لازم النقاط تحقق القيدين معاً

اذا احدهما تحقق اذاً لا يوجد حل

case ②:- N.L.p.p more Than one inequanlity constraint ....

المسألة لاكثر من قيد غير مساواة

$$Max \quad Z = f(x)$$

$$g_J(x) \leq b_J \quad ; \quad J = 1, \dots, m$$

m: عدد القيود

$$x \geq 0$$

$$\Rightarrow h_J(x) = g_J(x) - b \leq 0$$

$$h_J(x) + S_J^2 = 0$$

Lagrange function:-

$$L(x, S, \lambda) = f(x) - \sum_{J=1}^{m} \lambda_J \left[h_J(x) + S_J^2 \right]$$

The necessary condition

Max

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{J=1}^{m} \lambda_J \frac{\partial h_J(x)}{\partial x_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

n: عدد المتغيرات

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_J} = -\left[h_J(x) + S_J^2 \right] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_J} = -2 S_J \lambda_J$$

K.K.T. conditional for max :-

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{J=1}^{m} \lambda_J \frac{\partial h_J}{\partial x_i} = 0 \; ; \; i=1, \dots, n$$

$$\lambda_J h_J(x) = 0$$

$$h_J(x) \leq 0$$

$$\lambda_J \geq 0$$

* ملاحظة :- في حالة الدالة Min تشابه شروط الحالة في حالة القيد الواحد...

* ملاحظة :- في حالة اعطاء كلمة (optimize) لعدم ذكر Min او Max فيجب تطبيقه مصفوفة البورد (Bord) المشابهة لطريقة لاكرانج (HB) في حالة وجود عدة قيود ... وفي حالة وجود قيد واحد نطبق شروط Necessary و cofficient ونحسب المحدد (D) ...

Ex:-

مثال:-

Solve N.L.P.P

Max

$$Z = 7x_1^2 + 6x_1 + 5x_2^2$$

s.to

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 9$$

$$x_i \geq 0$$

Solution:-

الحل:-

K.K.T condition....

$$h_1(x) = x_1 + 2x_2 - 10 = 0$$

$$h_2(x) = x_1 - 3x_2 - 9 = 0$$

(1) اشتقاق بالنسبة لـ x_1

$$14x_1 + 6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

(2) اشتقاق بالنسبة لـ x_2

$$10x_2 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1(x_1 + 2x_2 - 10) = 0$$

$$\lambda_2(x_1 - 3x_2 - 9) = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0$$

$$x_1 - 3x_2 - 9 \leq 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

في حالة القيد الواحد كان لدينا λ واحدة فكنا نقول ان الاحتمال هو ان $\lambda=0$ او ان معادلة القيد $=0$ ....

لكننا هنا لدينا قيدان ولدينا λ اثنتان (λ_1 , λ_2) فنقول ان الاحتمال هنا ينحصر ضمن λ_1 و λ_2 فقط وعلى اساسها نضع الاحتمالية وحل .... كالاتي ...

الاحتمال ① $\lambda_1 = 0$ $\quad$ $\lambda_2 = 0 \rightarrow X_1, X_2$ ؟ هل تحقق الـ ام لا

الاحتمال ② $\lambda_1 \neq 0$ $\quad$ $\lambda_2 = 0 \rightarrow X_1, X_2$ ؟ هل تحقق الـ ام لا

الاحتمال ③ $\lambda_1 = 0$ $\quad$ $\lambda_2 \neq 0 \rightarrow X_1, X_2$ ؟ هل تحقق الـ ام لا

الاحتمال ④ $\lambda_1 \neq 0$ $\quad$ $\lambda_2 \neq 0 \rightarrow X_1, X_2$ ؟ هل تحقق الـ ام لا

نعوض بالمعادلات واحدة بدلالة الاخرى ونستفاد من معادلة $\lambda_1 h$, $\lambda_2 h_2$ $\leftarrow$

ملاحظة :- من المعادلات (*) استفاد منهم اني استخرج قيم X_1, X_2 و λ_1, λ_2 و ... الخ ...
لكون هذه المعادلات فيها مساواة اي $(= 0)$

اما من المعادلات (**) فاني استفاد منهم للتحقق من صحة قيم المتغيرات، عندما اجد قيم $X_1, X_2, \lambda_1, \lambda_2$ من المعادلات (*) فاني اعوض قيمهم في المعادلات (**) وارى هل تحقق القيد اولا اوالشرط ام لا ... لان المعادلات (**) هي عبارة عن متباينة اي بعيغة (≤ 0) ....

① $\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 0$

$X_1 = \dfrac{-6}{14} \quad , \quad X_2 = 0$ ⟸ اذا عوضنا هذه القيم في المعادلات
(**) المتباينة بأنها لا تحقق
٢١ لا ...

$\therefore$ No feasible Solution ...

② $\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 \neq 0$

$$14X_1 + 6 - \lambda_2 = 0$$
$$10X_2 - 3\lambda_2 = 0$$
$$X_1 - 3X_2 - 9 = 0 \implies$$ عند وجود احتمال ان $\lambda_2 \neq 0$ اذاً
يوجد احتمال ان القيد يساوي للصفر ...

$\therefore X_1 = 19/119 \qquad X_2 = -11052/357 \;,\; \lambda_1 = 0 \;,\; \lambda_2 = \dfrac{980}{119}$

$\therefore$ No feasible Solution ....

