الطريقة الثالثة

Quadration interpolution method

The quadration interpolution use the function values only.... تعتمد على الدالة فقط

Let:- $h(\lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2$ --- *

by the quadration function used for approximating the function $f(\lambda)$ the neccessary condition ← الشرط الضروري

so that:

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = b + 2c\lambda$$ ول الأ

لأصفر ....

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-b}{2c}$$

The Sufficient condition for the Min that So:

← الشرط الكافي

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \lambda^2} = 2c > 0$$

ن نحصل على Min لازم c تطلع موجبة

we need to evaluate to function $f(\lambda)$

at three point

نحتاج الى ثلاث نقاط لتخمين الدالة التربيعية ... a, b, c

اشتقاق القانون ...

$\lambda = A$ $\lambda = B$ $\lambda = C$

and evaluted f_A, f_B and f_C

$$\left.\begin{aligned} f_A &= a + bA + cA^2 \\ f_B &= a + bB + cB^2 \\ f_C &= a + bC + cC^2 \end{aligned}\right\} \ast\ast$$

نعوض الدالة التربيعية لـ A و B و C وصلنا لانتاج الاشتقاق

The Solution of equation $(\ast\ast)$ given :

نحقق هذه الطريقة على (a, b, c) مجهولين

(A, B, C) معلومين

احد الطرق هي حل النظام (التعويض التراجعي) على شكل مصفوفات .

المعادلات $(\ast\ast)$ تعطي النتائج الاتية :

الرتيب

$$a = \frac{F_A\, BC\, [C - B] + F_B\, CA\, (A - C) + F_C\, AB\, (B - A)}{(A - B)\,(B - C)\,(C - A)}$$

المقام ثابت للكل

الأحد

$$c = \frac{-[F(A)(B-c) + F_B(c-A) + F_c(A-B)]}{(A-B)(B-c)(c-A)}$$

بنية b لكن بدنا نربح ...

بعد a, b, c لإيجاد λ

$$\lambda^* = \frac{-b}{2c}$$

From equation of necessary condition:

$$\lambda^* = \frac{-b}{2c} = \frac{-[F_A(B^2-c^2) + F_B(c^2-A^2) + F_c(A^2-B^2)]}{-2[F_A(B-c) + F_B(c-A) + F_c(A-B)]}$$

For the case $F_A = F(\lambda=0)$ we start

A, B, C chosen $\underset{A}{0}, \underset{B}{t_0}, \underset{C}{2t_0}$ respectively

* الحالة الخاصة:

$$a = F_A$$

$$b = \frac{4F_B - 3F_A - F_c}{2t_0}$$

$$c = \frac{F_c + F_A - 2F_B}{2t_0^2}$$

$$\lambda^* = \frac{4F_B - 3F_A - F_c}{4F_B - 2F_c - 2F_A} t_0 = \frac{b}{2c}$$

* لضمان وجود جذر:-

في cubic كنا ناخذ الفترة ونضاعفها والآن نطلع عكس
إشارة النقطة الابتدائية، لكن هنا راح ناخذ النقطة
الابتدائية ثم ناخذ اللي بعدها واجباري ناخذ اللي بعدها
بدون ان نفحصها ..
فالمعادلة (5) نحلها حتى بس نتأكد ان هذه الفترة بها
جذر او احنا عمشي صحيح ...

provided that:-

$$c = \frac{F_C + F_A - F_B}{2t^2} > 0 \quad \text{---} (5)$$

The inequality (5) can be satisfied if $\frac{F_A + F_C}{2} > F_B$

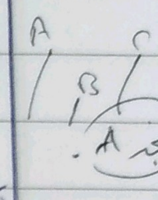
* proprties — خواص هذه الطريقة:-

1- assumming that $F_A = F(\lambda = 0)$ and intial step size (t_0) are known evalute the function f_1 at $\lambda = t_0$ and obtain $f_1 = F(\lambda = t_0)$

2- if $f_1 > f_A$ set $F_C = f_1$ and evalute function at $\lambda = \frac{t_0}{2}$

