1.2 الطريقة البيانية لحل نموذج برمجة الأعداد الصحيحة :

من أجل توضيح طريقة الحل البيانية لهذا النوع من النماذج سوف نستعين بالمثال التالي و هو نموذج برمجة أعداد صحيحة:

مثال 2−1:

$$Max\ \ Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$S/C\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2\ Entier \end{cases} \qquad (2-2)$$

والمطلوب: تحديد الحل الأمثل للبرنامج بالطريقة البيانية

تعتد الطريقة البيانية لحل هذا النوع من البرامج على تحديد الحل الأمثل للبرنامج وفق الطريقة المتبعة لحل نماذج البرمجة الخطية (أي دون الأخذ بعين الاعتبار الشرط الأخير في البرنامج أعلاه)، فإذا كانت قيم المتغيرات الأساسية للنموذج في الحل الأمثل أعداد صحيحة فهو أيضا حل أمثل لنموذج برمجة الأعداد الصحيحة. بينما في حالة ما كان الحل المتوصل إليه يحتوي على أعداد غير صحيحة، فإنه يجب ادخال تقنيات جديدة لتحسين الحل والبحث عن الحل العددي الصحيح للبرنامج.

أولا تحديد الحل الامثل للبرنامج دون الاخذ بعين الاعتبار شرط الاعداد الصحيحة:

في هذه المرحلة يتم اعداد التمثيل البياني لحل البرنامج كما يلي:

– قيود البرنامج: من القيد الاول يتم تحديد نقطتين لتمثيله بيانيا وهي:

$$x_1 + 3x_2 = 13 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 13/3 \\ x_2 = 0, x_1 = 13 \end{cases} \Rightarrow ct_1(13, {}^{13}\!/_{3})$$

اذن القيد الأول للبرنامج يتحدد بالربط بين النقطتين: $A(0, {}^{13}\!/_{3})$ و $B(13,0)$.

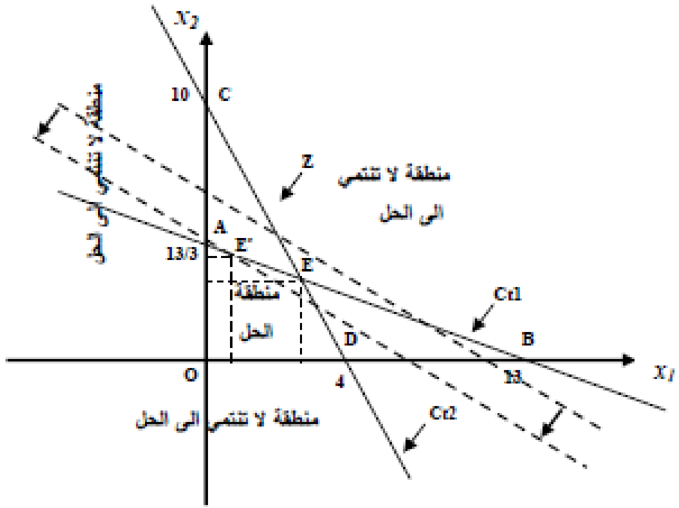
وكذلك الامر بالنسبة للقيد الثاني:

$$5x_1 + 2x_2 = 20 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 20/2 = 10 \\ x_2 = 0, x_1 = 20/5 = 4 \end{cases} \Rightarrow ct_1(4,10)$$

اذن القيد الثاني للبرنامج يتحدد بين النقطين: $C(0,10)$ و $D(4,0)$.

