Case (2) :- The constrained Extremal problem with more than one constrained (constant)

المشكلة لأكثر من قيد واحد وأكثر من متغير واحد....

The general N.L.P.P

$$\text{Min (max) } Z = f(x)$$

s.to

$$h_J(X) = 0 \quad ; J = 1, \ldots, m$$

$$X \geq 0 \qquad X = x_1, x_2 \ldots x_n$$

The Lagrange function can be formed as

$$L(X, \lambda) = f(x) - \sum_{J=1}^{m} \lambda_J h_J(X)$$

where λ_J is lagrange multipliers
(لاكرانج مضروب)

The function on $L(X, \lambda)$, $f(X)$, & $h_i(x)$ are partially differentiable ....

يعني ان $h_i(x)$, $f(X)$, $L(x, \lambda)$ هي دوال قابلة للاشتقاق الجزئي

The necessary condition الشرط الضروري

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad ; i = 1, \ldots, n = \text{عدد المتغيرات}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_J} = 0 \quad ; J = 1, \ldots m = \text{عدد القيود}$$

The sufficient condition for stationary point to be Min or Max Solving the principle minor · bordered ... Hession matrix ...

Hession Bordered $\longleftrightarrow$ $H^B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & P \\ \hline P^T & Q \end{array}\right]$

where :-

0 :- $m*m$ null matrix ...

P :- $m*n$ matrix of differitable of constrant . المشتقة الجزئية الاولى للقيود

P^T :- $n*m$ transporse ...

Q :- $n*n$ the matrix of second paritial dirivative of Lagrange function ... المشتقة الجزئية الثانية للاكرانج

$P \longrightarrow$ مشتقة جزئية الاولى للقيود

$Q \longrightarrow$ مشتقة جزئية ثانية للاكرانج

مصفوفة للقيود فقط

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial h_m \xrightarrow{} \text{قيد}}{\partial x_1 \xrightarrow{} \text{متغير}} & & & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

مصفوفة لاكرانج فقط

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Ex:- Solve N.L.P.P مثال :-

optimize $Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

S.to $x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$

$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$

Min or Max

$x_i \geq 0$

Solution:-

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = f(X) - \lambda_1 h_1(x) - \lambda_2 h_2(x)$$

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2)$$

$$- \lambda_2(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5)$$

The necessary condition:-

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 5\lambda_2 \Rightarrow = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda_1 + 5\lambda_2}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \Rightarrow = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2 \Rightarrow = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{3\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1 + x_2 + 3x_2 - 2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5) = 0$$

من المشتقات بالنسبة للمتغيرات نطلع $x_1 =$ $x_2 =$ $x_3 =$

ثم نرجع نعوضها في المشتقة بالنسبة لـ λ وبعد ذلك

نستطيع الحذف آنياً لانه راح تطلع معادلتين

$$\frac{\lambda_1 + 5\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{2} + \frac{3(3\lambda_1 + \lambda_2)}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + 9\lambda_1 + 5\lambda_2 + 2\lambda_2 + 3\lambda_2}{2} = 2$$

$$\Rightarrow 4 = 11\lambda_1 + 10\lambda_2 \quad --- \; *$$

$$\frac{5(\lambda_1 + 5\lambda_2)}{2} + \frac{2(\lambda_1 + 2\lambda_2)}{2} + \frac{3\lambda_1 + \lambda_2}{2} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{5\lambda_1 + 2\lambda_1 + 3\lambda_1 + 25\lambda_2 + 4\lambda_2 + \lambda_2}{2} = 5$$

$$\Rightarrow 10 = 10\lambda_1 + 30\lambda_2 \quad --- \; **$$

$\Rightarrow$ from * and **

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{4 - 10\lambda_2}{11} \Rightarrow 10 = \frac{40 - 100\lambda_2}{11} + 30\lambda_2$$

$$\Rightarrow \frac{40 - 100\lambda_2 + 330\lambda_2 - 110}{11} = 0$$

$$\Rightarrow 230\lambda_2 - 70 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{70}{230}$$

$\therefore \lambda_1 = 0.087$

$\therefore \lambda_2 = 0.304$

لتحديد الدالة Min و Max نجد H^B اذا نحتاج

O, P, P^T, Q

$O = m * m$ .... m :- عدد القيود.....

لازم H^B كلها مربعة لان نحتاج الى المحدد.....

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*2}$$

مشتقة اولى للقيد

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2*3} , \quad P^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3*2}$$

مشتقة ثانية للاكرانج

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3*3 = n*n}$$

متناظرة

$$\Rightarrow H^B = \left[\begin{array}{c|c} O & P \\ \hline P^T & Q \end{array}\right]_{(m+n)(m+n)}$$

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{5*5}$$

الآن نجد المحدد $D_4 = D_{n+1}$

$D_4 = 460$

Since The value is +ve, So The Solution is minimize...

$$Z_{min} = (0.804)^2 + (0.348)^2 + (0.287)^2$$
$$= 0.847$$

EX:- مثال

$$Z = 4X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 - 4X_1X_2$$

s.to:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 15$$
$$2X_1 - X_2 + 2X_3 = 20$$
$$X_i \geq 0$$

Solution:- الحل

$$L(X, \lambda) = 4X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 - 4X_1X_2 - \lambda_1(X_1 + X_2 + X_3 - 15)$$
$$- \lambda_2(2X_1 - X_2 + 2X_3 - 20)$$

The necessary condition:-

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 8X_1 - 4X_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 4X_2 - 4X_1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_3} = 2X_3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(X_1 + X_2 + X_3 - 15) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(2X_1 - X_2 + 2X_3 - 20) = 0$$

هنا سنحل معادلة $\frac{\partial L}{\partial X_1}$, $\frac{\partial L}{\partial X_2}$ آنياً نطلع X_1 بدلالة λ_1, λ_2 فقط ثم بعد ذلك ايضاً آنياً لنفس المعادلتين ، لكن سنحصل على X_2 بدلالة λ_1, λ_2 فقط . . . ونعوض بالمعادلة الاولى ونطلع معادلة ونعوض بالمعادلة الثالثة ونطلع معادلة ونحل المعادلتين معاً لنجد λ_1 , λ_2

$$\rightarrow X_1 = \frac{11}{3} , \quad X_2 = \frac{10}{3} , \quad X_3 = 8$$

$$\lambda_1 = \frac{40}{9} , \quad \lambda_2 = \frac{52}{9}$$

order $\Rightarrow$ $2m+1$ سعة المصفوفة

principle $\rightarrow$ $n-m \neq 1$ كم محددا جد

$m = 3 , n = 2$, $2m+1 = 2(2)+1 = 4+1 = 5$

$n-m = 3-2 = 1$

$$H^B > 0 \rightarrow Z_{min} = \frac{820}{9}$$

ملاحظة :- المصفوفة H^B هي مصفوفة ذات سعة

$(m+n) \times (m+n)$

ملاحظة :- في حالة الدالة ←

$n=3, m=2, n-m=1, 2m+1 = 5 — +n$

This mean that only one principle minor of H^B of order $\underline{5}$

① max $(-1)^{m+n} = (-1)^5 = -1$

min $(-1)^m = (-1)^2 = +ve$

$D_{n+1} = \underline{D_5}$

ملاحظة :- في الحالتين سواء أكان قيد واحد او قيدين عندنا المحددات ...

اذا اختلف اشارة المحددات هذا يعني ان الدالة Max ...

اذا تشابهت بالاشارات هذا يعني ان الدالة Min ...