1 طرق حل المسائل لعدة متغيرات مع قيود...

Lagrange method:

نستخدم هذه الطريقة لحل مسائل الغير الخطية المقيدة (دالة هدف + قيود)...

الحالة الأولى :- المساواة ... القيود المساواة...

① problem with equality constrants

Case ① :- problem with two variables and one constrant

المسألة مع متغيرين وقيد واحد...

The problem

$$\text{Min} \quad f(x_1, x_2)$$
$$\text{s.to} \quad g(x_1, x_2) = b \; \dots ① = h$$
$$x_i \geq 0$$

where the objective function $f(x_1, x_2)$ or $g(x_1, x_2)$ or both are non-linear, The constrant function can be replaced $h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) - b$ if we went to Solve ① in this method we fromm a new function...

اما الدالة او القيد او كلاهما غير خطي لكي نستطيع ان نحلها بهذه الطريقة

$$L(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \lambda h(x_1, x_2)$$

اصبحت غير مقيدة فقط دالة هدف، ويمكن ان نحلها باحد الطرق السابقة ولكن سنتبع الحلول الاسهل الاتية

2

ملاحظة: نطبق شروط الضروري والكافي لمعادلة لاكرانج لايجاد الحلول ....

الشرط الضروري =0 نجد قيمة λ, X_1, X_2

الشرط الكافي =0 نطلع مصفوفة ومن خلالها نعرف ان الدالة اما Min او Max ....

وذلك عن طريق المحددات الصغرى ....

ملاحظة: في الكتاب يوجد عدة امثلة .... لازم ندرس الامثلة بالكتاب ... والامتحانات تكون بالامثلة اللي نعطيها هيا واجب وباقي من الامثلة بالكتاب ..

where λ is lagrange (لاكرانج) multipler (مضروب), The necessary condition for this existense of extreme point can be obtain ..

$$\frac{\partial L}{\partial X_1}=0 \;,\; \frac{\partial L}{\partial X_2}=0 \;,\; \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$$

The bove three necessary condition

$$\frac{\partial L}{\partial X_1}=\frac{\partial f}{\partial X_1}-\lambda\frac{\partial h}{\partial X_1}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_1}=\lambda\frac{\partial h}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2}=\frac{\partial f}{\partial X_2}-\lambda\frac{\partial h}{\partial X_2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial X_2}=\lambda\frac{\partial h}{\partial X_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 - h = 0 \quad \underline{or} \quad h = 0$$

لان الدالة f الجزء الاول لا توجد فيها λ اذاً المشتقة = 0
ومن ثم نشتق ونساوي الدالة بالصفر اذاً فالقيد h سيكون
مساوياً للصفر لهذا $h = 0$ $\quad h = g(x_1, x_2) = 0$

ملاحظة: λ تكون بمقدار القيود...
هنا نتعامل مع قيد واحد اي λ واحدة لان كل
λ ستكون مضروبة في قيد... فهنا قيد واحد فتكون
λ واحدة مضروبة في هذا القيد...

where $\lambda = \dfrac{\partial f}{\partial X_1} \Big/ \dfrac{\partial h}{\partial X_1}$, $i = 1,2$

The Sufficient condition for determining whether the Solution min or max of o.f involve the Solution $\underline{(n-1)}$ principal minor of the following ...

دالة الهدف

الشرط ~~الضروري~~ الكافي لكي نحدد سواء الحل او الدالة Min او Max
وذلك عن طريق المحددات الصغرى (n-1) ..... كما يلي للمصفوفة
الشرط الكافي الاتية....

تابعين للقيد

المحدد

$$D_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial h}{\partial X_1} & \dfrac{\partial h}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial h}{\partial X_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} - \lambda \dfrac{\partial^2 h}{\partial X_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} - \lambda \dfrac{\partial^2 h}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \dfrac{\partial h}{\partial X_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_1} - \lambda \dfrac{\partial^2 h}{\partial X_2 \partial X_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} - \lambda \dfrac{\partial^2 h}{\partial X_2^2} \end{bmatrix}$$

تابعين لدالة لاكرانج

المحدد

If the Signs of minor D_{n+1} alternatively + ve and - ve the stationary point local max, if all minor are negative the stationary point is local min

اذا اشارة المحدد (D_{n+1}) + , - , + , - فعندها النقطة او الدالة هي max ....

