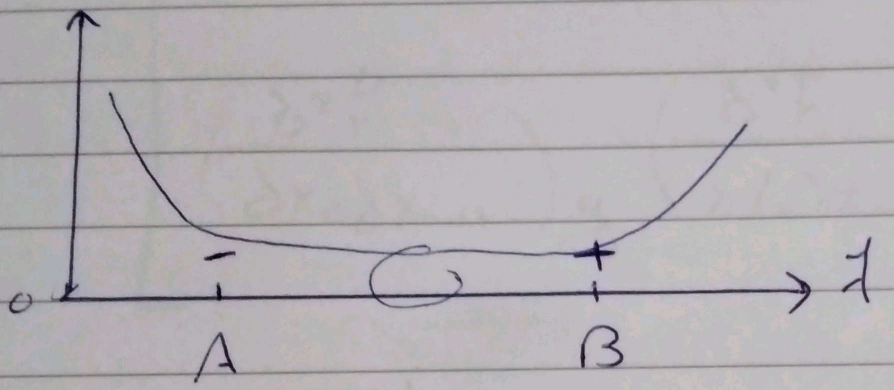
Cubic inter polation الطريقة الثانية

التكعيبي

The cubic inter polation Method find the Min. of one variable and Multi variable

The cubic equation? معادلة cubic

$$h(\lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3$$ الدالة التكعيبية



Min $f(\lambda)$ Liev between A and B

$$f(A) = a + bA + cA^2 + dA^3 \quad \text{----} \quad (1)$$

$$f(B) = a + bB + cB^2 + dB^3 \quad \text{----} \quad (2)$$

$$f'(A) = b + 2cA + 3dA^2 \quad \text{----} \quad (3)$$

$$f'(B) = b + 2cB + 3dB^2 \quad \text{----} \quad (4)$$

الاشتقاق مهم جداً يجي في آخر السنة

$$a = f_A - bA - cA^2 - dA^3 \quad \ldots (٥)$$ اشتقاق من المعادلة (1)

$$b = \frac{1}{(A-B)^3}\left(B^2 f'_A + A^2 f'_B + 2ABZ\right) \quad \ldots (٦)$$

Z : قيمة كبيرة وفرضناه Z ← مكان مقدار قيمته كبيرة مفروضنا
بدالة (Z)

$$c = \frac{1}{(A-B)^2}\left((A+B)Z + Bf'_A + Af'_B\right) \quad \ldots (٧)$$

$$d = \frac{1}{3(A-B)^2}\left(2Z + f'_A + f'_B\right) \quad \ldots (٨)$$

where:

$$Z = \frac{3(f_A - f_B)}{B - A} + f'_A + f'_B \quad \ldots (٩)$$

The necessary condition for the min:

الشرط الضروري لإيجاد المشتقة الأولى

$h(\lambda)$ given in eq $(*)$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = b + 2c\lambda + 3d\lambda^2 = 0 \quad - (*)$$

That is:

$$\bar{\lambda}^* = \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 3bd}}{3d} \quad \ldots (١٠)$$

The Application of sufficiency condition for the min of $h(\lambda)$ Leads to the valuetion:

الشرط الكافي يحتاج الى المشتقة الثانية

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \lambda^2} = 2c + 6d\lambda > 0 \quad \ldots (١١)$$

by substinting for b,c and d gives by eq (٤-٨) in eq (١٠, ١١) we obtain.

$$\lambda^* = A + \frac{f'_A + Z \mp Q}{f'_A + f'_B + 2Z}(B - A) \quad \ldots (١٢)$$

when:

$$Q = (Z^2 - f'_A * f'_B)^{1/2} \quad \ldots (١٣)$$

where:

$$Z = \frac{3(f_A - f_B)}{B - A} + f'_A + f'_B$$

$$2(B-A)(2Z + f'_A + f'_B)(f'_A + Z \mp Q) \ldots$$

$$-2(B-A)(f'_A + Z f'_B + 3Z f'_A + 2Z^2) \ldots$$

$$-2(B+A) f'_A f'_B > 0 \quad \ldots (١٦)$$

By Sepcializing eq ($\overset{5}{0}$) to (17) fo the case where A = 0

A = 0 ← نستخدم قوانين الحالة العامة عندما
بداية الفترة ....