3. if $f_1 < f_A$ set $f_B = f_1$ and evalute the function F at $\lambda = 2t_0$

$F_2 = F(\lambda = 2t_0)$

4. if f_2 turn out to be grater than F_1 $F_C = f_2$ and comput λ^* → بالقانون


5. if F_2 turn out to be Smaller than f_1

$f_1 = f_2$ $t_0 = 2t_0$

and repeat step 2 to 4 until we have able to find λ^*

$B \leftarrow f_1 = f(t_0)$, $f_A = f(0)$

نحن نريد ثلاث نقاط هي A, B, C اولاً نجد f_A

ومن ثم نجد f_1 ومن ثم نضاعف $2t_0 \rightarrow f_{2t_0}$

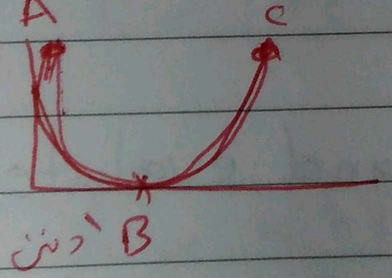
هنا لدينا حالات :-

① اذا $f_1 > f_A$ اي ان النقطة $f_1 = f_B$ اكبر من f_A

نعتبر النقطة $f_1 = f_B$ تساوي f_C اي $f_1 = f_C$

ومن ثم نجد $\lambda = \frac{t_0}{2} \rightarrow$ ونجد $f\,\frac{t_0}{2}$ لايجاد المنتصف B ...

② اذا $f_1 < f_A$ نعتبر $f_1 = f_B$ ومن ثم نجد f_C عن طريق مضاعفة $t_0 \rightarrow F_2 = f_C = f(2t_0)$



نحاول ان نجعل شكل الدالة كالآتي

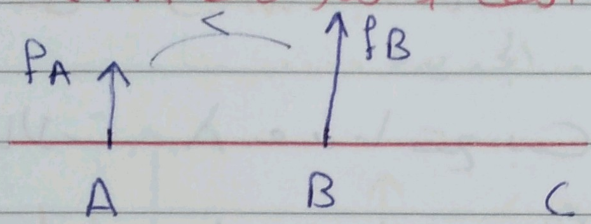
صعود نزول صعود

اذا كانت $f_2 > f_1$ نقول ان $f_2 = f_C$ ونجد λ ما عدنا مشكلة

اما اذا كانت $f_2 < f_1$ راح نقول ان $f_1 = f_2$ اي نحذف نقطة B ونعتبر نقطة C هي نقطة B ونرجع نضاعف t_0 لايجاد C $\leftarrow t_0 = 2t_0, 4t_0 \Rightarrow t_0 = 2t_0$

نرسم الحالات السابقة :

الرسم ليوضح كيفية ايجاد النقاط الثلاثة ....

① 

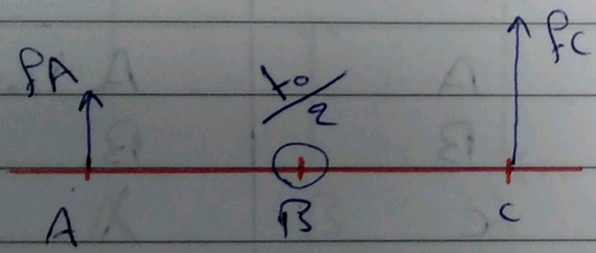
نلاحظ ان f_B أكبر من f_A

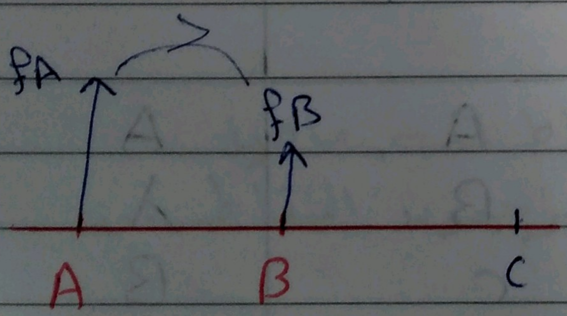
اذاً سنعتبر ان B هي عبارة عن C

و f_B هي عبارة عن f_C لان احنا بحاجة الى ان تكون C كبيرة (صعود) و B صغيرة (نزول) و A (صعود)

دائماً الاطراف تكون الى زيادة وذلك لكي نجد الجذر بينهم

وحتى نجد نقطة B سنقوم بقسمة t_0 على 2 لان B ستقع في المنتصف ⟸ $B = \frac{t_0}{2} \Rightarrow f_B = f(\frac{t_0}{2})$



② 

هنا f_A أكبر من f_B اذاً سنحسب C عن طريق $2t_0$ ⟸ $c = 2t_0$

$f_C = f(2t_0)$

لازم بعد B النزول يوجد صعود .. اذا لم يكن هناك صعود سوف نضاعف t_0 مرة ثانية وثالثة ورابعة الى ان نحصل على صعود نزول صعود بالترتيب

وهذا ما سنلاحظه في المثال ....

