Numerical Methods: الطرق العددية

* Numerical Methods: are methods for solving problems numerically on a computer or calculator or by hand.

* The steps from a given solution to the final answer are usually as follows:

خطوات حل أي مسألة عددية هي كالآتي :

1- Modeling: set up a mathematical model of the problem such as an integral , a system of linear equation or differential equation.

أي معناها وضع موديل من البداية .

2- Choice of mathematical method   إختيار طريقة الحل العددية

3- Programming: from an algorithm we write program, say as FORTRAN; C; C++ or we may decide to us a computing environment such as MATHEMATICA and MATLAB.   إختيار أي برنامج جاهز أو كتابة برنامج.

4- Doing the computations.   القيام بالعمليات الحسابية

5- Interpolation the results. ترتيب النتائج التي نحصل عليها على شكل جدول او رسومات

*** بعض العمليات الحسابية التي نستخدمها مع البرامجيات العددية:**

Floating-point from of numbers

تكتب الأرقام او الأعداد بشكلها الإعتيادي ويتم تحديد المراتب العشرية

a) Fixed-point system:

62.35	0.013	1.000
62.4	0.01	

b) Floating-point system: **للحاسبات تستخدم هذه الطريقة**

$0.6384 * 10^{3}$　　$0.235 * 10^{-13}$　　$-0.2000 * 10^{-3}$

$0.6384\ E03$　　$0.235\ E-13$　　$-0.2000\ E-03$

لايجوز أن نكتب 0.001 بل نكتب $0.1 * 10^{-3}$

لدينا هذه المصطلحات Under flow and Over flow

$*$ Single Precision　　$-38 < e < 38$

$*$ double Precision　　$-308 < e < 308$

Under flow $< 0.1 * 10^{-308}$

أي رقم أصغر من هذه القيمة = 0

Over flow $< 0.1 * 10^{-308}$

أي رقم أكبر من هذه القيمة = كمية غير معرفة

Round Off: التقريب

يوجد نوعين من التقريب :

1- Chopping: التقطيع: عدد صحيح بدون أرقام عشرية

2- Rounding: التقريب: مع مراتب عشرية

الخطا بالحل اليدوي يأتي من التقريب لانه يعمل فرق بين الحل العددي و الحل اليدوي.

* Algorithm : الخوارزمية

An algorithm is a finite sequence of rules for performing computations on computer such that at each instant, the rules determine exactly what the computer has to do next.

* Stability: الإستقرارية

إذا كان التغير قليل يسمى مستقر لو كان بالبداية لانه يؤدي الى تغير قليل بالنهاية اما لو كان كثير فانه يصبح غير مستقر.

* Programming Errors: الأخطاء البرمجية

كل الاخطاء الواردة مثلا نكتب 0 بدلا من zero

أو نكتب 1 بدلا من I أو أي خطأ مطبعي آخر ..

ولمعرفة هذه الأخطاء نقوم بالعملية debugging لمعرفة الأخطاء والقيام بحلها.

يتم مقارنة النتائج العددية مع النتائج المحلولة يدويا واذا كان الفرق قليل او غير موجود معناها الحل صحيح واذا لا معناها الحل خطأ .

* Tracing:

معناها في كل خطوة يتم عمل output وتطابق مع النتائج اليدوية للمسألة أي فحص كل خطوة من خطوات البرنامج.

معظم الاخطاء تاتي من التقريب round off لذلك ندرج أنواع الأخطاء العددية.

*** Errors of numerical results:**

1- Round off أخطاء التقريب

2- Experimental errors قياسات خاطئة أو كتابتها بالبرنامج بطريقة خاطئة

3- Tracing errors إقتفاء اثر

يرمز للاخطاء :

t error

a true

a' approximate result

$$t = a - a'$$

$$a = t + a'$$

Relative error $\epsilon_T = \frac{t}{a} \rightarrow \frac{t}{a'}$.

المحاضرة الثانية

Solution of Equations by Iteration:

(حل المعادلات بواسطة التكرار)

$F(x) = 0$

$x^2 + 2x + 1 = 0$ (معادلة لها جذرين)

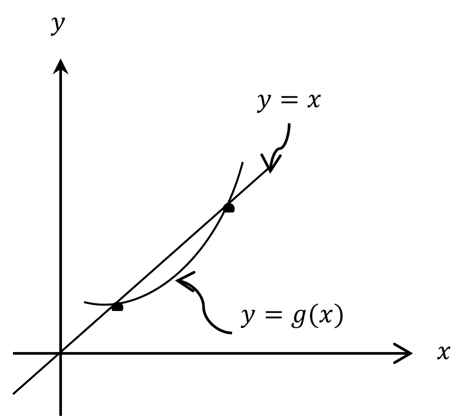
$\sin x + x^2 = 0$ (جذر واحد فقط دالة مبهمة)

Fixed-Point Method:

$F(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = g(x)$

$y = x \quad \rightarrow \quad y = g(x)$

$x_0 \quad \rightarrow$ (قيمة إبتدائية)



(الخطوات كالتالي):

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

$x_{n+1} = g(x_n)$

*طبعا يتم عمل عدد من التكرارات وبعدها يتم التوقف بالإعتماد على الدقة المطلوبة

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \text{Tolerance}$$

يتم التوقف بعد مقارنة آخر قيمتين مع بعض إذا كان الفرق بينهما أقل أو يساوي الدقة المطلوبة مثلا 0.001

Example: Set up iteration process for the equation:

$$\mathbf{F(x) = x^2 - 3x + 1 = 0}$$

Exact solution $\begin{cases} x_1 = 2.618 \\ x_2 = 0.381966 \end{cases}$

Solution :

$x^2 - 3x + 1 = 0$ choose $x = \frac{1}{3}(x^2 + 1)$

$x_{n+1} = \frac{1}{3}\,(x^2{}_n + 1)$ $\qquad x_0 = 1.0$

$x_1 = \frac{1}{3}\,(1^2 + 1) = \frac{2}{3} = 0.6667$

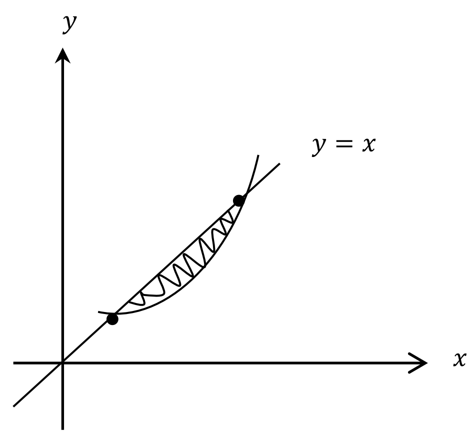
$x_2 = \frac{1}{3}\,\left(\frac{4}{9} + 1\right) = \frac{13}{27} = 0.4814$

$x_3 = 0.4106$; $x_4 = 0.3895$; $x_5 = 0.3839$

$x_6 = 0.3824$; $x_7 = 0.38209$; $x_8 = 0.38199$

$x_9 = 0.38190$; $x_{10} = 0.3819$

$\therefore x = 0.3819 \cong 0.381966$



لإيجاد النقطة الثانية نبدل قيمة x_0 ونأخذ قيمة قريبة من النقطة الأخرى أي من الجذر الآخر .