we obtain :-

$$a = f_A \quad , \quad b = f'_A$$

$$c = \frac{-1}{B}\left(Z + f'_A\right)$$

$$d = \frac{1}{3B^2}\left(2Z + f'_A + f'_B\right)$$

$$\lambda^* = B\,\frac{f'_A + Z \mp Q}{f'_A + f'_B + 2Z} \quad \ldots\ldots (\mathrm{IV})$$

$$Q = \left(Z^2 - f'_A f'_B\right) > 0$$

$$Z = \frac{3\left(f_A - f_B\right)}{B} + f'_A + f'_B$$

نجد Q ، Z
حتى نجد λ

كيفية الحل بهذه الطريقة:-
الحل نتبع الخطوات التالية:-

1) في السؤال يعطي فترة اولية A=0 ويعطي نقطة ابتدائية (initial) (t_0) يعطي قيمة t_0 ....
نحن عندنا بداية الفترة A ولكن ليست لدينا نهاية الفترة لهذا سنقوم بمضاعفة t_0 للحصول على B ....
t_0 , $2t_0$, $4t_0$, $8t_0$, $16t_0$, ... الخ
وهنا هذه الطريقة تعتمد على المشتقة الاولى ....
فنجد المشتقة لـ (A) ونجد المشتقة لـ (t_0) .....
التحقق النقاط يكون كالآتي:-
نجد $f'A$ اذا ظلعت اشارتها موجبة فلازم $f'(t_0)$ قطعاً سالبة , واذا $f'A$ ظلعت اشارتها سالبة فلازم $f'\,t_0$ قطعاً موجبة .... اذا $f'(t_0)$ ما ظلعت موجبة اي عكس $f'A$ نضاعف (t_0) الى ان نحصل على قيمة المشتقة عكس اشارة المشتقة لـ (A) ...
نعمل جدول التالي بعد ان نحصل على [A, B] بداية الفترة ونهايتها ....

$$\left.\begin{matrix} A, & fA, & f'A \\ B, & fB, & f'B \end{matrix}\right]$$ نحتاج هذه القيم

بعد ذلك نحسب Z و φ و λ قيمة λ تطلع سالبة وموجبة نختار القيمة ذات الاشارة الموجبة لكونها واقعة ضمن الفترة [A, B] لانه اذا اخذنا سالبة راح تكبر الفترة ونحن نريد ان نصغر الفترة لحتى نحصل على الجذر....
فراح ناخذ λ ذات الاشارة الموجبة....

بعد ذلك سنجد قيمة المشتقة بالنسبة لـ (x) ← ($f'(x)$)

اذا طلعت لها حالتان :-

① اذا طلعت $f'(x)$ موجبة راح نحذف الجزء الموجب

من الفترة اي اما $f'A$ او $f'B$ ...

② اذا طلعت $f'(x)$ سالبة راح نحذف الجزء السالب

من الفترة اي اما ($f'A$) او ($f'B$) ...

وهذا اعلاه لايجاد الفترة الجديدة ....

نختبر العلاقة الاتية لنرى متى نتوقف ...

$$f'(x) < \epsilon$$

اذا اقل راح نتوقف

اذا لا، راح نكمل ....

اذا ما طى قيمة ϵ فعندما تطلع $f'(x)$ قيمتها بالاعشار يعني مثلاً (0, ...) راح نتوقف تلقائياً ....

ملاحظة :-

اذا طلعت قيمة x (القيمتين) موجبة راح ناخذ القيمة التي تقع ضمن الفترة التي بها جذر ....

واذا القيمتين تقع ضمن الفترة راح ناخذ اي واحدة بكيفنا ....

يعني مثلاً .... [0, 3.2] , [0, 2.4]

راح نختار هذه القيمة لانها تقلل من الفترة ... ⟸ [0, 1.6]

* E(x): find the Min of (اذا تعطى minimum)

$$F = \lambda^5 - 5\lambda^3 - 20\lambda + 5$$

by cubic interlation

$\lambda = 0$

$\hookrightarrow A = 0$

Solution :-

(1) $A = 0$

$f'A = 5\lambda^4 - 15\lambda^2 - 20$

$f'(0) = 0 - 0 - 20$

$\therefore f'A = -20$

اذا لم تعطي قيمة to كل نفرضها من عندنا ولازم تكون

(2) $t_0 = 0.4$ بالاشارة سالب (0,4) (0,1) (0,5) ...

