مثال:-

Solve N.L.P.P method

$$Min\ Z = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

$$S.to \quad 4X_1 + X_2^2 + 2X_3 = 14 \Rightarrow h$$

$$X_i \geq 0$$

الحل:- نلاحظ هنا ان السؤال بدأ بـ Solve اذاً يعني انه يريد فقط النقاط ... ان نجد النقاط X_1, X_2, X_3 وبما انه يوجد قيد اذاً تكون دالة لاكرانج كالاتي

$$L(X_1, X_2, X_3, \lambda) = f(X_1, X_2, X_3) - \lambda h(X_1, X_2, X_3)$$

$$= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - \lambda(4X_1 + X_2^2 + 2X_3 - 14)$$

Necessary condition ... نجد الشرط الضروري ....

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 2X_1 - 4\lambda \Rightarrow = 0 \Rightarrow X_1 = 2\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 2X_2 - 2\lambda X_2 \Rightarrow = 0 \Rightarrow 2X_2(1-\lambda) = 0 \quad \div 2$$

$$\Rightarrow X_2(1-\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_3} = 2X_3 - 2\lambda \Rightarrow = 0 \rightarrow X_3 = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(4X_1 + X_2^2 + 2X_3 - 14) \Rightarrow = 0$$

الآن لكي اجد قيم النقاط نعوضهم في مشتقة دالة لاكرانج بالنسبة لـ (λ) .....

ملاحظة مهمة جداً هنا نجد لدينا ... $X_2(1-\lambda)=0$

فهنا لدينا احتماليت لانهم مضروبين في بعض

الاحتمال الاول نقول ان $X_2=0$ ونحل ونجد λ

الاحتمال الثاني نقول ان $1-\lambda=0$ ونحل ونجد قيمة X_2

وكالآتي ....

الاحتمال ① عندما $X_2=0$

$\Rightarrow -(4X_1+X_2^2+2X_3-14)$

$\Rightarrow -(4(2\lambda)+0+2\lambda-14)=-(8\lambda+2\lambda-14)$

$\Rightarrow -(10\lambda-14)=0 \Rightarrow -10\lambda+14=0$

$\therefore \lambda=\dfrac{-14}{-10}=1.4$

الاحتمال الثاني ② عندما $1-\lambda=0 \Rightarrow$ $\therefore \lambda=1$

عندما $\lambda=1$ فان ... $X_1=2$, $X_3=1$, $X_2=??$

$\Rightarrow -(4X_1+X_2^2+2X_3-14) \Rightarrow -(4(2)+X_2^2+2(1)-14)$

$\Rightarrow -(8+X_2^2+2-14) \Rightarrow -(-4+X_2^2)=0$

$\Rightarrow \sqrt{X_2^2}=\sqrt{4} \Rightarrow X_2=\mp 2$

بما ان الدالة Min اذاً ، سناخذ القيمة الموجبة

الآن في الاحتمال الأول نعوض عن قيمة λ بالمتغيرات ومن ثم نعوضهم بالدالة....

$$\lambda = 1.4 \Rightarrow X_1 = 2\lambda$$

$$X_1 = 2(1.4) = \underline{\underline{2.8}}$$

$$\Rightarrow X_2 = 0$$

$$\Rightarrow X_3 = \lambda = \underline{\underline{1.4}}$$

$$Z = (2.8)^2 + 0 + (1.4)^2$$

$$= 7.84 + 1.96 = \underline{\underline{9.8}}$$

اما في الاحتمال الثاني....

$$X_1 = 2 \quad , \quad X_2 = \mp 2 \quad , X_3 = 1$$

$$Z = (2)^2 + (2)^2 + (1)^2$$

$$= 4 + 4 + 1 = \underline{\underline{9}}$$

في حالة منطوق السؤال Solve نطبق شروط necessary فقط...
في حالة منطوق السؤال optimize للدالة نحتاج لشروط necessary و Sufficient لتحديد الدالة Min او Max...

Determin optimal Solution of N.L.P.P :- مثال

Min or Max ← optimize ⇒ $Z = X_1^2 - 10X_1 + X_2^2 - 6X_2 + X_3^2 - 4X_3$

s.to ⇒ $X_1 + X_2 + X_3 = 7$

$X_i \geq 0$

الحل :-

$L(X_1, X_2, X_3, \lambda) = f(X_1, X_2, X_3) - \lambda(X_1, X_1, X_7)$

$= X_1^2 - 10X_1 + X_2^2 - 6X_2 + X_3^2 - 4X_3 - \lambda(X_1 + X_2 + X_3 - 7)$

necessary condition ....