$x_0 = 3.0$

$x_1 = \frac{1}{3}\,(3^2 + 1) = \frac{10}{3} = 3.3334$

$x_2 = \frac{1}{3}\,\left(\frac{100}{9} + 1\right) = 4.0370$

$x_3 = 5.7658$

* نلاحظ ان كل قيمة ليس لها علاقة مع القيمة الاخرى بمعنى انه يبتعد عن الحل.

$$|g'(x)| \leq 1$$

الاقتراب من الحل يسمى (convergence)

الابتعاد عن الحل يسمى (divergence)

يجب اختيار شكل اخر للمعادلة لايجاد الجذر الثاني

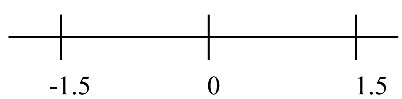
$$g(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1) \qquad g'(x) = \frac{2}{3}x$$

في هذه الحالة نضمن الاقتراب من الحل

$$|g'(x)| \leq 1$$

في هذه الحاله نضمن الاقتراب من الحل.

$$\text{if } x \leq \frac{3}{2}$$



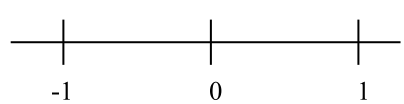
نقوم باختيار صيغة اخرى للحل

$$x_2 = 3x - 1 \quad \rightarrow \quad x = 3 - \frac{1}{x}$$

$$x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}$$

$$g(x) = 3 - \frac{1}{x} \qquad g'(x) = \frac{1}{x^2}$$

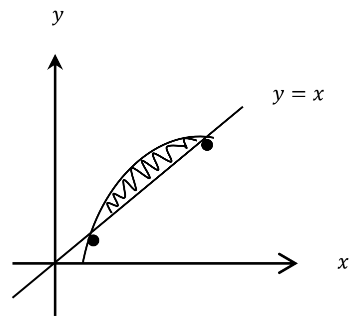
$$g'(x) \leq 1 \qquad 1 \leq x \leq -1$$



putting $x_0 = 1$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2.5 \qquad x_3 = 2.6$

$x_4 = 2.615 \qquad x_5 = 2.617 \qquad x_6 = 2.618$



نستنتج بان كل صيغة تعطي جذر واحد من جذور المعادلة

المحاضرة الثانية

Solution of Equations by Iteration:

(حل المعادلات بواسطة التكرار)

$F(x) = 0$

$x^2 + 2x + 1 = 0$ (معادلة لها جذرين)

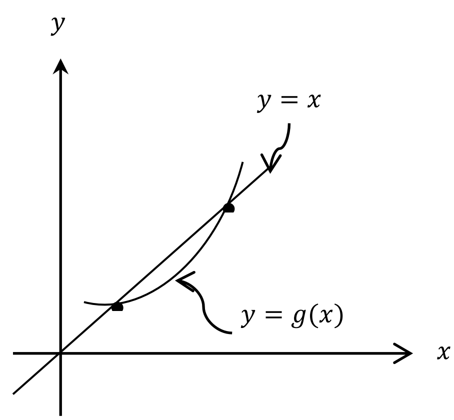
$\sin x + x^2 = 0$ (جذر واحد فقط دالة مبهمة)

Fixed-Point Method:

$F(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = g(x)$

$y = x \quad \rightarrow \quad y = g(x)$

$x_0 \quad \rightarrow$ (قيمة إبتدائية)



(الخطوات كالتالي):

$x_1 = g(x_0)$

$x_2 = g(x_1)$

$x_{n+1} = g(x_n)$

*طبعا يتم عمل عدد من التكرارات وبعدها يتم التوقف بالإعتماد على الدقة المطلوبة

$|x_{n+1} - x_n| \leq \text{Tolerance}$

يتم التوقف بعد مقارنة آخر قيمتين مع بعض إذا كان الفرق بينهما أقل أو يساوي الدقة المطلوبة مثلا 0.001

Example: Set up iteration process for the equation:

$$\mathbf{F(x) = x^2 - 3x + 1 = 0}$$

Exact solution $\begin{cases} x_1 = 2.618 \\ x_2 = 0.381966 \end{cases}$

Solution :

$x^2 - 3x + 1 = 0$ choose $x = \frac{1}{3}(x^2 + 1)$

$x_{n+1} = \frac{1}{3}({x^2}_n + 1)$ $\qquad x_0 = 1.0$

$x_1 = \frac{1}{3}(1^2 + 1) = \frac{2}{3} = 0.6667$

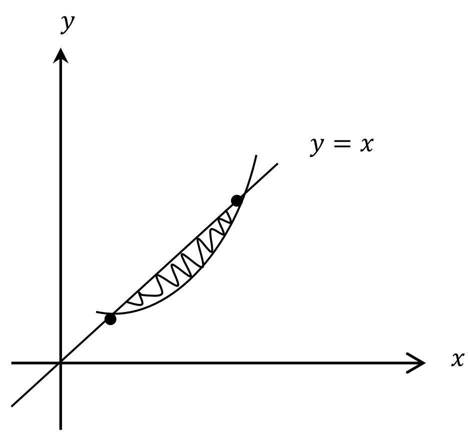
$x_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9} + 1\right) = \frac{13}{27} = 0.4814$

$x_3 = 0.4106$; $x_4 = 0.3895$; $x_5 = 0.3839$

$x_6 = 0.3824$; $x_7 = 0.38209$; $x_8 = 0.38199$

$x_9 = 0.38190$; $x_{10} = 0.3819$

$\therefore x = 0.3819 \cong 0.381966$



لإيجاد النقطة الثانية نبدل قيمة x_0 ونأخذ قيمة قريبة من النقطة الأخرى أي من الجذر الآخر .

$x_0 = 3.0$

$x_1 = \frac{1}{3}(3^2 + 1) = \frac{10}{3} = 3.3334$

$x_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{100}{9} + 1\right) = 4.0370$

$x_3 = 5.7658$

* نلاحظ ان كل قيمة ليس لها علاقة مع القيمة الاخرى بمعنى انه يبتعد عن الحل.

