100-3)$$

$$x_1 = 4.455$$

$$x_2 = x_1 + r x_1 (N - x_1) = 4.455 + (0.005)(4.455)(100-4.455)$$

$$x_2 = 6.583$$

تترك التكملة كل الطالب

دراسة حالات لأنظمة متعددة المتغيرات:

الحالة الأولى

نمذجة حركة معركة بحرية:

في السنة 1805 وقعت معركة بحرية مشهورة بين الأسطولين الفرنسي والاسباني من جهة بقيادة نابليون بونابرت، والأسطول البريطاني من جهة أخرى بقيادة اللورد نيلسون، عرف بمعركة ترافالجار.

في البداية كانت القوة الفرنسية - الاسبانية مؤلفة من 33 سفينة في حين أن القوة البريطانية كانت مؤلفة من 27 سفينة. وبفرض انه خلال كل جولة، فإن كلاً من الطرفين يخسر ما يعادل 15% من سفن خصمه.

1- اكتب النموذج التركي لأعداد السفن لكل من الطرفين ثم احسب المتبقية لكل طرف خلال العشر جولات القادمة.

2- اذا كانت السفن الفرنسية - الاسبانية مرتبة على شكل ثلاث مجاميع مستقلة، المجموعة A مؤلفة من 3 سفن والمجموعة B مؤلفة من 17 سفينة، والمجموعة مؤلفة من 13 سفينة. وبفرض ان كل طرف من طرفي المعركة يخسر في كل جولة ما يعادل 5% من سفن خصمه. ولو كانت استراتيجية الاميرال نيلسون تتألف من ثلاث مراحل

في المرحلة الاولى : تهاجم الجمهورة A من السفن الفرنسية-الاسبانية بقوة بريطانية قوامها 13 سفينة.

في المرحلة الثانية: يضاف الى السفن التي لديه السفن الناجية من الجولة الاولى وتهاجم الجمهورة B من السفن الفرنسية-الاسبانية

وفي المرحلة الثالثة: فتستخدم كل السفن المتبقية لديه لمهاجمة الجمهورة C من السفن الفرنسية - الاسبانية

اكتب النموذج الحركي المعبر عن استراتيجية الاميرال نيلسون ونتائجها تحت الفروض الخطاة. وبين حصيلة السفن المتبقية لكل طرف في نهاية تطبيق هذه الاستراتيجية. وبيانيا لمن ستؤول الغلبة في نهاية المعركة

الحل: نفرض ان

B_n = عدد السفن البريطانية في الجولة n

F_n = عدد السفن الفرنسية - الاسبانية في الجولة n

P- النموذج الحركي لاكواد السفن لكل من الطرفين

$$B_{n+1} = B_n - 0.1 F_n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$F_{n+1} = F_n - 0.1 B_n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

وبيانه معطى بالسؤال عدد السفن التي سبدأ بها

$$B_0 = 27 \quad , \quad F_0 = 33$$

$$\therefore B_1 = B_0 - 0.1 F_0 = 27 - 6.1(33) = 23.7$$

$$F_1 = F_0 - 0.1 B_0 = 33 - (0.1)(27) = 30.3$$

⋮

$$B_2 = 20.67$$

$$F_2 = 27.93$$

⋮

$$B_{10} = 2.679$$

$$F_{10} = 18.2416$$

وكما هو واضح من النتائج السابقة وفق الشروط المعطاة، فإن الاسطول البريطاني سيهزم جيش (10) صومالي مرابة 3 سفن وان الاسطول الفرنسي - الاسباني سيهزم مرابة 18 سفينة. وهذا يعني ان الخطة مناسبة لصالح الاسطول الفرنسي الاسباني لو جرت العمليات وفق هذا السياق.

ولهذا وضع الاميرال نيلسون استراتيجية خاصة بهذه الخطة كما في الفرع ب.

ب: حقق استراتيجية الاميرال نيلسون في ثلاث مراحل هي

المرحلة الاولى: تهاجم المجموعة A من الاسطول الفرنسي-الاسباني (المؤلفة من ثلاث سفن) بثلاث عشرة سفينة:

$$B_{n+1} = B_n - 0.05 F_n \quad ; \quad n=0,1,2,3,\ldots$$

$$F_{n+1} = F_n - 0.05 B_n \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$F_0 = 3 \quad , \quad B_0 = 13$$

النتيجة

n	B(n)	F(n)
0	13	3
1	12.85	2.35
2	12.7325	1.7075
3	12.6471	1.0709
4	12.5936	0.4385

وكما هو واضح من النتائج العددية في نهاية الجولة الرابعة (التي تقابل $n=4$) يكون قد بقي للقوة الفرنسية-الاسبانية اقل من سفينة واحدة (من الناحية النظرية)، في حين ينقل عن القوة البريطانية المهاجمة 12.5936 (اي قرابة 13) سفينة

المرحلة الثانية: يهاجم المجموعة B من الاسطول الفرنسي الاسباني

(المؤلفة من سبع عشرة سفينة، فضلاً عن السفن المتبقية من المرحلة الاولى) بأربع عشرة سفينة فضلاً عن السفن المتبقية من المرحلة الاولى،

عدد السفن البريطانية المهاجمة

عدد السفن الاسبانية الفرنسية في المجموعة B :

$26.5936 = 12.5936 + 14$ سفينة

$17.4385 = 0.4385 + 17$

$$B_{n+1} = B_n - 0.05 * F_n$$

$$F_{n+1} = F_n - 0.05 B_n$$

وبعد التعويض

n	B(n)	F(n)
0	26.5936	17.4385
1	25.7217	16.1088
2	24.9162	14.8227
⋮	⋮	⋮
15	19.7162	0.6834

وفي نهاية الجولة الخامسة عشرة (اي تقابل $n = 15$) يكون قد بقي من القوة الفرنسية - الاسبانية اقل من سفينة واحدة (من الناحية النظرية) في حين يبقى من القوة البريطانية المهاجمة 19.7162 (اي قرابة 20 سفينة)

المرحلة الثالثة: يهاجم المجموعة C من الاسطول الفرنسي الاسباني (المؤلفة من سبع عشرة سفينة فضلاً عن السفن المتبقية من المرحلة الثانية) بجميع السفن المتبقية لديه.

عدد السفن البريطانية المهاجمة: 19.7162 سفينة

عدد السفن الفرنسية - الاسبانية في المجموعة B1:

17 + 0.6834 = 17.6834 سفينة

$$B_{n+1} = B_n - 0.05 * f_n$$

$$F_{n+1} = F_n - 0.05\, B_n$$

n	B(n)	F(n)
0	19.7162	17.6834
1	18.8320	16.8976
⋮		
27	8.4761	0.8867

وفي نهاية هذه المرحلة يكون الاسطول البريطاني قد دمر الاسطول الفرنسي - الاسباني، وبقي لديه 8 سفن. ونشير الى ان الاميرال نيلسون قد قتل في المرحلة الاخيرة من هذه المعركة، الا ان استراتيجيته نجحت في تحقيق النصر على الرغم من تفوق الاسطول الفرنسي - الاسباني عددياً على الاسطول البريطاني.