## الحالة الثانية :- عدم المساواة ... المقيد اكبر او اصغر ...

② problem (N.L.P.) with inequality constraint :-

Case ① :- one inequality Constraint

المسألة مع قيد واحد غير المساواة

The generall non-linear programing problem having

$$\underline{\underline{Max}} \quad Z = f(x)$$
$$s.to \quad g(x) \leq b$$
$$X \geq 0$$

In troducing a slack variable $\underline{\underline{S}}$ in the from of $\underline{S}^2$ to ensure that it is always non-negative the constrant equation

$$h(x) + S^2 = 0$$

where $h(x) = g(x) - b \leq 0$

The problem can now to be expressed as

$$Max \quad Z = f(x)$$
$$s.to \quad h(x) + S^2 = 0$$
$$X \geq 0$$

نفرض ان S هو متغير عشوائي راكد يكون بشكل $S^2$ (مربع) وذلك لتجنب ان تكون سالبة (ذات قيمة سالبة) فيكون دائما موجبا بسبب التربيع ---

$$L(x, S, \lambda) = f(x) - \lambda(h(x) + S^2)$$ لازانغ

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -h(x) + S^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S} = -2\lambda S = 0$$

The condition $\frac{\partial L}{\partial S} = 0 \Rightarrow S = 0$ or $\lambda = 0$

if $S = 0$ ; $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ give $h(x) = 0$

Thus either $\lambda$ or $h(x) = 0$

Since $S^2$ has been taken to be non-negative slack variable $h(x) \leq 0$

$h(x) < 0 \quad \lambda = 0$

and when $\lambda > 0$ ; $h(x) = 0$

$\underset{-}{h(x) < 0} \Rightarrow \lambda = 0$

$\underset{+}{\lambda > 0} \Rightarrow h(x) = 0$

① The necessary Condition for Max

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0$$

$$\lambda h(x) = 0 \quad ; \quad h(x) \leq 0 \quad ; \quad \lambda \geq 0$$

شروط طريقة k.k.T in Max

This called kuhn - Tuker condition (k.k.T)

ملاحظة: ان هذه الطريقة k.k.T موجودة في الكتاب ومهمة في اخر السنة ويكون يأتي منها سؤال او سؤالين في اخر السنة....

② The necessary Conditional for Min

$$\text{Min } Z = f(x)$$
$$\text{s.to} \quad g(x) \geq b$$
$$x \geq 0$$

$$h(x) = g(x) - b \Rightarrow h(x) - S^2$$

$$L(x, S, \lambda) = f(x) - \lambda [\underbrace{h(x) - S^2}]$$

$g(x) - b - S^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0$$

$$\lambda h = 0 \quad ; \quad h(x) \geq 0 \quad , \quad \lambda \leq 0$$

شروط طريقة k.k.T in Min

Note that the single constrant non-linear programing the necessary condition are also the sufficient condition for ----

⇒ The Max problem when $f(x)$ concave and $h(x)$ convex

⇒ The Min problem when $f(x)$ and $h(x)$ are convex

الدالة Max عندنا $f(x)$ = سالبة و $h(x)$ = موجبة
اي مختلفين بالاشارات ...

الدالة Min عندنا $f(x)$ = موجبة و $h(x)$ = موجبة
اي متشابهة بالاشارة (موجبة) ....

EX:- $Max\ Z = 4x_1 - x_1^3 + 2x_2$ مثال :-

S.to $x_1 + x_2 \leq 1$

$x_i \geq 0$

① Apply The k.k.T condition to solution.
② Solve N.L.p.p by using Lagrange.

ملاحظة // في لاكرانج لازم تكون القيود مساواة (=) افرضنا S²
اي متغير واضيف الى القيد واحل Lagrange
بعدين آخر ان k.k.T تؤدي الى لاكرانج ....

## Solution

يوجد مساواة ← لاكرانج
لا يوجد مساواة ← K.K.T

1// K.K.T

هنا نطبق شروط K.K.T
وكل على حسب الشرط ...

① $\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0$

② $\boxed{\lambda h(x) = 0} \Rightarrow$ مهمة

③ $h(x) \leq 0$

④ $\lambda \geq 0 \Rightarrow$ Max

① $\Rightarrow i=1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_1} = 4 - 3x_1^2 - \lambda$

$\Rightarrow i=2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial h}{\partial x_2} = 2 - \lambda$

$\lambda(x_1 + x_2 - 1) = 0 \Rightarrow$ مهمة $h\lambda$

$x_1 + x_2 - 1 \leq 0$

$\lambda \geq 0$

① الاحتمال الاول عندما $\lambda=0$ ولكن نلاحظ ان في معادلة ②
نلاحظ ان $\lambda=2$ اذاً هناك احتمال كبير ان $\lambda\neq 0$ هذا
الاحتمال خاطئ.
والاحتمال الثاني نأخذ $\lambda=2$ ويوجد احتمال آخر ان
$(x_1+x_2-1)=0$ ونحل .....