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 2X_1 - 10 - \lambda = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{10+\lambda}{2} \quad ---- *$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 2X_2 - 6 - \lambda = 0 \Rightarrow X_2 = \frac{6+\lambda}{2} \quad ---- **$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_3} = 2X_3 - 4 - \lambda = 0 \Rightarrow X_3 = \frac{4+\lambda}{2} \quad ---- ***$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = -(X_1 + X_2 + X_3 - 7) = 0$$

اعوض بقيم X_1, X_2, X_3 ←

$$\Rightarrow -\left(\frac{10+\lambda}{2} + \frac{6+\lambda}{2} + \frac{4+\lambda}{2} - 7\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{(10+6+4+\lambda+\lambda+\lambda)}{2} = -7$$

$$\Rightarrow -\frac{(20+3\lambda)}{2} = -7$$

$$\Rightarrow \frac{-20-3\lambda}{2} = -7 \Rightarrow -20-3\lambda = -14$$

$$\Rightarrow -3\lambda = -14+20 \Rightarrow \frac{\cancel{-3}\lambda}{\cancel{-3}} = \frac{6}{\cancel{-3}} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -2}}$$

$$\therefore \lambda = -2 \,,\quad X_1 = \frac{10-2}{2} = \frac{\cancel{8}}{\cancel{2}} = \underline{\underline{4}}$$

$$X_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}} = \underline{\underline{2}}$$

$$X_3 = \frac{4-2}{2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = \underline{\underline{1}}$$

$$\therefore \lambda = -2 \,,\ X_1 = 4 \,,\ X_2 = 2 \,,\ X_3 = 1$$

sufficient condition ----

$$n = 3 \,,\ n+1 = 3+1 = 4 \rightarrow D_{n+1} = \underline{D_4}$$

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} & X_1 & X_2 & X_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ X_1 \leftarrow \\ X_2 \leftarrow \\ X_3 \leftarrow \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & \frac{\partial h}{\partial X_1} & \frac{\partial h}{\partial X_2} & \frac{\partial h}{\partial X_3} \\
\frac{\partial h}{\partial X_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} - \lambda \frac{\partial^2 h}{\partial X_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} - \lambda \frac{\partial^2 h}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_3} - \lambda \frac{\partial^2 h}{\partial X_1 \partial X_3} \\
\frac{\partial h}{\partial X_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_1} - \lambda \frac{\partial^2 h}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} - \lambda \frac{\partial^2 h}{\partial X_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_3} - \lambda \frac{\partial^2 h}{\partial X_2 \partial X_3} \\
\frac{\partial h}{\partial X_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_3 \partial X_1} - \lambda \frac{\partial^2 h}{\partial X_3 \partial X_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_3 \partial X_2} - \lambda \frac{\partial^2 h}{\partial X_3 \partial X_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial X_3^2} - \lambda \frac{\partial^2 h}{\partial X_3^2}
\end{bmatrix}
\end{array}$$

للسهولة .... اشتق * بالنسبة لـ X_1 و X_3 سوف يظهر لدي
نطلع عندي الصف الثالث العمود الثاني ...
ونطلع عندي الصف الرابع العمود الثاني ...

اشتق * * بالنسبة لـ X_1 , X_3 سوف يظهر لدي
نطلع عندي الصف الثاني العمود الثالث ...
ونطلع عندي الصف الرابع والعمود الثالث ...

اشتق * ** بالنسبة لـ X_1 , X_2 سوف يظهر لدي
نطلع عندي الصف الثاني العمود الرابع ...
ونطلع عندي الصف الثالث العمود الرابع ....

$$\Rightarrow D_{n+1} = D_4 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

هنا لا اجد Min او Max اجد قيمة المحدد D_{n+1}
و D_{n-1} فقط اي D_4 و D_3
لا احتاج ان اجد D_2 , D_1 ....

$$\therefore D_4 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = 1(-1)^{4+1}|M_{41}| + 0 + 0 + 2(-1)^{4+4}|M_{44}|$$

$$= - \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right| = (0+0+2)-(0)$$

$$= \underline{\underline{-2}}$$

$$= +2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 2(0-(2+0+2))$$

$$= 2(-4) = -8$$

$$\Rightarrow -2 - 8 = \underline{\underline{-12}}$$

$$D_{n-1} = D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$3-1=2$

$\therefore D_4 = -12 \,,\, D_2 = -1 \Rightarrow$ Negative

اذاً الدالة Min ....

اذاً negative $D_2 = - \,,\, D_3 = - \,,\, D_4 = -$

Min

لتعيين الحل Min او Max نحسب المحددات (minor Det) الصغرى لـ $(n+1)$ و $(n-1)$ في حالة المثال السابق فان

$n=3 \leftarrow n+1=4 \leftarrow n-1=2$ اذاً نحسب

$D_{n+1}=D_4$ و $D_{n-1}=D_2$ ....

ودائماً نبدأ بـ D_{n+1} ومن ثم ننزل الى الدرجة الأقل D_{n-1}

1316 1318