وبتمثيل القيدين في معلم متعامد ومتجانس نحصل على الشكل التالي:

الشكل رقم (2-1): التمثيل البياني لحل البرنامج (2-2)



من خلال الشكل يظهر ان المساحة OAED هي مساحة الحلول الممكنة غير المشروطة بأن تكون اعداد صحيحة، ونقطة الحل الامثل هي النقطة E وهي نقطة تقاطع مستقيمي قيود البرنامج ct1 وct2، والتي تقدر فيها القيم التالية: $x_1^* = 34/13, \ x_2^* = 45/13, \ Z^* = 282/13$

و قد يعمد البعض إلى تقريب هذه القيم إلى عدد صحيح ليتحصل على حل أمثل ذو أعداد صحيحة مقبول وهو : $x_1 = 2, \ x_2 = 3, \ Z = 18$، لكن هذا ليس مجديا لأن هذا الحل ليس امثل ويوجد أحل احسن منه، ويتم تحديد من خلال عملية ازاحة مستقيم (خط) دالة الهدف نحو الأسفل كون الهدف هو تدنئة Z، ويكون الحل الأمثل عند أول نقطة ذات احداثيات صحيحة لـ x_1 وx_2، وفي هذه الحالة تكون عند النقطة $E'(1,4)$، فيكون الحل الامثل للبرنامج هو: $x_1 = 1, \ x_2 = 4, \ Z = 19$ ونسمي عندئذ النقطة بالحل الأمثل العددي الصحيح للبرنامج.

ملاحظة : نلاحظ أن قيمة دالة الهدف لنموذج برمجة أعداد صحيحة دائما أقل أو يساوي من قيمة دالة الهدف لنموذج البرمجة الخطية المقابل له.

و باستخدام طريقة *Simplex* نحصل على الحل الأمثل بعد ثلاث خطوات (اعداد ثلاث جداول)، والحل الأمثل للبرنامج يكون في الجدول الموالي:

الجدول (2–1): جدول الحل الأمثل للبرنامج (2–2)

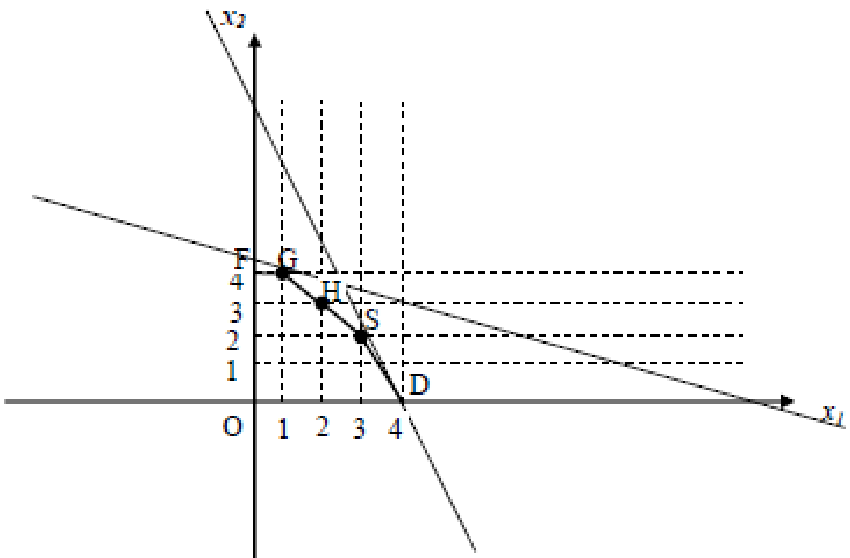
		x_1	x_2	S_1	S_2	
Vb	**Cj**	3	4	0	0	b_i
x_2	4	1	0	15/39	-1/13	45/13
x_1	3	0	1	-2/13	3/13	34/13
Zj		3	4	42/39	5/13	Z*=282/13
Cj-Zj		0	0	-42/39	-5/13	

في الحقيقة إن الحل بالطريقة البيانية لهذا النوع من النماذج يعتبر أفضل وأسهل الحلول، و لكن بمجرد أن يتجاوز عدد متغيرات النموذج متغيرين تصبح غير قابلة للتطبيق و نضطر إلى اللجوء إلى طرق أخرى للحل وهي تتمثل في استعمال الطريقة الرياضية وفق قواعد السمبلكس بالاستعانة ببعض التقنيات والتي نتطرق اليها فيما يلي:

2.2 طريقة المستوي القاطع لجوموري (*GOMORY*)[5]:

سنحاول أولا فهم مبدأ هذه الطريقة هندسيا من خلال الشكل (2–3)، فبينما كانت مساحة الحل في الشكل رقم (2–2) تتمثل في المنطقة OAED وهي منطقة الحلول الممكنة لنموذج البرمجة الخطية الموافق (دون شرط العدد الصحيح)، والحل الأمثل هو أحد الحلول التي تقع على قمم هذا المضلع، ومن بين هذه القمم نلاحظ أن النقطتين *O* و *D* فقط تمثل حل ذو أعداد صحيحة.

