3 . 3 طريقة التفريع والتحديد(*):

استعملت هذه الطريقة لأول مرة في سنة 1960 من طرف الباحثين (A. Land و G. Doig) لحل البرامج الخطية بشرط الاعداد الصحيحة، وبعدها استعملت من طرف E. Balas في سنة 1965 بتطويره للخوارزمية التجميعية لحل البرامج الخطية بالمتغيرات الثنائية (Binaire)[6]. وتعتمد هذه الطريقة مثل الطريقة السابقة في البحث عن حل أمثل عددي صحيح انطلاقا من الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الموافق (أي دون شرط العدد الصحيح)، فإذا كانت قيم المتغيرات عند هذا الحل أعداد صحيحة فهو نفسه الحل الأمثل الذي نبحث عنه، و في حالة العكس نقوم بالخطوات التالية[7]:

ليكن x_h أحد متغيرات النموذج التي كان من المفترض أن تكون قيمتها عدد صحيح في الحل الأمثل، ولكن جاءت على شكل عدد كسري ، نرمز لجزئه الكسري بالرمز $[x_h]$ هذا يعني أن :

$$[x_h] \leq x_h \leq [x_h]+1$$

وتجدر الاشارة هنا الى أن هذا المجال لا يحتوي على أي قيمة ذات عدد صحيح إلا القيم $[x_h]$ و $[x_h]+1$ لأن x_h محصور بين عددين صحيحين متتاليين، وهذا يعني أنه حتى يكون x_h عدد صحيح يجب أن يكون:

إما: $x_h \leq [x_h]$

أو : $x_h \geq [x_h]+1$

إذن نستطيع الآن فصل النموذج السابق إلى نموذجين جديدين حيث يحتوي كل نموذج على أحد هذين القيدين (ومتنافيين لأن القيدين الجديدين متنافيين حل أحدهما يستحيل أن يكون حلا للآخر)، وتعد هذه الطريقة مثل الطريقة السابقة كونها تعمل على حذف عدد من الحلول ذات الأعداد غير الصحيحة في منطقة الحلول الممكنة، وهذا بتحديد مستقيمات عمودية أو أفقية تشمل نقاط حلول أعداد صحيحة. والفرق بين الطريقتين يكمن في أن طريقة القطع تعمل على تحديد قيود تأخذ شكل قيود في عدة اتجاهات، بينما طريقة التحديد والتفريع تعمل على تحديد قيود موازية لأحد محاور المعلم باستعمال أحد متغيرات البرنامج.

وتقوم هذه الطريقة على حل كل نموذج على حدى بطريقة *Simplex* مثلا متجاهلين الأخذ بشرط العدد الصحيح، فإذا حصلنا في أحدهما على حل عددي صحيح نأخذه كحل أمثل لهذا النموذج الجزئي

ونواصل العمل على النموذج الجزئي الآخر حيث نأخذ متغير كسري كان من المفترض أن يكون عدد صحيح نكرر العملية من جديد ونستخدمه لفصل هذا النموذج الجزئي إلى نموذجين آخرين، فإذا حصلنا في أحد هذين النموذجين عل حل عددي أفضل من الحل العددي السابق نعتمده كحل امثل بدل الحل السابق و نتوقف عنده، ثم نأخذ النموذج الآخر و نواصل العملية إلى أن تكون حلول كل النماذج الجزئية أعداد صحيحة و نأخذ كحل أمثل أفضل حل.

وتتم عملية الاختيار للمتغير الذي يتم من أجله تفريع النموذج الاصلي الى نموذجين فرعيين على اساس المتغير الذي يحمل أكبر عدد بعد الفاصلة كونه المتغير الذي يسهل عملية التقريب الى الحل العددي الصحيح، أما إذا كانت القيم الكسرية متساوية بالنسبة لكل المتغيرات فهنا نعود الى دالة الهدف واختيار المتغير الذي يحمل أكبر معامل في دالة الهدف.

ولتوضيح طريقة التفريع والتحديد نأخذ نفس البرنامج المعطى المثال 2-1:

$$Max \quad Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$S/C \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \ Entier \end{cases} \qquad (2-2)$$

الخطوة الأولى (التفريع):

بحل البرنامج بطريقة السمبلكس بدون الأخذ في عين الاعتبار شرط العدد الصحيح، توصلنا الى الحل الأمثل التالي: $x_1 = 34/13 \, , x_2 = 45/13 \, , Z = 282/13$