$|g'(x)| \leq 1$

الاقتراب من الحل يسمى (convergence)

الابتعاد عن الحل يسمى (divergence)

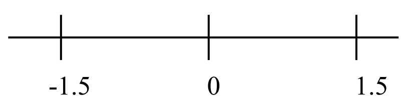
يجب اختيار شكل اخر للمعادلة لايجاد الجذر الثاني

$$g(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1) \qquad g'(x) = \frac{2}{3}x$$

في هذه الحالة نضمن الاقتراب من الحل $|g'(x)| \leq 1$

في هذه الحاله نضمن الاقتراب من الحل.

if $x \leq \frac{3}{2}$



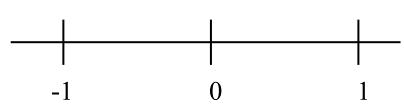
نقوم باختيار صيغة اخرى للحل

$$x_2 = 3x - 1 \quad \rightarrow \quad x = 3 - \frac{1}{x}$$

$$x_{n+1} = 3 - \frac{1}{x_n}$$

$$g(x) = 3 - \frac{1}{x} \qquad g'(x) = \frac{1}{x^2}$$

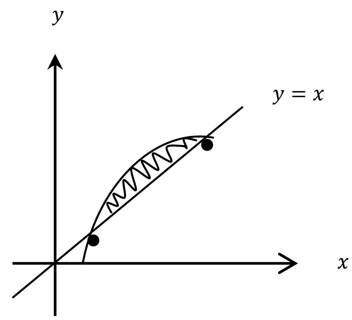
$g'(x) \leq 1 \qquad 1 \leq x \leq -1$



putting $x_0 = 1$

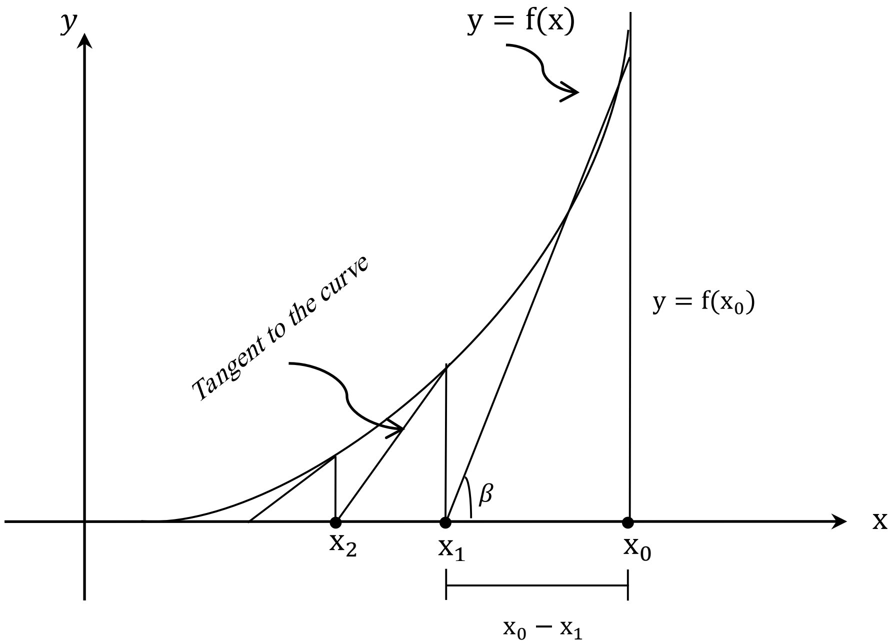
$x_1 = 2 \quad x_2 = 2.5 \quad x_3 = 2.6$

$x_4 = 2.615 \quad x_5 = 2.617 \quad x_6 = 2.618$



نستنتج بان كل صيغة تعطي جذر واحد من جذور المعادلة

2) Newton method for solving f(x) = 0



$$\tan\beta = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

$$(x_0 - x_1)\, f'(x_0) = f(x_0)$$

$$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad f'(x) \neq 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad f'(x_n) \neq 0$$

Newton Raphson Method

Example: Applying Neoton method for the equation $f(x) = x^3 + x + 1$

starting $x_0 = 1.0$

Solution :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^3 + x_n - 1}{3{x_n}^2 + 1}$$

$$x_1 = 1 - \frac{1^3 + 1 - 1}{3(1)^2 + 1} = 0.75$$

$$x_2 = 0.75 - \frac{(0.75)^3 + 0.75 - 1}{3(0.75)^2 + 1} = 0.686046$$

$$x_3 = 0.682339$$

$$x_4 = 0.6823278$$

Example: Set up a Newton iteration for computing asquare root (x)of given positive number (c)and apply it to c = 2

Solution :

Exact solution : $\sqrt{2} = 1.414213$

$$f(x) = x = \sqrt{c}$$

$$f(x) = x^2 = c$$

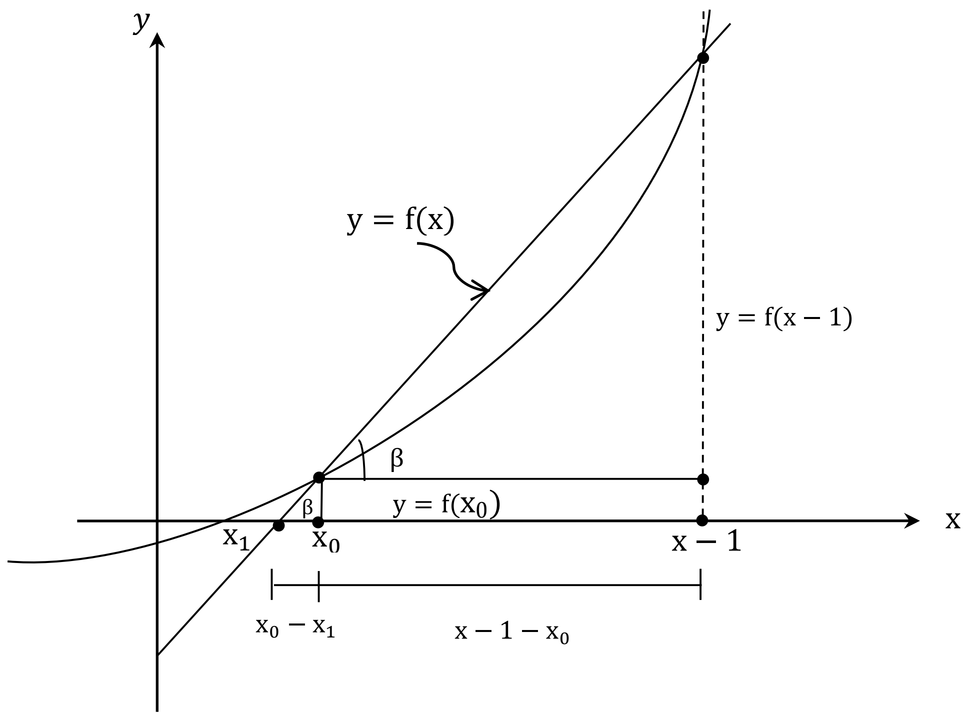
$$f(x) = x^2 - c = 0$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

if $x_0 = 2.0$	if $x_0 = 1.0$
$x_1 = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$	$x_1 = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$
$x_1 = 2 - \frac{2^2 - 2}{2(2)} = 1.5$	$x_1 = 1 - \frac{1^2 - 2}{2(1)} = 1.5$
$x_2 = 1.5 - \frac{1.5^2 - 2}{2(1.5)} = 1.41666$	$x_2 = 1.41666$
$x_3 = 1.414215$	$x_3 = 1.414215$
$x_4 = 1.4142135$	$x_4 = 1.4142135$