الشكل (2–3): التمثيل البياني لحل البرنامج (2–2)



فرضا لو قمنا بإنشاء مضلع آخر داخل المضلع السابق (OAED) بحيث يحتوي على كل الحلول ذات الأعداد الصحيحة و ليكن المضلع ($OFGED$)، هذا يعني أنه يمكن إيجاد حل أمثل لنموذج برمجة أعداد صحيحة باستخدام طريقة *Simplex* فقط بإضافة القيود الضرورية التي تعبر عن حدود المضلع الجديد، وهي القيود ذات المستقيمات الجديدة ED، GE، FG، والنموذج المتحصل عليه يتمتع بالخاصيتين التاليتين :

أ. كل حل ممكن ذو أعداد صحيحة للنموذج الخطي الموافق هو أيضا حل ممكن لنموذج برمجة الأعداد الصحيحة.

ب. كل قمم مضلع الحلول لنموذج برمجة الأعداد الصحيحة هي حلول ذات أعداد صحيحة ممكنة.

نستنتج من هاتين الخاصيتين أن الحل الأمثل لنموذج برمجة أعداد صحيحة هو حل أمثل ذو أعداد صحيحة لنموذج البرمجة الخطية الموافق.

عمليا ليس من السهل إنشاء المضلع الذي يحتوي على كل الحلول العددية الصحيحة في نماذج تحتوي على عدد كبير من المتغيرات ، فالطريقة السابقة تعمل على إنشاء قيد جديد (أو مستوي قاطع) انطلاقا من الحل الأمثل الأساسي (الذي لا يحتوي على أعداد صحيحة)، ثم حل النموذج المتحصل عليه بطريقة *Simplex*، وهكذا نكرر العملية إلى حين الحصول في الحل الأمثل على كل القيم العددية الصحيحة التي نحتاجها، وهذا يعني أننا بحاجة إلى عدة مستويات قاطعة تتمتع بالخصائص التالية:

أ. تخفض عدد الحلول الممكنة لنموذج البرمجة الخطية الموافق.

ب. مستقيمات القيود الإضافية تمر عبر حلول عددية صحيحة ممكنة.

ج. منطقة الحلول الممكنة تشمل جميع الحلول العددية الصحيحة لنموذج البرمجة الخطية الموافق.

د. بعد عدة مراحل متدرجة من تطبيق المستويات القاطعة نحصل في الأخير على نموذج يحتوي على حل أمثل عددي صحيح.

إذن بقي لنا الآن معرفة كيفية التوصل إلى العبارة الرياضية للقيود الإضافية، و للقيام بذلك سوف نستعين بالمثال السابق و لنأخذ الحل الأمثل الجدول (2−1)، سوف نقوم بإنشاء أول قيد إضافي من خلال شكل أحد القيود في الحل الأمثل و ذلك كما يلي :

أولا نقوم باختيار المتغير القاعدي الذي قيمته في الحل الأمثل تحتوي على أكبر جزء كسري و ليكن X_1، و القيد المتعلق بهذا المتغير في الحل الأمثل هو :

$$x_1 + 0x_2 - (1/13)s_1 + (3/13)s_2 = 34/13$$

ملاحظة : نسمي الجزء الصحيح لعدد حقيقي هو أكبر عدد صحيح أقل أو يساوي هذا العدد، فمثلا الجزء الصحيح للعدد 3.8 هو 3، 7.3- هو 8- وهكذا مع كل عدد حقيقي، و نسمي الجزء الكسري لعدد حقيقي الفرق بين هذا العدد و جزئه الصحيح، فمثلا الجزء الكسري للعدد 3.8 هو $0.8 = 3 - 3.8$ و للعدد 7.3- هو $0.7 = (-8) - 7.3 -$ ، و هذا يعني أن الجزء الكسري يكون دائما موجب.