الاحتمال الاول .... $\lambda=0$

$$\Rightarrow 4-3x_1^2-0=0 \Rightarrow x_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 2-0=0 \quad \times$$

$$0\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+x_2-1\right)=0 \quad \times$$

اذاً نلاحظ ان المتغيرات تحقق المعادلة ٣١ لا

$$x_1+x_2-1\leq 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}+0-1 \nleq 0$$

الاحتمال الثاني .... $\lambda=2$

$$\rightarrow 4-3x_1^2-2=0 \rightarrow x_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

نعوض عن القيم في معادلة $\lambda h$ حتى تطلع $x_2$ لان المعادلة الثانية بالنسبة لـ $x_2$ لا تحتوي على $x_2$ ....

$$\lambda(x_1+x_2-1)=0 \Rightarrow 2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+x_2-1\right)$$

$$\Rightarrow x_2=1-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

عندما نجد $\lambda$ لازم نحقق القيود

$$x_1+x_2-1\leq 0$$

والقيم كذلك

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-1\leq 0 \Rightarrow =0$$

Ex:-

مثال:-

$$Z = 10X_1 + 4X_2 - 2X_1^2 - X_2^2$$

$$2X_1 + X_2 \leq 5 \Rightarrow$$ يوجد قيد واحد
عدم المساواة K.K.T

$$X_i \geq 0$$

Solution:-

الحل:-

دائماً نكتب شرط K.K.T ونعوضهم بالسؤال ...

①
$$\frac{\partial f}{\partial X_1} - \lambda \frac{\partial h}{\partial X_1} = 0 \Rightarrow 10 - 4X_1 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} - \lambda \frac{\partial h}{\partial X_2} = 0 \Rightarrow 4 - 2X_2 - \lambda = 0$$

② $\lambda(2X_1 + X_2 - 5) = 0$

③ $2X_1 + X_2 - 5 \leq 0$

④ $\lambda \geq 0$

الاحتمال الاول :- $\lambda = 0$

$\rightarrow 10 - 4X_1 - 0 \Rightarrow X_1 = 10/4 = 5/2$

$\rightarrow 4 - 2X_2 - 0 \Rightarrow X_2 = 2$

نرى هل تحقق المعادلة

$2X_1 + X_2 - 5 \leq 0$ ?

$$2\left(\frac{5}{2}\right) + 2 - 5 \not\leq 0$$

$$2 \not\leq 0$$

∴ No fesuble Solution in This direction

لا يوجد احتمال ارحل في هذا الطريق اذا الاختيار عندما $\lambda = 0$ ...

الاحتمال الثاني :- عندما $2X_1 + X_2 - 5 = 0$

نحل حالة بدلالة الاخرى بالتعويض في الدالة $X_1$ والدالة $X_2$

لكي اجد قيم $X_1, X_2, \lambda$ ، مثل طرق الحل السابقة

$X_1 = \underline{11/6}$ , $X_2 = \underline{4/3}$ , $\lambda = \underline{4/3}$

---

$$10 - 4X_1 - 2\lambda = 0$$

$$4 - 2X_2 - \lambda = 0 \quad * 2$$

$$-8 + 4X_2 + \cancel{2\lambda} \quad \text{بالطرح}$$

$$2 - 4X_1 + 4X_2 = 0 \Rightarrow X_2 = \frac{4X_1 - 2}{4} = \frac{2(2X_1 - 1)}{\cancel{4}\,2}$$

$$\therefore X_2 = 2X_1 - 1/2 \Rightarrow 2X_1 + 2X_1 - 1/2 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4X_1 + 2X_1 - 1 - 10}{2} = 0 \Rightarrow 6X_1 - 11 = 0 \Rightarrow X_1 = 11/6$$

$$X_2 = 2(11/6) - 1/2 \Rightarrow 11/3 - 1/2 \Rightarrow 8/3 * 2 = 8/6 = 4/3$$

$$\therefore 4 - 8/3 - \lambda = 0 \Rightarrow \frac{12 - 8}{3} = \lambda \Rightarrow \therefore \lambda = 4/3$$

م.ه.و