3) Secant method for solving equation f(x) = 0



هنا نحتاج الى نقطتين افتراضيتين وهذا يفرق عن طريقة Newton نحتاج فقط نقطة افتراضية واحدة.

$$\tan\beta = \frac{f(x-1)-f(x_0)}{x-1-x_0} = \frac{yf(x_0)}{x_0-x_1}$$

$$(x_0-x_1)\left[\frac{f(x-1)-f(x_0)}{x-1-x_0}\right] = f(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - f(x_0)\,\frac{x_0-x-1}{f(x_0)-f(x-1)} \qquad f'(x)\neq 0$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n-x_n-1}{f(x_n)-f(x_n-1)}} \qquad f'(x_n)\neq 0$$

Example: Find the positive solution of $f(x) = x - 2\sin x$ by secant method starting $x_0 = 2.0$ $x_1 = 1.9$.

Solution :

$x_n = 1.9$ $x_0 = 2.0$

$$x_{n+1} = x_n - (x_n - 2\sin x_n) = \frac{x_n - x_n - 1}{(x_n - 2\sin x_n) - (x_{n-1} - 2\sin x_{n-1})}$$

$x_3 = 1.895494$

أو ممكن ترتيب الحل على شكل جدول

n	x_{n-1}	x_n	N_n	D_n	x_{n+1}
1	2.0	1.9			1.895474
2	1.9	1.895474			1.895494
3	1.895474	1.895494			

Interpolation (الإستكمال)

It is the process of finding a value of (y) corresponding to a value of (x) in the interval(x_0, x_n). The process of representing the given data by a function (generally a polynomial function) is also termed as Interpolation.

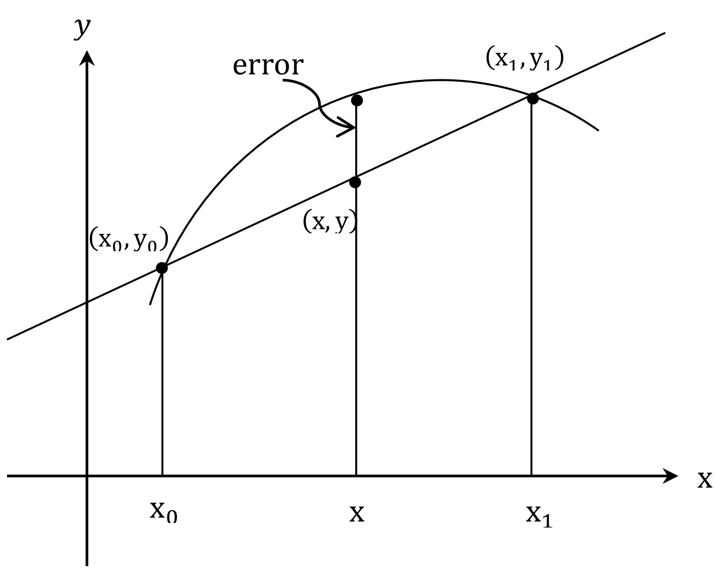
Extrapolation (الإستقراء/الإستنباط)

The process of finding a value of (y) corresponding to value of (x) outside the interval.

1) Linear interpolation (الإستكمال الخطي)

Is interpolation by means of the straight line through(x_0, y_0) ; (x_1, y_1) given by:

$$\boxed{P_1(x) = y_0 + (x - x_0)\,\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$$



Linear Interpolation

$$F(x_0 - x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{[first divided difference]}$$

الفروقات النسبية الاولى

Example: Find $\ln(9.2)$ from $\ln(9.0) = 2.1972$ and $\ln(9.5) = 2.2513$ by linear interpolation and determine the error:

n	x	y
0	9.0	2.1972
1	9.5	2.2513

$x = 9.2$

$$P_1(x) = y_0 + (x - x_0)\ \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$P_1(x) = 2.1972 + (9.2 - 9.0)\ \frac{2.2513 - 2.1972}{9.5 - 9.0}$$

$P_1(x) = 2.2188$ (numerical)

$\ln 9.2 = 2.2192$ (exact)

$\text{error} = 2.2192 - 2.2188 = 0.0004$

2) Quadratic interpolation (الإستكمال التربيعي)

It is the interpolation by means of the polynomial $P_2(x)$ of at most second degree whose curve passes through three points (x_0, y_0) ; (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) .

$$\boxed{P_2(x) = y_0 + (x - x_0)\ F\,[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\ F\,[\,x_0, x_1, x_2] \qquad \dots (1)}$$

with:

$$F\,[x_0, x_1] = \text{First divided difference} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

الفروقات النسبية الاولى

$$F\,[\,x_0, x_1, x_2] = \text{second divided difference} = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

الفروقات النسبية الثانية

Equation (1) shows that $P_2(x_0) = y_0$ because $(x - x_0) = 0$

$P_2(x_1) = y_0 + (x - x_0)\ F[x_0, x_1] = y_1$

$P_2(x_2) = y_2$

Example: Find $\ln(9.2)$ from $\ln(8.0), \ln 9.0, \ln(9.5)$:

n	x	y
0	8.0	2.0794
1	9.0	2.1972
2	9.5	2.2513

$\ln(9.2) = 2.2192$ (exact)

$$P_2(x) = y_0 + (x - x_0)\ F[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\ F[x_0, x_1, x_2]$$

$$F[x_0, x_1] = \frac{2.1972 - 2.0794}{9.0 - 8.0} = 0.1178$$

$$F[x_0, x_1, x_2] = \frac{\frac{2.2513 - 2.1972}{9.5 - 9.0} - \frac{2.1972 - 2.0794}{9.0 - 8.0}}{9.5 - 8.0} = -0.0064$$

$P_2(x) = 2.0794 + (9.2 - 8.0) * 0.1178 + (9.2 - 8.0)(9.2 - 9.0) *$
$(-0.0064) = 2.2192$ (numerical).

3) Newton's Divided Difference interpolation

(إستكمال الفروقات النسبية لنيوتن)

$$F(x) \cong y_0 + (x - x_0)\ F[x_0, x_1] + (x - x_0)\ (x - x_1)\ F[x_0, x_1, x_2]$$
$$+ (x - x_0)\ (x - x_1)(x - x_2)\ F[x_0, x_1, x_2, x_3] + \ \dots$$
$$+ \ (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})\ F[x_0, x_1, \dots, x_n] \qquad \dots (2)$$

This formula called Newton's Divided Difference interpolation formula.