نقوم بفصل كل معامل من معاملات هذا القيد إلى جزء صحيح و جزء كسري كما يلي:

$$x_1+(-1+11/13)s_1+(0+3/13)s_2=(2+3/13)$$
$$\Rightarrow x_1=(-1+11/13)s_1+(0+3/13)s_2+(2+3/13)$$

الآن نقوم بفصل الأجزاء الصحيحة عن الأجزاء الكسرية كما يلي:

$$x_1=(S_1+0S_2+2)+(-11/13s_1-3/13s_2+8/13)$$

إذن من أجل حل عددي صحيح الحد $(S_1+0\ S_2+2)$ سوف يكون عدد صحيح، و منه إذا أردنا أن يكون x_1 عدد صحيح يجب أن يكون الحد الثاني $(-11/13\ S_1 - 3/13\ S_2+8/13)$ عبارة عن عدد صحيح ، هنا نلاحظ أن العدد $(8/13)$ هو عدد موجب أقل من الواحد والعبارة $(-11/13\ S_1 - 3/13\ S_2)$ هي عدد سالب، فإذا كانت العبارة $(-11/13\ S_1 - 3/13\ S_2+8/13)$ هي عدد موجب فحتما سوف تكون عدد كسري أقل من الواحد وبالتالي يستحيل أن تكون عدد صحيح، لذلك فإذا أردنا أن تكون هذه العبارة عدد صحيح فلدينا حظ أوفر لو جعلناها سالبة أي :

$$-11/13\ S_1 - 3/13\ S_2+8/13 \leq 0$$

بهذه الطريقة نكون قد حددنا أول مستوي قاطع وقبل إدخالها كقيد في النموذج الجديد يجب تعويض المتغيرات الإضافية بالمتغيرات الحقيقية للنموذج، لدينا من النموذج الأساسي:

$$x_1+3x_2+S_1 = 13 \Rightarrow S_1 = 13 - x_1 - 3x_2$$
$$5x_1+2x_2+S_2 = 20 \Rightarrow S_2 = 20 - 5x_1 - 2x_2$$

بالتعويض في العبارة السابقة نحصل على القيد الجديد التالي :

$$-11/13(13 - x_1 - 3x_2) - 3/13(20 - 5x_1 - 2x_2)+8/13 \leq 0$$
$$2x_1+3x_2 \leq 15 \text{ ----- } (3)$$

نلاحظ في الشكل (2-3) كيف أن هذا القيد الجديد استطاع أن يخفض منطقة الحلول الممكنة و ذلك بحذف جزء كبير من الحلول ذات الأعداد الغير صحيحة.

الآن نقوم بحل النموذج الجديد (مع القيد الإضافي) بطريقة *Simplex* دائما:

$$MaxZ = 3x_1 + 4x_2$$

$$S/c\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (3-2)$$

بعد تطبيق طريقة *Simplex* نحصل على الحل الأمثل:

الجدول رقم (2− 2) : جدول الحل الأمثل للبرنامج(3-2)

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	
Vb	Cj	3	4	0	0	0	b_i
x_2	4	0	1	0	-2/11	5/11	35/11
S_1	0	0	0	1	3/11	-13/11	8/11
x_1	3	1	0	0	3/11	-2/11	30/11
Zj		3	4	0	1/11	14/11	Z*=230/11
Cj-Zj		0	0	0	-1/11	-14/11	