③ $\lambda_1 \neq 0 \qquad \lambda_2 = 0$

$$14X_1 + 6 - \lambda_1 = 0$$
$$10X_2 - 2\lambda_1 = 0$$
$$X_1 + 2X_2 - 10 = 0 \implies$$ عند وجود احتمال ان $\lambda_1 \neq 0$ فانه
يوجد احتمال ان القيد يساوي للصفر

$\therefore X_1 = 38/33 \;,\; X_2 = 146/35 \;,\; \lambda_1 = \cancel{730}/33 \;,\; \lambda_2 = 0$

$\therefore$ Feasible Solution يوجد حل مناسب

هنا عند الاحتمال الثالث طلع لدينا حل مناسب للدالة ولكننا نستمر بالحل ... لعله ان الاحتمال الرابع او الاخير هو افضل منه او هو ايضاً حل مناسب للدالة ...

ملاحظة :- عند وجود اكثر من حل واحد مناسب للدالة فاننا نعتمد على الدالة بعد تعويض النقاط فيها تعطي (Z)

اذا كانت Max نأخذ الحل الذي يعطي اكبر Z ...

اذا كانت Min نأخذ الحل الذي يعطي اقل Z ...

④ $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 \neq 0$

$\therefore x_1 = 48/5$, $x_2 = 1/5$, $Z = 702,92$

$\therefore$ The Solution is optimal Solution when $\lambda_1 , \lambda_2 \neq 0$

infeasible : تعني يوجد حل ولكنه غير مناسب للشروط التي لدينا ...

لا يوجد حل مناسب no feasible او infeasible

feasible : يوجد حل مناسب

مثال :-

optimize $\Longrightarrow Z = 2x_1 + 3x_2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$

$\Downarrow$ s.to

هل الدالة Min أو Max

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_i \geq 0$$

Solution:-

الحل :-

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

$$h_1(x) = x_1 + x_2 - 1$$
$$h_2(x) = 2x_1 + 3x_2 - 6$$

Before apply K.K.T it is esetiun to find either The function Min or Max

لازم بالبداية اجد الدالة Min او Max لان الشروط تختلف بالنسبة للدالة Min , Max وكذلك بالنسبة لمعرفة الحل المناسب ...

اذا كانت لدينا اكثر من قيد واحد فنكوّن H^B .....

$$O_{m \times m} = O_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{m \times n} = P_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

مشتقة الاولى للقيود

$Q_{n\times n} = Q_{3\times 3} =$ مشتقة جزئية ثانية للاكرانج

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-10}}$$

توافقت بالاشارة

$$\Rightarrow (-1)^{m+n} = (-1)^{2+3} = (-1)^5 = \underline{\underline{-1}}$$

$$\Rightarrow (-1)^m = (-1)^2 = \underline{\underline{+1}}$$

Since the $(-1)^{m+n}$ and $(-1)^m$ be +ve

∴ The function is <u>Max</u>

① اذا اختلفت الاشارات يعني Max اذا تشابهت يعني Min.

② اذا المحدد طلع سالب فهناك احتمال ان الدالة Max ...
كذلك نلاحظ انه طلع سالب وحيث $(-1)^{m+n}$ ايضاً سالبة
اذا الدالة Max ...

فبعد ان عرفنا ان الدالة Max نطبق شروط

K.K.T

K.K.T :- for Max

$$2 - 2X_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$
$$3 + 2X_2 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$$
$$+2X_3 = 0$$

$$\lambda_1(X_1 + X_2 - 1) = 0$$
$$\lambda_2(X_1 + 3X_2 - 6) = 0$$

من هذه المعادلات
اجد قيم المتغيرات
$X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2$

$$X_1 + X_2 - 1 \leq 0$$
$$2X_1 + 3X_2 - 6 \leq 0$$

اعوض عن النقاط لاتحقق
ايها تعطي الحل المناسب

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{or} \quad X_i \geq 0$$

الاحتمالات كالاتي :-

1. $\lambda_1 = 0$ $\quad\quad$ $\lambda_2 = 0$
2. $\lambda_1 = 0$ $\quad\quad$ $\lambda_2 \neq 0$
3. $\lambda_1 \neq 0$ $\quad\quad$ $\lambda_2 = 0$
4. $\lambda_1 \neq 0$ $\quad\quad$ $\lambda_2 \neq 0$

① $\lambda_1 = 0$ $\quad\quad$ $\lambda_2 = 0$

$$X_1 = 1, \quad X_2 = 3/2, \quad X_3 = 0$$

There is no Feasible Solution

② $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 \neq 0$

$x_1 = 12/13$, $x_2 = 18/13$, $x_3 = 1/13$

does not satisfy the equation $\leq$

③ $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 = 0$

$x_1 = 1/4$, $x_2 = 3/4$, $x_3 = 0$, $\lambda_1 = 3/2$

$\lambda_2 = 0$, satisfed all constrant

مو يحقق القيود ...

$Z = \frac{17/8}{2}$

نستمر ...

④ $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 \neq 0$

$x_1 = -3$, $x_2 = 4$ $x_3 = 0$

$\lambda_1 = -3.4$ $\lambda_2 = 13$

does not satisfy eq. (8)

Since only one Solution $x_1 = 1/4$
$x_2 = 3/4$
$x_3 = 0$

Max $\leftarrow Z = 17/8$