Example: Find f(9.2) using the formula from the data:

n	x	y	$F[x_0, x_1]$	$F[x_0, x_1, x_2]$	$F[x_0, x_1, x_2, x_3]$
0	8.0	2.0794			
1	9.0	2.1972	0.117783		
2	9.5	2.2513	0.108134	0.006432	0.000410
3	11.0	2.397895	0.097735	-0.0052	

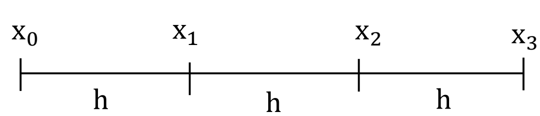
$$F(x) \cong 2.079442 + (9.2 - 8.0)(0.117783) + (9.2 - 8)(9.2 - 9)$$
$$(-0.00643) + (9.2 - 8)(9.2 - 9)(9.2 - 9.5)(0.000410)$$
$$= \ 2.2192$$

4) Equal spacing Newton's forward Difference formula:

(معادلة نيوتن للفروقات الأمامية)

Let (h) to be the distance interval between any two consecutive values of x so that $x_0, x_1 = x_0 + h\ ;\ x_2 = x_0 + 2h\ ;\ x_n = x_0 + nh$.

Let the corresponding values of (y)



$y_0, y_1 \dots y_n$

$y_n = f(x_n) = f(x_0 + nh)$

then the first forward difference of y are given by :

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$ $\quad$ $\Delta y_2 = y_3 - y_2$

$\Delta y_1 = y_2 - y_1$ $\quad$ $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

The second forword difference of $y =$
[difference of first forward difference] $= \Delta(\Delta y_i) = \Delta^2 y_i$

$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0)$

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)$

$$\boxed{\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0}$$

and continuity in this way the (k^{th}) forward difference of (y) at (x_i) by

$$\boxed{\Delta^k y_i = \Delta^k y_{i-1} - \Delta^{k-1} y_i}$$

$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i-1} - \Delta^2 y_i$

in 3 we set $x = x_0 + rh$ then :

$x - x_0 + rh$ $\quad$ $x - x_1 = (r-1)h$ ans so on ...

The Newton's forward difference interpolation formula:

$$\boxed{F(x) \cong p(x) \cong p_0 + r\Delta y_0 + \frac{r(r-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{r(r-1)(r-n+1)}{n!} \Delta^n y_0}$$

with : $r = \dfrac{x - x_0}{h}$

5) Equal spacing Newton's backward difference formula :

Instead of forward – slopping difference we may slso employ backward slopping difference.

We define the first backward difference of (y) at (x_i)

$$\boxed{\nabla y_i = y_i - y_{i-1}}$$

The second backward difference at (y) at (x_i):

$$\nabla^2 y_i = \nabla y_i - \nabla y_{i-1}$$

and continuity in this way, the k^{th} backward difference of (y)at (x_i)by:

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1}$$

$$\boxed{F(x) \cong p(x) \cong y_0 + r\nabla y_0 + \frac{r(r+1)}{2!} \nabla^2 y_0 + \cdots + \frac{r(r+1)(r+n-1)}{n!} \nabla^n y_0}$$

with : $r = \dfrac{x - x_0}{h}$

Example: Compute a (7D)approximation of the function f(x) for (x = 1.72) from the fourth value in the following table using :

1 – Newton'sforward formula.

2 – Newton'sbackward formula.

i for	x_i	y_i	1^{st} diff.	2^{nd} diff.	3^{rd} diff.
0	1.7	0.3979847	-0.0579985	forward	
1	1.8	0.3399864	-0.0581678	-0.0001693	0.0004093
2	1.9	0.2818186	-0.0579278	0.0002400	
3	2.0	0.2238908			

Forward

$$F(x) \cong p(x) \cong y_0 + r\Delta y_0 + \frac{r(r-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{r(r-1)(r-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$$

$$r = \frac{x - x_0}{h} \qquad ; \quad h = 0.1$$

$$r = \frac{1.72 - 1.7}{0.1} = 0.2$$

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 0.3399864 - 0.3979849 = -0.0579985$$

$$\frac{r(r-1)}{2!} = \frac{0.2(0.2-1)}{2 * 1} = -0.08$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0)$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = -0.0001693$$

$$\frac{r(r-1)(r-n+1)}{n!} = \frac{0.2(0.2-1)(0.2-3+1)}{3 * 2 * 1} = 0.048$$

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = 0.0004093$$

$$p(x) \cong 0.3979849 + 0.2(-0.0579985) + (-0.08)(-0.0001693)$$

$$+0.048(0.0004093) = 0.3864183.$$

Backward

i for	x_i	y_i	1^{st} diff.	2^{nd} diff.	3^{rd} diff.
-3	1.7	0.3979847	-0.0579985		
-2	1.8	0.3399864		-0.0001693	
-1	1.9	0.2818186	-0.0581678	0.00024	0.0004093
0	2.0	0.2238908	-0.0579278	backward	

$$F(x) \cong y_0 + r\nabla y_0 + \frac{r(r+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \cdots + \frac{r(r+1)(r+n-1)}{n!}\nabla^n y_0$$

$$f(x) = 0.2238908 + (-2.8)(-0.0579278) + \frac{-2.8(-2.8+1) * 0.00024}{2!}$$

$$+ \frac{-2.8(-2.8+1)(-2.8+3-1)}{3 * 2 * 1} * 0.0004093 = 0.386418$$

$$\nabla y_0 = y_0 - y_1 = 0.2238908 - 0.2818186 = -0.0579278$$

$$\nabla^2 y_0 = y_0 - 2y_{-1} + y_{-2} = 0.00024$$

$$\nabla^3 y_0 = y_0 - 3y_{-1} + 3y_{-2} - y_{-3} = 0.0004093$$

ENGINEERING ANALYSIS AND NUMERICAL METHODS

جامعة الموصل

كلية الهندسة

قسم الهندسة المدنية

المرحلة الثالثة

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله

طباعة: م.م. تقـى وليـد أحمـد

2020-2021

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Contents

Second order linear Diff. Equ.

$$y = F(x) \rightarrow \frac{dy}{dx}$$

$$y = F(x,t) = \frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dt}$$

$$y'' + p(x)\,y' + g(x)\,y = r(x)$$

where p(x) , q(x) and r(x) are functions of x only.

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Examples:-

$$y''+x^2\,y'+6y=e^x$$

linear – Non homogenous

$$yy''+x^3\,y'+(x-1)y=\sin x$$

Non linear – Non homogenous

$$y''+\sqrt{(x^2+2)}\;y'+4y=0$$

linear – homogenous

if r(x) = 0 $\longrightarrow$ Homogeneous.
If r(x) $\neq$ 0 Non homogenous

P(x) & q(x) Coefficients of equation.