نختار من جديد مستوي قاطع آخر و ذلك باختيار x_1 من جديد لأن له أكبر جزء كسري و كما فعلنا سابقا نختار القيد:

$$x_1 + (3/11)S_2 - (2/11)S_3 = 30/11$$

$$x_1 + (0+3/11)S_2 + (-1+9/11)S_3 = 2+8/11$$

$$x_1 = (S_3+2) + (-3/11S_2 - 9/11S_3 + 8/11)$$

و منه نحصل على القيد الجديد :

$$-3/11S_2 - 9/11S_3 + 8/11 \le 0$$

و بالتعويض بالقيم الحقيقية للنموذج نحصل على القيد :

$$3x_1 + 3x_2 \le 17 \text{ ----- } (4)$$

و بعد إضافته إلى النموذج السابق نحصل على النموذج الجديد :

$$MaxZ = 3x_1 + 4x_2$$

$$S/c\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 17 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (4-2)$$

وبحل البرنامج بطريقة السمبلكس، نحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

الجدول 2- 3 : جدول الحل الأمثل للبرنامج (2-4)

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
Vb	Cj	3	4	0	0	0	0	b_i
x_2	4	0	1	0	0	1	-2/3	11/3
S_2	0	0	0	0	1	3	11/3	8/3
x_1	3	1	0	0	0	-1	1	2
S_1	0	0	0	1	0	-2	1	0
Zj		3	4	0	0	1	1/3	Z*=62/3
Cj-Zj		0	0	0	0	-1	-1/3	

نلاحظ هنا أننا حصلنا على حل أمثل فيه قيمة x_1 عدد صحيح، نواصل من جديد و نأخذ المتغير القاعدي x_2 و القيد المتعلق به ، و بإتباع نفس الخطوات السابقة نحصل على القيد الجديد:

$$x_1+x_2 \leq 5 \text{ ---- } (5)$$

نضيف هذا القيد لنحصل على النموذج الجديد:

$$MaxZ = 3x_1 + 4x_2$$

$$S/c\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 17 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \qquad (5-2)$$

وفي الأخير نحصل على جدول الحل الأمثل الموالي:

الجدول 2- 4 : جدول الحل الأمثل للبرنامج (2-5)

		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
Vb	Cj	3	4	0	0	0	0	0	b_i
x_2	4	0	1	1/2	0	0	0	-1/2	4
S_2	0	0	0	3/2	1	0	0	-13/2	7
S_3	0	0	0	-1/2	0	1	0	-3/2	1
S_4	0	0	0	0	0	0	1	-3	2
X_1	3	1	0	-1/2	0	0	0	3/2	1
Zj		3	4	1/2	0	0	0	5/2	Z*=19
Cj-Zj		0	0	-1/2	0	0	0	-5/2	

من خلال الجدول (2-5)، نكون قد توصلنا إلى حل أمثل عددي صحيح بحيث أن قيم كل المتغيرات القرار عبارة عن أعداد صحيحة (بما في ذلك متغيرات الفجوة، بالرغم من أنه لايشترط أن تكون قيم هذه الأخير أعداد صحيحة، بحيث ان يمكن أن نكتفي لو حصلنا فقط على أعداد صحيحة للمتغيرات

التمرين الأول:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad Z = 5x_1 + 4x_2 \\
&S/C \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \ Entier \end{cases}
\end{aligned}
\qquad (13-2)
$$

المطلوب: 1. حل بيانيا البرنامج؛

التمرين الرابع:

تعمل احدى الورشات الصناعية على 3 آلات مختلفة A ، B ، C ، استقبلت هذه الورشة طلبيتين P_1 و P_2 ، كل طلبيه يجب أن تمر عبر الآلات الثلاث وفق ترتيب معين و في وقت معلوم كما هو مبين في الجدول التالي:

الطلبيات	1	2	3
P1	B(6)	A(4)	C(9)
P2	A(9)	C(6)	B(5)

فمثلا الطلبية P_1 تمر أولا عبر الآلة B لمدة 6 ساعات ، ثم عبر الآلة A لمدة 4 ساعات و في الأخير عبر الآلة C لمدة 9 ساعات.

المطلوب :

شكل البرنامج الخطي الذي يسمح باختيار الترتيب الملائم للطلبيات على مختلف الآلات من أجل إنهاء العمل في أقل وقت ممكن.