مراحل بناء نموذج رياضي لنمو السكان

بناء نموذج رياضي لنمو السكان في بلد ما أو منطقة معينة وذلك باستخدام المعادلات التفاضلية

مراحل بناء النماذج الرياضية

المرحلة الاولى: الفرضيات

إن الفرضية التي افترضها توماس مالثوس هي انه خلال فترات زمنية صغيرة فان اعداد الولادات والوفيات تتناسب مع كل من حجم المجتمع وطول الفترة الزمنية.

المرحلة الثانية: الصياغة الرياضية

نفرض $N(t)$: عدد السكان في البلد قيد الدراسة عند الزمن t

$B(t)$: عدد الولادات في ذلك البلد في الزمن t

$D(t)$: عدد الوفيات في ذلك البلد في الزمن t

Δt : تمثل فترة زمنية صغيرة

$$\therefore B(t) \propto N(t)\,\delta t$$

$$D(t) \propto N(t)\,\delta t$$

اذا ان $\propto$: هي تناسب

$$\therefore B(t) = a\,N(t)\,\delta t$$

$$D(t) = b\,N(t)\,\delta t$$

اذ ان a, b مقدارات ثابتات

ان التغير في عدد السكان في فترة زمنية صغيرة δt

$\delta N(t)$: يمثل الفرق بين اعداد الولادات واعداد الوفيات في تلك الفترة

$$\delta N(t) = B(t) - D(t)$$

$$= a\,N(t)\,\delta t - b\,N(t)\,\delta t$$

$$= C\,N(t)\,\delta t$$

اذ ان $C = a - b$ قيمة ثابتة

لذا نجد ان

$$\frac{\delta N(t)}{\delta t} = cN(t)$$

وبأخذ غاية الطرفين عندما تقترب δt من الصفر

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta N(t)}{\delta t} = \frac{dN(t)}{dt} = cN(t)$$

فيكون النموذج الرياضي المقترح لعدد الكائنات في ضوء الفرضية التي افترضها كوماس والتوسع

$$\frac{dN(t)}{dt} = cN(t)$$

$\therefore$ ان c كمية ثابتة

~~الخطوة الأولى~~

المرحلة الثالثة: الحل الرياضي

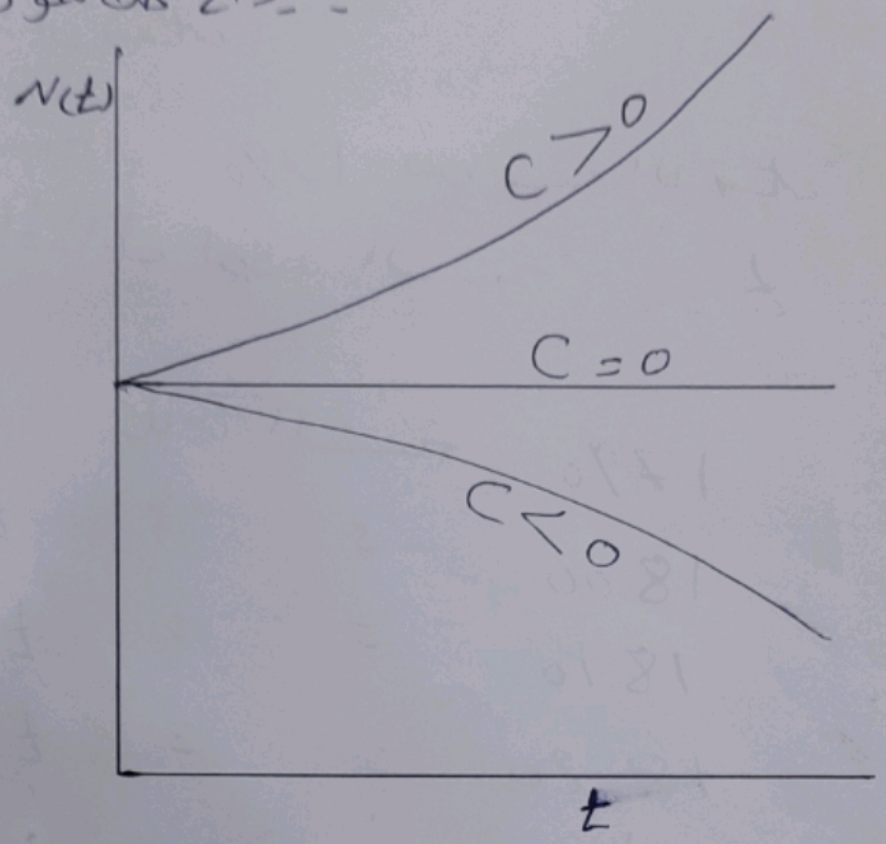
ان النموذج الذي تم الحصول عليه عبارة عن معادلة تفاضلية من المرتبة الاولى. ويمكن بسهولة حل هذه المعادلة والحصول على نموذج مالثوس وهو

$$N(t) = N(0)\, e^{ct}$$

المرحلة الرابعة:

تفسير الحل سيقتصر على جانبين هما

1- رسم الحل: الشكل الآتي يوضح حل نموذج توماس مالثوس



وكما هو واضح في الشكل فان نموذج توماس مالثوس يعطي وصفاً معقولاً للتغير في حجم السكان. فاذا كان $C=0$ فان حجم المجتمع سوف يبقى كما هو في مكانه، لان نسبة الولادات سوف تساوي نسبة الوفيات. واذا كان $C<0$ فان حجم المجتمع سوف يتناقص لان نسبة الولادات ستكون اقل من نسبة الوفيات. اما اذا كان $C>0$ فان حجم المجتمع سيتزايد باضطراد لان نسبة الولادات ستكون اكبر من نسبة الوفيات

هـ- اختبار كفاءة النموذج في التنبؤ: إن اختبار كفاءة النموذج في التنبؤ يتطلب بيانات واقعية مسجلة حسب تعداد السكان كل ١٥ سنوات. سنطلق على السنة التي يبدأ بها نمذجة السكان.