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

$y''+ay'+by=0$

(homogenous – second order linear D. E with constant) coefficients.

$y = e^{\alpha x}$

$y''= \alpha e^{\alpha x}$

$y''= \alpha^2 e^{\alpha x}$

$\alpha^2 e^{\alpha x} + a \alpha e^{\alpha x} + b e^{\alpha x} = 0$

$(\alpha^2 + a \alpha + b) e^{\alpha x} = 0$

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$ **characteristic equation.**

$$\alpha=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\left[-a+\sqrt{a^2-4b}\right],\alpha_2=\frac{1}{2}\left[-a-\sqrt{a^2-4b}\right]$$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

1- Two real roots

α_1 , α_2

$y= c_1 e^{\alpha 1x} + c_2 e^{\alpha 2x}$

Example :

$y'' + y' - 2y = 0$

$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$

$(\alpha + 2) (\alpha - 1) = 0$

$\alpha_1 = -2 , \alpha_2 = 1$

$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$

$y''+ay' + by = 0$

$y = e^{\alpha x}$ $\quad y' = \alpha e^{\alpha x}$ $\quad y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$\alpha^2 e^{\alpha x} + a \alpha e^{\alpha x} + b e^{\alpha x} = 0$

$(\alpha^2 + a \alpha + b) e^{\alpha x} = 0$

$\alpha^2 + a \alpha + b = 0$ المعادلة المميزة الخاصة بالحل

characteristic equation

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

2- Complex roots

$a^2 - 4b < 0 \;\; = -w^2 \qquad \sqrt{-w^2} = wi \qquad \alpha_{1,2} = \dfrac{-a \pm wi}{2} = -\bar{a} \pm \bar{w}i$

$y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$

$y = e^{-ax}(A \cos wx + B \sin wx)$ **general solution**

الحل العام عندما يكون بالمعادلة ثوابت (A, B)

إذا لم يوجد شروط الحل

الشروط

$y'(0) = 1$, $y(0) = 4$

at $(x=0)$ at $(x=0)$

$dy / dx = 1$ $y = 4$

* عدد الثوابت يجب أن يساوي مرتبة المعادلة ولدينا من المرتبة الثانية ثوابت أثنان هم (A,B)

$y(0) = 4$

$4 = e^0 (A \cos 0 + B \sin 0)$

$4 = 1(A+0)$

$A = 4$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

3-Double roots

$\alpha_1 = \alpha_2 = - a$

$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{-ax}$

Example :

$$y'' + 8y' + 16y = 0$$

Solution :-

$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$

$(\lambda + 4)(\lambda + 4) = 0$

$\lambda_1 = -4 \ , \lambda_2 = -4$

$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{-4x}$ **general solution**

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

3-Double roots

Find the particular solution

if y (0) = 3 , y′(0) = 1

$y'(0) = 3$, $3 = (c_1 + c_2 * 0)\ e^{-ax0}$

$dy/dx = (c_1 + c_2\ x) * -4e^{-4x} + e^{-4x}\ (c_2)$

$1 = (c_1 + 3 *0) * -4e^{-4x0} + e^{-4x0}\ (c_2)$

$1 = -\ 4c_1 + c_2$

$1 = -4\ x3 + c_2$

$c_2 = 13$

$y = (3 + 13x)\ e^{-4x}$ **particular solution**

ENGINEERING ANALYSIS AND NUMERICAL METHODS

جامعة الموصل
كلية الهندسة
قسم الهندسة المدنية
المرحلة الثالثة
إعداد: أ.م.د سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد
2020-2021

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Equation of order n with constant coefficients

$$y^{n} + a_{n-1}\ y^{\,n-1} + a_{\,n-2}\, y^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + a_1\, y^{-} + a_0\, y = 0$$

Characteristic equation

$$\lambda^{n} + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1\,\lambda + a_0 = 0$$

Example:

Solve the D.E : $\mathbf{y''' - 2\,y'' - y' + 2y = 0}$

solution:-

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

$(\lambda - 2)\,(\lambda^2 - 1) = 0$

$(\lambda - 2)\,(\lambda - 1)\,(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 2\ ,\ \lambda_2 = +1\ ,\ \lambda_3 = -1$

$y = c_1\, e^{2x} + c_2 e^{x} + c_3\, e^{-x}$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Example:-

Solve the initial value problem :

$y''' - 2y'' - 2y = 0$, $y(0) = 0.5$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 2$

Solution:-

$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4*2}}{2} \longrightarrow \lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \longrightarrow \lambda_{2,3} = 1 \pm i$$

$y = c_1 e^0 + e^x(c_2\cos x + c_3\sin x)$ general solution

1- $y(0) = 0.5$

$0.5 = c_1 + e^0(c_2\cos 0 + c_3\sin 0)$

$0.5 = c_1 + c_2$ ……………..(1)

2- $dy/dx = y' = e^x(-c_2\sin x + c_3\cos x) + e^x(c_2\cos x + c_3\sin x)$

$-1 = e^0(-c_2\sin 0 + c_3\cos 0) + (c_2\cos 0 + c_3\sin 0)$

$-1 = c_3 + c_2$ …………….. (2)

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

3- $dy/dx = e^x [(c_3-c_2) \sin x + (c_3+c_2) \cos x]$

$d2y/dx^2 = y^{=} = e^x [-(c_3+c_2) \sin x + (c_3-c_2)\cos x] + [(c_3-c_2) \sin x + (c_3+c_2)\cos x]$

$2 = e^0 [(c_3-c_2) \cos 0 – (c_3+c_2) \sin 0] + e^0 [(c_3-c_2) \sin 0 + (c_3+c_2) \cos]$

$2= c_3 – c_2 + c_3 + c_2$

$2 = 2c_3$ $\quad c_3 = 1$

$-1 = 1 + c_2$ $\quad c_2 = -2$

$1 / 2 = c_1 – c_2$ $\quad c_1 = 5 / 2$

$y = 5 / 2 + e^x [-2 \cos x + \sin x]$ **particular solution.**

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Example: **Solve the D.E : Higher order linear ODES**

$y^5 - 3y^4 + 3y^3 - y^2 = 0$

Solution :

$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = 0$

$\lambda^2 [\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1] = 0$

$\lambda^2 (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda^2 = 0 \quad , \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1$

يوجد نوعين من التشابه بالجذور

$y = (c_1 + c_2x)\, e^{ox} + (c_3 + c_4x + c_5x^2)\, e^x$

$y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x + c_5x^2)\, e^x$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Example: Higher Order linear ODES

$$y^7 - 18y^5 + 81y''' = 0$$

Solution :