λ تقع اما بين A,B او B,c وهنا اربع حالات
ضمن تعويضها بالدالة

* حالات λ عندما تقع بين AB وعندما تقع بين B,c

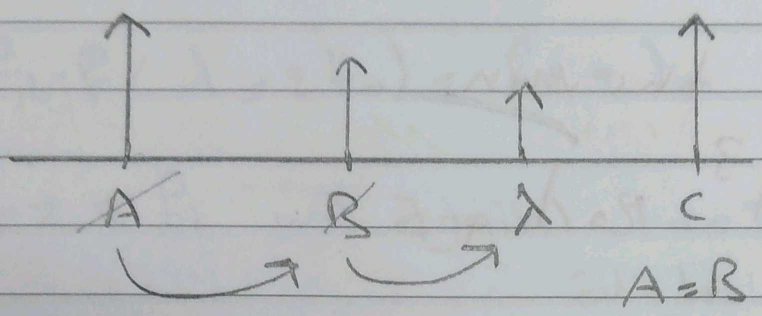
	case	charicterstic	New	old
1	$\bar{\lambda} > B$ $\bar{F} < FB$ ← اي تعويض λ في الدالة		B λ C تحذف → A	A B C
2	$\bar{\lambda} > B$ $\bar{F} > fB$		A B C تحذف → C	A B λ
3	$\bar{\lambda} < B$ $\bar{F} < fB$		A B C تحذف → C	A λ B
4	$\bar{\lambda} < B$ $\bar{F} > fB$		A B C تحذف → A	λ B C

هنا نعلم اين تقع λ هل بين A,B او بين B,C ؟

ومن خلال الدالة نعلم من يأخذ مكان من ...

واين سيحوض مكان λ .... الجديدة ...

(1)



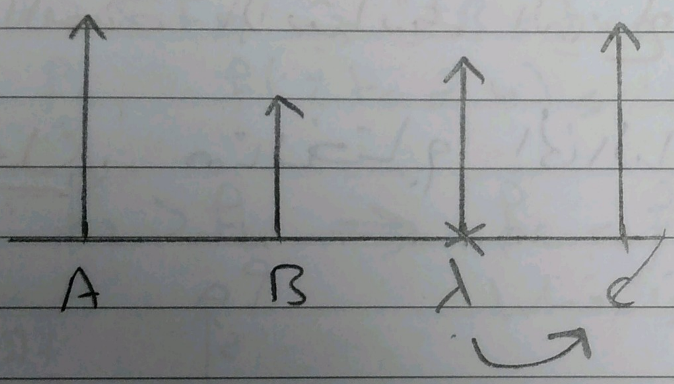
$\bar{\lambda} > B \Rightarrow$ تقع بين B,C

$\bar{F} < FB$

$A = B \,,\; B = \lambda \,,\; C = C$

$\bar{F}$: يعني قيمة λ في الدالة ......

(2)



$\bar{\lambda} > B$

$\bar{F} > FB$

$C = \lambda$

$A = A \,,\; B = B$

الحذف من الاطراف نبعد النقاط مثل ماضيا

لماذا حدث الحذف ؟ الداخل يزحمون النقاط ....

ملاحظة : لاختبار معيار التوقف هنالك معياران هما :

(1) $|f'(\lambda^*)| < \epsilon$

(2) $\left| \dfrac{h(\lambda^*) - F(\lambda^*)}{F(\lambda^*)} \right| < \epsilon$ معيار التقارب

$h(\lambda^*)$: الدالة التربيعية — الطريقة الثانية

$h(\lambda^*)$: الدالة التكعيبية — الطريقة الاولى

اما نختار المقياس الاول او الثاني
ولكن اذا طلبت بمقياس التقارب يجب ان نستخدم
القانون الثاني.

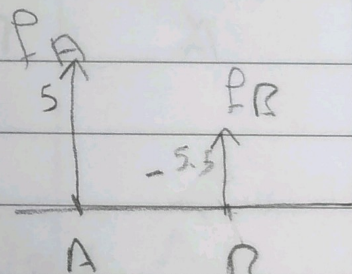
Ex:- find the min

$f = \lambda^5 - 5\lambda^3 - 20\lambda + 5$

$A = 0$, intial step $t_0 = 0.5$
(النقطة الابتدائية التي راح نضاعف عليها)

الحل:- هنا نحتاج الى الدالة فقط....