تسمية سنة الأساس:

نفرض السنة 1790 هي سنة الأساس

∴ الدليل المقابل لهذه السنة $t = 0$

∴

$t = 0$	تكافئ السنة	1790
$t = 1$	"	1800
$t = 2$	"	1810
$t = 3$	"	1820
⋮		⋮
$t = 22$	"	2010

أي ان الدليل المقابل t يحسب من العلاقة الآتية

$$t = \frac{Year - 1790}{10}$$

$$\therefore Year = 1790 + 10t$$

(7)

ان نموذج توماس مالثوس يعتمد على كمية ثابتة معلومة
هي $N(0)$ ، وكمية ثابتة مجهولة هي c

لو اخذنا سنة الاساس $N(0) = 3.9$ مليون نسمة
وفي السنة 1800 هو $N(1) = 5.3$ مليون نسمة
ونعوض في النموذج $t = 1$ نجد ان

$$N(t) = N(0)\, e^{ct}$$
$$N(1) = N(0)\, e^{c}$$
$$e^{c} = \left(\frac{N(1)}{N(0)}\right)$$
$$c = \ln\left(\frac{N(1)}{N(0)}\right)$$
$$c = \ln\left[\frac{5.3}{3.9}\right] = 0.3$$

$$\therefore c = 0.3$$

اي ان شبه النمو الأسي في عدد السكان

$$0.3 * 100\% = 30\%$$

خلال عشر سنوات

وبذلك يكون نموذج مالثوس هو

$$N(t) = N(0)\, e^{at}, \quad N(0) = 3.9$$

ويمكن الآن استخدام النموذج للتنبؤ بأعداد السكان للسنوات اللاحقة.

المرحلة الخامسة:

المصادقة على النموذج.

يلاحظ ان النموذج كفء عند استخدامه للتنبؤ على المدى القريب أما على المدى البعيد فهو ضعيف. لذا فهناك خلل في هذا النموذج اذا اريد استخدامه للتنبؤ بعدد السكان على المدى البعيد. لذا لا ننصح باستخدام هذا النموذج اذا اريد استخدامه للتنبؤ بعيد المدى.

مثال:

بوصف السنة 1947 سنة الأساس، لاتم نمو ذج
كوفاس مالثوس لعدد سكان العراق، واختبر دقته
في التنبؤ بعدد سكان العراق للسنوات 1977
1987، 1997.

Year	t	N(t)
1947	0	4.56
1957	1	6.34
1967	2	9.26
1977	3	12.17
1987	4	16.34
1997	5	22.02

الحل:

$$C = Ln\left(\frac{N(1)}{N(0)}\right)$$

$$= Ln\left(\frac{6.34}{4.56}\right) = Ln(1.3904) = 0.3296$$

(8)

(10)

$N(t) = N(0)\, e^{ct}$

$N(3) = N(0)\, e^{0.3296(3)} = 4.56(2.688) = 12.23$

$N(4) = 4.56\ (3.737) = 17.04$

$N(5) = 4.56\ (5.1966) = 23.69$

النسبة المئوية للنمو الاسي في عدد سكان العراق هي

$0.3296 * 100\% = 32.96$

خلال عشر سنوات

اي قرابة 3.3% في السنة الواحدة

مثال: نفرض ان نموذج توماس مالثوس هو النموذج المناسب لكاث القراع على الموت القريب وان نسبة النمو السكاني c تبقى ثابتة

أ. برهن على ان عدد السنوات t اللازمة كي يصبح حجم السكان k اضعاف الحجم الابتدائي $N(0)$ هو

$$t = \ln(k)/c$$

ب- يوصف السنة 1987 سنة الاساس، ففي اية سنة سوف

1- يتضاعف عدد سكان القراع؟

2- يصبح عدد سكان القراع ثلاثة امثال عدده في سنة الاساس؟

الحل:

أ-

$$\therefore N(t) = N(0)e^{ct}$$

فان t يجب ان تحقق العلاقة الآتية

$$kN(0) = N(0)e^{ct}$$

$$\therefore t = \ln(k)/c$$

ب- في المثال السابق تكون سنة الاساس 1987

$$c = \ln\left(\frac{N(1)}{N(0)}\right) = \ln\left(\frac{22.02}{16.34}\right) = \ln(1.348) = 0.3$$

وبما ان

Year	t	N(t)
1987	0	16.34
1997	1	22.02

فاذا كانت سنة الاساس 1987 فأن معلمة النمو الاسي تكون $c = 0.3$ ، كما انه عند هذه السنة يكون الدليل $t=0$

1- نعوض في المعادلة التالية عن $K=2$

$$t = \frac{\ln(2)}{0.3} = 2.3105$$

ولتحويل الدليل t الى السنة التي تقابله

$$Year = 1987 + 10\,t$$
$$= 1987 + 10(2.3105)$$
$$= 2010$$

اي اننا نتوقع في العام 2010 ان يكون عدد سكان العراق ضعف حجمه في سنة الاساس 1987 اي (32.68)