$\lambda^3\,[\lambda^4 + 18\,\lambda^2 + 81] = 0$

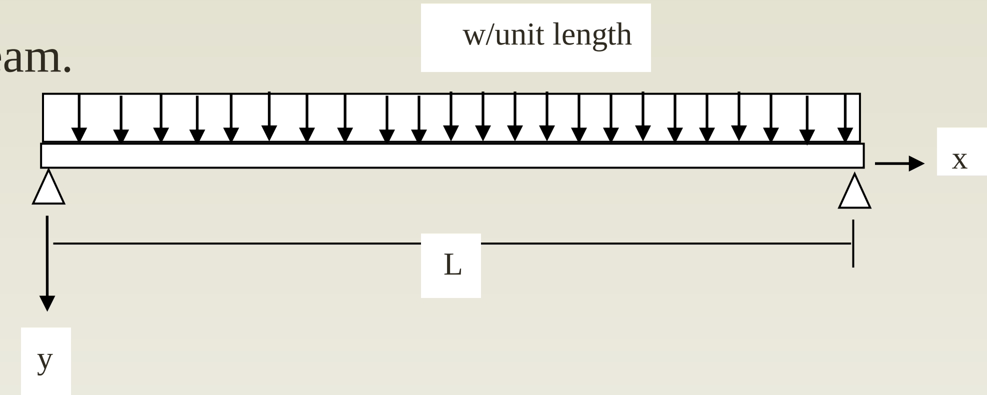
$\lambda^3\,(\lambda^2 + 9)^2 = 0$

$\lambda^3\,((\lambda - 3i)\,(\lambda + 3i))^2 = 0$

$\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,\lambda_3 = 0$

$\lambda_4\,,\,\lambda_5 = \lambda_6,\,\lambda_7 = \pm\,3i$

Ex: Find the deflection equation for the load beam.



B . C $\quad y(0) = 0 \qquad y''(0) = 0$

$\quad y(L) = 0 \qquad y''(L) = 0$

$$d^4y / dx^4 = w(x)/EI$$

D.E $\quad y = y_h + y_p$

$y_h \quad d^4y / dx^4 = 0$

$\lambda^4 = 0 \quad \lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,\lambda_3\,,\,\lambda_4 = \text{Zero}$

$$y_h = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\,x^3)\,e^{ox}$$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

$r(x) = w/EI$

$y_p = cx^4$,

$y_p = 24c$ تشتق اربع مرات

$24c = w/EI \qquad c = w / 24EI$

$y_p = w/24EI * x^4$

$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + w/24EI * x^4$

$y(0) = 0$

$0 = c_1 + c_2 * 0 + c_3 * 0 + c_4 * 0 + c_4 * 0 + w / 24EI * 0$

$c_1 = 0$

$y = c_2 x + c_3x^2 + c_4x^3 + wx^4 / 24 EI$

$y' = c_2 + 2 c_3x + 3 c_4x^2 + 4wx^3 / 24 EI$

$y'' = 2c_3 + 6c_4x + wx^2 / 2EI$ **$y''(0) = 0$**

$0 = 2c_3 + 6c_4 * 0 + w / 2EI * 0$

$c_3 = 0$

$y = c_2x + c_4x^4 + wx^4 / 24EI$

$y''(0) = 6c_4x + wx^2 / 2EI$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

$y(L) = 0 \qquad x = L$

$0 = c_2 * L + c_4 * L^3 + wL^4 / 24EI$ ....(1)

$y = c_2 x + c_4 x^3 + wx^4 / 24EI$

باشتقاقها مرتين

$y''(L) = 0$

$0 = 6c_4 L + wL^2 / 2EI$

$0 = 6c_4 + w / 2EI * L$

$c_4 = -wL / 12EI$

$0 = c_2 - wl * L^2 / 12EI + wL^3/24EI$

$c_2 = wL^3/24EI$

$y = wL^3 / 24EI * x - wL / 12EI\ x^3 + w / 24EI\ x^4$

max y to L / 2

$y(L/2) = wL^3 / 24EI * L/2 - wL/12EI\,(L/2)^3 + w / 24EI * (L/2)^4$

$y(L/2) = wL^4 / 48EI - wL^3/96EI + wL^4 / 384EI$

$y(L/2) = 8wL^4 - 4wL^4 + wL^4 \ / 384EI$

$y(L/2) = 5wL^4/384EI$

ENGINEERING ANALYSIS AND NUMERICAL METHODS

جامعة الموصل
كلية الهندسة
قسم الهندسة المدنية

المرحلة الثالثة

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقــى وليـد أحمـد

2020-2021

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Example:

Ex: Find the deflection equation for the loaded beam

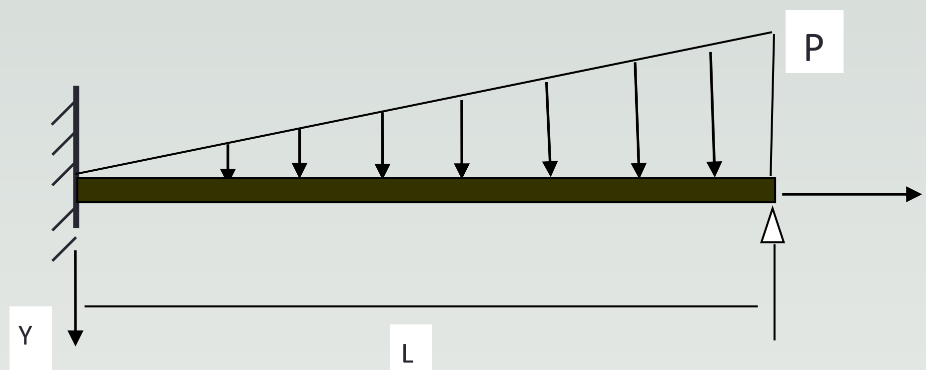
The related D . E is

$d^4y / dx^4 = w(x) / EI$

$w(x) = P X / L \qquad 0 \le x \le L$

B . C $\quad$ **$y(0) = 0$** $\quad$ **$y'(0) = 0$**

$y(L) = 0$ $\quad$ **$y''(L) = 0$**



$d^4y / dx^4 = PX / EIL$

$y = y_h + y_p$

$d^4y / dx^4 = 0 \qquad \lambda^4 = 0$

$\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 , \lambda_4 = 0$

$y_h = (c_1 + c_2 + c_3x^2 + c_4x^3)\, e^{0x}$

$y_p = k_1 x^5 + k_0x^4 \qquad (k_1x + k_0)\, x^4$

$120k_1x + 24k_0 = PX / EIL$

$120k_1 = P/EIL \qquad 24k_0 = 0$

$k_0 = 0$

$y_p = P * x^5 / 120\, EIL$

$y = y_h + y_p$

$y = c_1 + c_2x + c_3\, x^2 + c_4x^3 + P * x^5 / 120\, EIL$

$y(0) = 0$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

$y(x) = c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + P * x^5 / 120EIL$