A   fA
B   fB



$f_A = f(\lambda = 0) = 5$

$f_1 = f(t_0 = 0.5) = -5.5$ نزول

$f_A > f_1 \Rightarrow f_B = f_1 = f(t_0)$

$f_2 = f(\lambda = 2t_0) = f(1) = -19.0$ نزول

اذا نزول ونزول راح نحذف f_1 وراح نعتبر ان f_2 هي f_1 ونجد f_2 جديدة مثلاً مضاعفة t_0 وهكذا... دواليك

As $f_2 < f_1$ we set $t_0 = 1$

لان على اعتبار ان $t_0 = 0.5$ فترة ما ستلة.

$f_1 = -19{,}0$ and $f_A > f_1$

التكرار الاول

$f_B = f_1 = -19{,}0$ ✗

$f_2 = f(\lambda = 2t_0) = f(2) = -43$ ✓

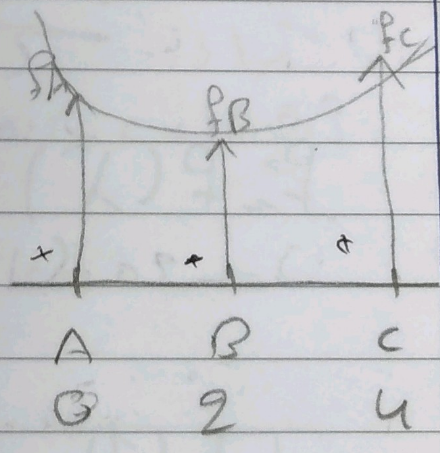
$f_2 < f_1$ we again $t_0 = 2$ بنكمل مرة
على اعتبار ان $2t_0$ فاشلة

$f_1 < f_n \Rightarrow f_B = f_1 = -43$ and
$f_2,\ f(2t_0 = 4) = +629$ صعود

$f_2 > f_1 \Rightarrow f_C = f_2 = 629$

راح ناخذها الفترة اللي قبلها...

$A = 0$	$f_A = 5$
$B = 2$	$f_B = -43$
$C = 4$	$f_C = 629$



$$\lambda^* = \frac{4(-43) - 3(5) - 629}{4(-43) - 2(629) - 2(5)}\,(t_0)$$

$$= \frac{-1632}{-1440} = 1.135$$

جميلة انت ؟

مهم

بتفهم

λ

ملاحظة // دائماً ... B هي اصغر ... الثلاث

M.n

Test :- $A = 0$ $B = 2$ $C = 4$

$f_A = 5$ $f_B = -43$ $f_C = 629$

$a = 5$

$b = -204$

$c = 90$

$h(\lambda^*) = h(1.135) = 5 - 20.4(1.135) + 90(1.132)$

$= -110.9$

$f = f(\vec{\lambda}^*) = (1.135)^5 - 5(1.135)^3 - 20(1,13) + 5,0$

$= -23.127$

$f = f(\lambda^*) = (1.135)^5 - 5(c1.135)^5 - 20(1,133) + 5.0 \ldots = 23.127$

$\left| \dfrac{h(\lambda) - f(\lambda)}{f(\lambda)} \right| = \left| \dfrac{116.5 + 23.127}{-23,127} \right|$

$= 3.8$

كبيرة

Iteration (3) التكرار الثالث

$A = 1.135$ $f_A = -23,127$ $c = -43,0$

$B = 2$ $f_B = -43,0$

$C = 4$ $f_C = 629,0$

$$\lambda^* = \frac{(-23.127)(4-Q) - (-43)(1600-1.29) + 629(1.135-20)}{2[(-23.127)(2-4) + (43,0)(1.135-2,0)]}$$

$\therefore \lambda^* = 1.661$

Test الاختبار

$a = 288,0$ $b = -417,0$ $c = 125,3$

$h(\lambda^*) = -59.7$

$f(\lambda) = -38.37$

$$\left|\frac{h(\lambda) - f(\lambda)}{f(\lambda)}\right| = \left|\frac{-59.70+38.37}{-38.37}\right|$$

$= 0.556$ نتوقف لان بالاعتبار (ان) لا تعطينا

ε