وبما أن هذا الحل المتوصل اليه لا يحترم شرط الأعداد الصحيحة للمتغيرات، نبحث في تحسينه من خلال اختيار المتغير الذي تكون قيمته عند الحل الامثل تحمل أكبر عدد بعد الفاصلة أي أكبر كسر، من أجل القيام بتفريع البرنامج الى برنامجين فرعيين، وفي هذه الحالة لدينا قيمة $x_1 = 34/13 = 2 + 8/13$ و $x_2 = 45/13 = 39 + 6/13$ وبالتالي نختار المتغير x_1 كونه يحمل أكبر عدد بعد الفاصلة. ويكون عندئذ التعبير عن شرط الاعداد الصحيحة للمتغير x_1 بقيدين هما(*):

$$x_1 \leq 2 \qquad (1)$$

$$x_1 \geq 3 \qquad (2) \text{ و}$$

وبالاستعانة بهذين القيدين نقوم بتشكيل النموذجين الجزئيين كما يلي:

النموذج الجزئي الأول

$$Max\quad Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$S/C\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ x_1 \qquad \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2\ Entier \end{cases} \qquad (7-2)$$

النموذج الجزئي الثاني

$$Max\quad Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$S/C\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ x_1 \qquad \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2\ Entier \end{cases} \qquad (6-2)$$

وتقوم هذه الطريقة على حل البرنامجين كل على حدي بطريقة السمبلكس وتحديد الحل الأمثل لكل منهما،

الخطوة الثانية التحديد أو التقييم:

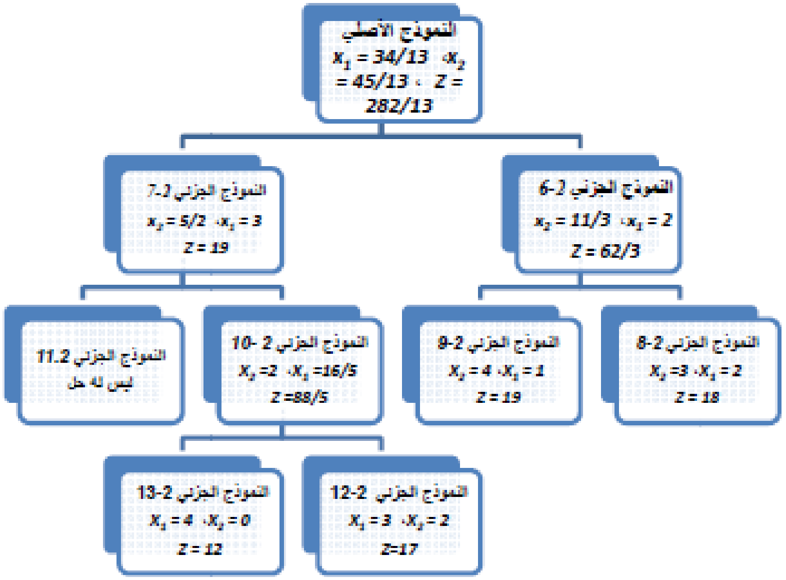
في هذه المرحلة نقوم بتقييم الحل المتوصل إليه، فإن كان حل عددي صحيح نرشحه ليكون حل أمثل للبرنامج الاصلى. وفي حالة العكس نقوم بتفريع البرنامج الجزئي بنفس الطريقة السابقة.

وبحل البرنامج الجزئي الأول (6−2) تحصلنا على الحل التالي: $x_1 = 2\,, x_2 = 11/3\,, Z = 62/3$

بينما حل البرنامج الجزئي الاني (7−2)، تحصلنا على الحل التالي: $x_1 = 3\,, x_2 = 5/2\,, Z = 19$

وفي كلتا الحالتين لم يتم بعد الوصول الى الحل الامثل العددي الصحيح بالرغم من أن قيمة $x1$ في كلا النموذجية عبارة عن عدد صحيح، إلا أنه تبقى قيمة المتغير x_2 عبارة عن كسر، مما يستدعي تفريع النموذجين الجزئيين من جديد. ومن أجل توضيح عملية البحث بطريقة سهلة نقوم بتمثيل عملية البحث عن الحل الأمثل العددي الصحيح على شكل شجرة قرار على الشكل التالي:

الشكل رقم (2−4): التمثيل البياني لخطوات الحل بطريقة التفريع والتحديد للبرنامج (2−2)



إن البحث عن الحل الأمثل عبر فروع هذه الشجرة يتوقف عند توفر أحد الشروط التالية:

- النموذج الجزئي لهذا الفرع ليس له حل كما هو الحال في النموذج الجزئي 2−11

- النموذج الجزئي لهذا الفرع يقبل حل عددي صحيح كما هو الحال في النماذج 2−8، 2−9، 2−12، 2−13.

- في حالة نموذج تعظيم قيمة دالة الهدف للنموذج الجزئي لهذا الفرع أقل أو يساوي من قيمة دالة الهدف لأي فرع آخر يحتوي على حل أمثل عددي صحيح (كما هو الحل للنموذج الجزئي 10.2 أقل من النموذج الجزئي 2−9 لذلك يجب أن نتوقف عند هذا الفرع) ونحن قد واصلنا الحل فقط للتوضيح أكثر لطريقة التفريع، أما في حالة التدنية فالعكس أي أننا نتوقف لما تكون قيمة دالة الهدف لهذا الفرع أكبر أو يساوي قيمتها في فرع آخر.