$f'(t_0) = 5(0,4)^4 - 15(0,4)^2 - 20 = \boxed{-}22.272$

$f'(2t_0) = f'(2(0.4)) = f'(0,8) = \boxed{-}27,552$

$f'(4t_0) = f'(4(0,4)) = f'(1,6) = \boxed{-}25,632$

$f'(8t_0) = f'(8(0,4)) = f'(3,2) = \boxed{+}350,688$

نتوقف للاشارة موجبة لان مشتقة ال A بالسالب (A) كانت بالسالب

نعمل الجدول الآتي:

$A = 0$ $\quad f A = 5,0$ $\quad f'A = -20$

$B = 3.2$ $\quad f B = 113.0$ $\quad f'B = 350,688$

$$A < \lambda < B$$

interation ①:- التكرار الاول *

$$Z = \frac{3(5,0 - 113,0)}{3.2} - 20 + 350,688$$

$$\therefore Z = 229.588 \Rightarrow \frac{229,438}{2}$$

$$Q = \left[(229,588)^2 \overset{\text{ناقص}}{-} 20 * (350,688) \right]^{1/2}$$

$$\therefore Q = \mp 244,0 \qquad \frac{244.2}{2}$$

$$\lambda^* = 3.2 \; \frac{\overset{229,438}{-20 + 229.588} \mp \overset{244.244}{244,0}}{-20 + 350,688 + \cancel{459,176}}$$

458.876

$$\therefore \lambda^* = 1.84 \quad \text{or} \quad -0,1396$$

ناخذ الموجبة لانها واقعة ضمن الفترة ....

صارة ناخذ Q+ ومرة ناخذ Q- .....

$$\therefore \lambda^* = 1.84$$

$$f'(\lambda) > 0 \Rightarrow A = \lambda \quad \text{and} \quad f_A = f(\lambda^*)$$

$$= -41,70$$

طلعت f'(λ) سالبة ناخذ مكان السالب ، بما ان قيمة المشتقة عند

A سالبة اذاً ناخذ مكان A ....

iteration ②: التكرار الثاني : *

$A = 1.84 \quad f_A = -41.70 \quad f'_A = -13,0$

$B = 3.2 \quad f_B = 113.0 \quad f'_B = 350,688$

$$A < \lambda^* < B$$

$$Z = \frac{3(-41.7 - 113,0)}{3.2 - 1,84} - 13,0 + 350,688$$

$$\therefore Z = -3.312$$

$$Q = \left[(-3,312)^2 + (13,0)(350,688) \right]$$

$$\therefore Q = 67,3$$

$$\lambda^* = 1.84 + \frac{-13,0 - 3.312 \mp 67.5}{-13,0 + 350,688 - 6,624} (3.2 - 1.84)$$

$$\lambda^* = 2.05$$

دائماً نعوض النقاط في المشتقة لاننا نبحث عن الاصغرية.

$f'(\lambda) = f'(2,05)$ مقياس التقارب ....

$= 5,0 (2.05)^4 - 15,0 (2,05)^2 - 20$

$= 5,35$

$f'(\lambda) < \epsilon \Rightarrow 5,35 \nless \epsilon$

iteration (3): التكرار الثالث

هنا $f'(\lambda)$ موجبة لذلك نأخذ الموجب، هي B لأن $(f'B)$ موجبة ...

$A = 1.84$, $fA = -41,70$, $f'A = -13,0$

$B = 2.05$, $fB = -42,90$, $f'B = 5,35$

$$A < \lambda^* < B$$

$$Z = \frac{3,0(-41.70 + 42.90)}{(2,05 - 1.84)} - 13,00 + 5,35$$

$$\therefore Z = 9.49$$

$$Q = \left[(9.49)^2 + (13,0)(5,35) \right]^{1/2}$$

$$\therefore Q = 12,61$$

$$\lambda^* = 1,84 + \frac{-13,00 + 9,49 \mp 12.61}{-13,00 + 5,35 + 18,98}$$

$$= (2,05 - 1,84) = 2,0086$$

$$f'(\lambda) = 5,0(2,0086)^4 - 15,0(2,0086)^2 - 20$$
$$= 0.8$$

ماذا حقق السؤال بالاعتبار، اذا تجوزنا (اسئلة توجيه) مثلا ؟