"لازم النقاط تحقق القيدين معاً"

اذا احدهما تحقق اذاً لا يوجد حل

case ②:- N.L.p.p more Than one inequanlity constraint ....

المسألة لاكثر من قيد غير مساواة

$$\text{Max } Z = f(x)$$

$$g_J(x) \leq b_J \quad ; \; J = 1, \dots, m$$

m: عدد القيود

$$X \geq 0$$

$$\Rightarrow h_J(x) = g_J(x) - b \leq 0$$

$$h_J(x) + S^2_J = 0$$

Lagrange function:-

$$L(X, S, \lambda) = f(x) - \sum_{J=1}^{m} \lambda_J \left[h_J(x) + S^2_J \right]$$

The necessary condition

Max

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{J=1}^{m} \lambda_J \frac{\partial h_J(x)}{\partial x_i} \quad ; \; i = 1, \dots, n$$

n: عدد المتغيرات

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_J} = -\left[h_J(x) + S^2_J \right] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_J} = -2 S_J \lambda_J$$

K.K.T. conditional for max :-

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} - \sum_{J=1}^{m} \lambda_J \frac{\partial h_J}{\partial X_i} = 0 \; ; i=1, \ldots, n$$

$$\lambda_J h_J(X) = 0$$

$$h_J(X) \leq 0$$

$$\lambda_J \geq 0$$

* ملاحظة :- في حالة الدالة Min تشابه شروط الحالة في حالة القيد الواحد ...

* ملاحظة :- في حالة اعطاء كلمة (optimize) لعدم ذكر Min او Max فيجب تطبيقه مصفوفة البورد (Bord) المشابهة لطريقة لاكرانج في حالة (HB) وجود عدة قيود ... وفي حالة وجود قيد واحد نطبق شروط Necessary و cofficient ونحسب المحدد (D) ...

Ex:-

مثال:

Solve N.L.P.P

Max

$$Z = 7x_1^2 + 6x_1 + 5x_2^2$$

s.to

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1 - 3x_2 \leq 9$$

$$x_i \geq 0$$

Solution:-

الحل:-

K.K.T condition...

$$h_1(x) = x_1 + 2x_2 - 10 = 0$$
$$h_2(x) = x_1 - 3x_2 - 9 = 0$$

① اشتقاق بالنسبة لـ x_1

* $14x_1 + 6 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

② اشتقاق بالنسبة لـ x_2

* $10x_2 - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$

* $\lambda_1(x_1 + 2x_2 - 10) = 0$

* $\lambda_2(x_1 - 3x_2 - 9) = 0$

** $x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0$

** $x_1 - 3x_2 - 9 \leq 0$

$$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

في حالة القيد الواحد كان لدينا λ واحدة فكنا نقول ان الاحتمال هو ان $\lambda=0$ او ان معادلة القيد $=0$ ....
ولكننا هنا لدينا قيدان ولدينا λ اثنتان (λ_1, λ_2) فنقول ان الاحتمال هنا ينحصر ضمن λ_1 و λ_2 فقط وعلى اساسها نضع الاحتمالية وكل ... كالاتي ....

الاحتمال ① $\lambda_1 = 0$ $\qquad \lambda_2 = 0 \rightarrow X_1, X_2$ هل تحقق ام لا؟

الاحتمال ② $\lambda_1 \neq 0$ $\qquad \lambda_2 = 0 \rightarrow X_1, X_2$ هل تحقق ام لا؟

الاحتمال ③ $\lambda_1 = 0$ $\qquad \lambda_2 \neq 0 \rightarrow X_1, X_2$ هل تحقق ام لا؟

الاحتمال ④ $\lambda_1 \neq 0$ $\qquad \lambda_2 \neq 0 \rightarrow X_1, X_2$ هل تحقق ام لا؟

نعوض بالمعادلات واحدة بدلالة الاخرى بالاستناد على معادلة $\lambda_1 h$, $\lambda_2 h_2 \leftarrow$

ملاحظة :- من المعادلات (*) استفاد منهم انني استخرج قيم X_1, X_2 و λ_1 و λ_2 .... الخ ...
لكون هذه المعادلات فيها مساواة اي $(=0)$

اما من المعادلات (**) فانني استفاد منهم للتحقق من صحة قيم المتغيرات عندما اجد قيم X_1, X_2, λ_1, λ_2 من المعادلات (*) فانني اعوض قيمهم في المعادلات (**) وارى هل تحقق القيد او لا او الشرط ام لا ... لان المعادلات (**) هي عبارة عن متباينة اي بعني (≤ 0) ....

① $\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 0$

$x_1 = \frac{-6}{14} \quad , \quad x_2 = 0$ ← اذا عوضنا هذه القيم في المعادلات (**) المتباينة بار لن تحقق ٢١ لا ...

$\therefore$ No feasible Solution ...

② $\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 \neq 0$

$$14x_1 + 6 - \lambda_2 = 0$$
$$10x_2 - 3\lambda_2 = 0$$
$$x_1 - 3x_2 - 9 = 0$$

$\Longrightarrow$ عند وجود احتمال ان $\lambda_2 \neq 0$ اذاً يوجد احتمال ان القيد لا مساوياً للصفر ....

$\therefore x_1 = 19/119 \qquad x_2 = -11052/357 \quad , \quad \lambda_1 = 0 \; , \; \lambda_2 = \frac{980}{119}$

$\therefore$ No feasible Solution ....