أما عملية تحديد الحل الأمثل وفق هذه الطريقة فتكون باختيار أحسن حل عددي صحيح من الحلول المرشحة في النماذج 2−8، 2−9، 2−12، 2−13، وينصب الاختيار هنا على حل النموذج 2−9 الذي يحقق أكبر قيمة لدالة الهدف وهي 19 وحدة، وهذا الحل هو نفسه الحل المتوصل اليه بالطرق السابقة.

4. برمجة الاعداد الصحيحة بالمتغيرات الثنائية:

في كثير من الحالات تستدعي صياغة البرامج الخطية استعمال نوع خاص من المتغيرات يختلف عن المتغيرات المستعملة سابقا في شكل متغيرات كمية (تعبر عن كميات بوحدات قياس معينة)، ويتعلق الامر بمتغيرات ثنائية تأخذ قيمتين 0 و 1، ومن بين أهم المجالات التي تستعمل فيها هذه المتغيرات نجد مشاكل اختيار المشاريع. بحيث يأخذ المتغير القيمة 1 في حالة اختيار المشروع والقيمة 0 في حالة عدم اختيار المشروع. كما يتمكن استعمال هذه المتغيرات لصياغة العديد من المسائل نذكر بعض الحالات في ما يلي:

أ. حالة اختيار K قيد من بين m قيد يمكن ترجمتها رياضيا بسهولة وذلك بالاستعانة بالمتغيرات الثنائية Y_i كما يلي :

. $Y_i = 0$: إذا تم اختيار القيد i .

. $Y_i = 1$: إذا تم رفض القيد i .

ولتفادي ظهور المتغيرات الثنائية في الحل النهائي للبرنامج نقوم بصياغة القيود المعدلة باستعمال المعامل M الذي يأخذ أكبر قيمة عددية كما يلي :

$$f_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \le b_i + MY_i \quad ; \quad i = 1, \dots, m$$

$$Y_1 + Y_2 + \dots\dots Y_m = m - K$$

ب. في قيد معين لو كنا بصدد اختيار قيمة معينة للطرف الأيمن لهذا القيد (b_i) من بين عدة قيم و لتكن l قيمة مختلفة:

$$f(X_1 , X_2 ,...., X_n) \leq b_1 , b_2 ,..., \text{ أو } b_l$$

و دائما بالاستعانة بالمتغيرات الثنائية Y_i عددها l ($i=1,..,l$) كما يلي:

. $Y_i = 1$: الطرف الأيمن للقيد i هو b_i.

. $Y_i = 0$: الطرف الأيمن للقيد i هو قيمة أخرى.

يمكن الآن ترجمة الاختيار رياضيا كما يلي :

$$f(X_1, X_2,..., X_n) \leq \sum_{i=1}^{l} b_i Y_i$$

$$Y_1+Y_2+.........+Y_l = 1$$

جـ. إن عملية اتخاذ قرارات إنجاز استثمارات معينة من عدمها تعتبر أفضل الحالات التي يتم فيها الاستعانة بنماذج برمجة الأعداد الصحيحة و مثلما فعلنا سابقا سوف نحتاج إلى المتغيرات الثنائية عددها بعدد الاستثمارات المراد إنجازها كما يلي :

. $Y_i = 1$: إنجاز الاستثمار رقم i .

. $Y_i = 0$: عدم إنجاز الاستثمار i .

جـ.1. لا نستطيع إنجاز أكثر من K من بين m استثمار مقترح، و نترجم هذا رياضيا كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i \leq K$$

جـ.2. لا يتم إنجاز الاستثمار 4 مثلا إذا لم يتم إنجاز الاستثمار 3، رياضيا نكتب :

$$Y_4 \leq Y_3$$

جـ.3. الاستثمار 3 و الاستثمار 4 متنافيين , أي أنه إذا تم إنجاز الاستثمار 3 فلن ينجز الاستثمار 4 والعكس، نكتب :

$$Y_3+Y_4 \leq 1$$

ج.4. الاستثمار 5 لا ينجز إلا إذا أنجز أحد الاستثمارين 3 أو 4 ، نكتب رياضيا :

$$Y_5 \leq Y_3+Y_4$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Max \quad Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$S/C\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 11 \\ 7x_1 + x_2 \le 21 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \ Entier \end{cases} \qquad (14-2)$$

المطلوب :

حل هذا البرنامج بطريقة المستوى القاطع ثم بطريقة التفريع والتحديد.

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Max \quad Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$S/C \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 \leq \frac{5}{4} \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \; Entier \end{cases} \qquad (15-2)$$

المطلوب :

أ) حل هذا النموذج باستخدام طريقة المستوي القاطع. ماذا تلاحظ ؟