واذا اشارة المحدد كل المحددات - , - , - , - عندها الدالة سالبة اي Min

مثال :- Apply or find the Solution of N.L.P.P by using Lagrange method ....

$$Max \quad Z = 4X_1 - X_1^2 + 8X_2 - X_2^2$$

S.to

$$X_1 + X_2 = 2$$

* القيد مساواة *

$$X_i \geq 0$$

متغيرين وقيد واحد

الحل :- $L(X_1, X_2) = f(X_1, X_2) - \lambda h(X_1, X_2)$

$$= 4X_1 - X_1^2 + 8X_2 - X_2^2 - \lambda(X_1 + X_2 - 2)$$

necessary condition :-

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 4 - 2X_1 - \lambda \Rightarrow = 0 \quad ---- (i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 8 - 2X_2 - \lambda \Rightarrow = 0 \quad ---- (ii)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(X_1 + X_2 - 2) \Rightarrow = 0 \quad ---- (iii)$$

for i of ii and iii ... نعوض معادلة بأخرى ...

$x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $\lambda = 4$

sufficient condition:-

$n = 2 \Rightarrow D_{n+1} = D_3$

$$D_{n+1} = D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = +4 > 0$$

$\therefore$ Max

هنا المصفوفة متناظرة

هنا اذا ذكرت في السؤال هل الدالة Min او Max فلازم اجد necessary و sufficient حتى اجد Max و Min من المحدد.....

طريقة الحل ......

① ننتبه الى السؤال ..... فيه قيد ومساواة اذاً طريقة لاكرانج لكي نتخلص من القيد..... تكون دالة لاكرانج.....

② ننتبه الى صيغة السؤال فاما ان تكون احد الحالتين الاتية:

① يطلب في السؤال او صيغة السؤال تكون (Solve) هنا يعني ان نجد قيم $x_1, x_2 \ldots x_n$, λ فقط اي نطبق شرط الضروري فقط.

② قد تكون صيغة السؤال (optimize) يعني لازم نجد هل الدالة Min او Max اي اننا سنحتاج الى الضروري والكافي ....

③ قد تكون صيغة السؤال (minimize) يعني لازم الدالة تكون + + + موجبة ....

③ عندما نجد الشرط الضروري ننتبه الى المشتقة ان كانت خطية او تربيعية ← اذا كانت المشتقة المعادلة كانت تربيعية فلايجاد النقاط لازم يكون تعويضياً اي معادلة مكان معادلة وبدلالة الاخرى ..... لا يمكن حلها آنياً ....

(ونشتق دالة لاكرانج بالنسبة للمتغيرات الموجودة بالسؤال)

④ نساوي المشتقة بالصفر ثم نجد النقاط و λ وذلك عن طريق تعويضها ب (مشتقة لاكرانج بالنسبة ل λ) اي في $(g(x_1,x_2))$.

⑤ اذا اردنا الكافي فاننا نشتق مرة ثانية الدالة اللاكرانجية ونحصل على مصفوفة ..... حجمها $(n+1)$ اي نحصل على المحدد D_{n+1} ..... لكي اعرف ان الدالة Min او Max يجب ان اجد نتيجة المحدد D_{n+1} و D_{n-1} فقط ، لاداعي لان اجد باقي المحددات فاذا طلع + ∴ اذاً الدالة موجبة اذا طلع + ∴ اذاً الدالة سالبة Max ......

حيث ان n هي عدد المتغيرات في السؤال ....

⑥ وانتهى الحل الى هنا.....

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = h = (x_1 + x_2 = 2) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_1} = 1 , \frac{\partial h}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \lambda \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial h}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(8 - 2x_2) \Rightarrow 0 , \quad \frac{\partial}{\partial x_1}(1) \Rightarrow 0$$

وهكذا