③ $\lambda_1 \neq 0 \qquad \lambda_2 = 0$

$$14x_1 + 6 - \lambda_1 = 0$$
$$10x_2 - 2\lambda_1 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - 10 = 0$$

$\Longrightarrow$ عند وجود احتمال ان $\lambda_1 \neq 0$ فانه يوجد احتمال ان القيد لا مساوياً للصفر

$\therefore x_1 = 38/33 \quad , \quad x_2 = 146/35 \quad , \quad \lambda_1 = 730/33 \; , \; \lambda_2 = 0$

$\therefore$ Feasible Solution يوجد حل مناسب

هنا عند الاحتمال الثالث طلع لدينا حل مناسب للدالة ولكننا نستمر بالحل ... لعلمًا ان الاحتمال الرابع او الاخير هو افضل منها او هو ايضاً حل مناسب للدالة ...

ملاحظة :- عند وجود اكثر من حل واحد مناسب للدالة فاننا نعتمد على الدالة بعد تعويض النقاط فيها نحن (Z)
اذا كانت Max نأخذ الحل الذي يعطي اكبر Z ...
اذا كانت Min نأخذ الحل الذي يعطي اقل Z ...

④ $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 \neq 0$

$\therefore X_1 = 48/5$, $X_2 = 1/5$, $Z = 702,92$

$\therefore$ The Solution is optimal Solution when $\lambda_1 , \lambda_2 \neq 0$

infeasible : تعني يوجد حل ولكنه غير مناسب للشرط التي لدينا ...

لا يوجد حل مناسب no feasible او infeasible

feasible : يوجد حل مناسب

هذا المثال مهم مهم مهم مهم مهم مهم مهم

Ex:- مثال:-

optimize → $Z = 2x_1 + 3x_2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$

s.to

$x_1 + x_2 \leq 1$

$2x_1 + 3x_2 \leq 6$

$x_i \geq 0$

هل الدالة Min

أو Max

Solution:- الحل:-

$f(x) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

$h_1(x) = x_1 + x_2 - 1$

$h_2(x) = 2x_1 + 3x_2 - 6$

Before apply k.k.T it is esetiun to find either The function Min or Max

لازم بالبداية اجد الدالة Min او Max لان الشروط تختلف بالنسبة للدالة Min, Max وكذلك بالنسبة لمعرفة الحل المناسب ..

اذا عالدالة لدينا اكثر من قيد واحد فنكوّن H^B ....

$$O_{m \times m} = O_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مشتقة الاولى للقيود

$$P_{m \times n} = P_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$Q_{n*n} = Q_{3*3} =$ مشتقة جزئية ثانية للاكرانج

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$H^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-10}}$$

توافقت بالاشارة

$\Rightarrow (-1)^{m+n} = (-1)^{2+3} = (-1)^5 = \underline{\underline{-1}}.$

$\Rightarrow (-1)^m = (-1)^2 = \underline{\underline{+1}}$

Since the $(-1)^{m+n}$ and $(-1)^m$ be +ve

$\therefore$ The function is <u>Max</u>

① اذا اختلفت الاشارات يعني Max اذا تشابهت يعني Min.

② اذا المحدد طلع سالب هناك احتمال ان الدالة Max ...

كذلك نلاحظ انه طلع سالب وقيمة $(-1)^{m+n}$ ايضاً سالبة

اذا الدالة Max ...

فبعد ان عرفنا ان الدالة Max نطبق شروط

K.K.T

K.K.T :- for Max

$$2 - 2X_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$
$$3 + 2X_2 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$$
$$+2X_3 = 0$$

$$\lambda_1(X_1 + X_2 - 1) = 0$$
$$\lambda_2(X_1 + 3X_2 - 6) = 0$$

من هذه المعادلات
اجد قيم المتغيرات
$X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2$

$$X_1 + X_2 - 1 \leq 0$$
$$2X_1 + 3X_2 - 6 \leq 0$$

اعوض عن النقاط لاتحقق
ايها تعطي الحل المناسب

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{or} \quad X_i \geq 0$$

الاحتمالات كالاتي :-

1. $\lambda_1 = 0$ $\quad\quad$ $\lambda_2 = 0$
2. $\lambda_1 = 0$ $\quad\quad$ $\lambda_2 \neq 0$
3. $\lambda_1 \neq 0$ $\quad\quad$ $\lambda_2 = 0$
4. $\lambda_1 \neq 0$ $\quad\quad$ $\lambda_2 \neq 0$

① $\lambda_1 = 0$ $\quad\quad$ $\lambda_2 = 0$

$$X_1 = 1 \;,\; X_2 = 3/2 \;,\; X_3 = 0$$

There is no feasible solution

② $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 \neq 0$

$X_1 = 12/13$, $X_2 = 18/13$, $X_3 = 1/13$

does not satisfy the equation $\leq$

③ $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 = 0$

$X_1 = 1/4$, $X_2 = 3/4$, $X_3 = 0$, $\lambda_1 = 3/2$

$\lambda_2 = 0$, satisfed all constrant

هو يحقق القيود ....

$\underline{Z = 17/8}$

نستمر ...

④ $\lambda_1 \neq 0$ $\lambda_2 \neq 0$

$X_1 = -3$, $X_2 = 4$ $X_3 = 0$

$\lambda_1 = -3.4$ $\lambda_2 = 13$

does not satisfy eq. (8)

Since only one Solution $X_1 = 1/4$
$X_2 = 3/4$
$X_3 = 0$

Max $\leftarrow Z = 17/8$