$y'(0) = 0$

$y' = c_2 + 2c_3x + 3c_4x^2 + 5P * x^4 / 120\ EIL$

$0 = c_2$, $\mathbf{c_2 = 0}$

$y(x) = c_3x^2 + c_4x^3 + P * x^5 / 120\ EIL$

$y(L) = 0$

$0 = c_3 L^2 + c_4 L^3 + PL^5 / 120\ EIL$ ……………….(1) $/L^2$

$0 = c_3 + c_4L + PL^3 / 120\ EIL$

$y'(0) = 2c_3x + 3c_4x^2 + 5\ P\ x^4 / 120EIL$ ……………….(2)

$y''(L) = 2c_3 + 6c_4x + 20\ Px^3 / 120\ EIL$ …………………(2)

$y''(L) = 2c_3 + 6c_4L + 20\ PL^3 / 120\ EIL = 0$

$0 = \pm 2c_3 \pm 2c_4L \pm PL^2 / 60EI = 0$ ………………..(2) بحل المعادلات انيا

$0 = 4c_4L + 9PL^2 / 60EI$

$c_4 = -9PL^2 / 240\ EI = -\ 9PL^2 / 240EI$

$0 = c_3 - 9\ PL^2 / 240\ EI + PL^2 / 120EI$

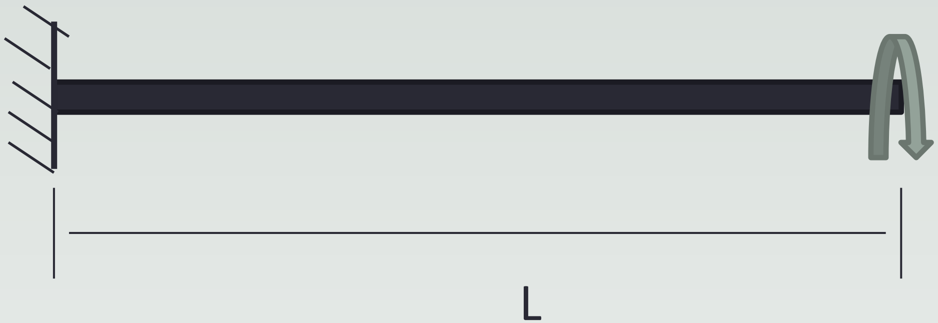
$\mathbf{c_3 = 7\ PL^2 / 240\ EI}$

$\mathbf{y(x) = 7\ PL^2 / 240\ EI * x^2 - 9PL / 240EI + P / 120\ EIL * x^5}$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Example:

Ex: Find the deflection equation for the Cantilever beam



$EI\, d^2y / dx^2 = M_0$

$d^4y / dx^4 = 0$

B . C $\quad y(0) = 0 \quad y''(L) = M_0 / EI$

$\qquad y'(0) = 0 \quad y'''(L) = 0$

$d^4y / dx^4 = 0$

B . C

$y(0) = 0 \qquad y''(L) = M_0 / EI$

$y'(0) = 0 \qquad y'''(L) = 0$

$y = y_h + y_p$

y_h : $\quad d^4y / dx^4 = 0$

$\lambda^4 = 0 \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = 0$

$y_h = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)\, e^{0x}$

y_p :

$r(x) = 0$

$y_p = 0$

$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$

$y(0) = 0$

$0 = c_1 + c_2x + c_3x + c_4x$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Example:

$y = c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$
$y' = c_2 + 2c_3x + 3c_4x^2$
$y'(0) = 0$
$0 = c_2 + 2c_3 * 0 + 3 * c_4 * 0$
$\mathbf{c_2 = 0}$

$y = c_3x^2 + c_4x^3$
$y'(x) = 2c_3x + 3c_4x^2$
$y''(x) = 2c_3 + 3 * 2 * c_4 * x$
$y''(L) = M_0 / EI$, $y'''(x) = 6c_4$
$M_0 / EI = 2c_3 + 6 * c_4 * L$
$\mathbf{c_3 = M_0 / 2EI}$

$y = M_0 / 2EI\ x^2 + c_4x^3$
$y'''(L) = 0$
$0 = 6c_4$, $\mathbf{c_4 = 0}$

$\mathbf{y = M_0 * x^2 / 2EI}$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Buckling of Columns :

الأصل هو المشتقة الرابعة ولغرض تبسيط الحل نأخذ المشتقة الثانية في الأعمدة .
المرتبة الرابعة في الحالة العامة لكل أنواع النهايات.
الأسلم للحل هي المرتبة الرابعة للمعادلة .

Axial axis is x – axis

$d^4y / dx^4 + p\, d^2y / EIdx^2 + ky / EI = w(x)/EI$

$EI\, d^2 y / dx^2 = M = - py$

$d^2 y / dx^2 + p / EI * y = 0$

simply supported only

P critical أعلى لود يتحمله العمود هو:

Putting $P / EI = k^2$

نختار k^2 لأنه من الدرجة الثانية المعادلة للتخلص من التربيع

$y'' + k^2y = 0$

$\lambda^2 + k^2 = 0 \qquad \lambda_1 , \lambda_2 = \pm ik$

yh = A coskx + B sin kx

yp=0 r(x)=0

y=yh+yp

y=A coskx+Bsinkx

Bcs **y(0) = 0** **y(L) = 0**

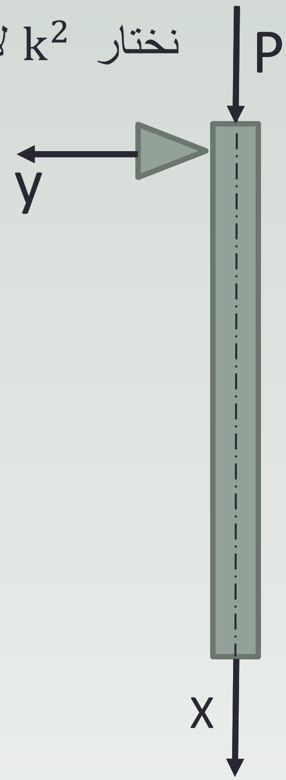
y(0) = 0

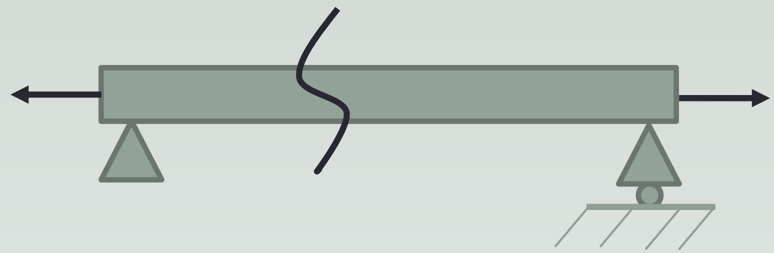
0 = A cos0 + B sin0

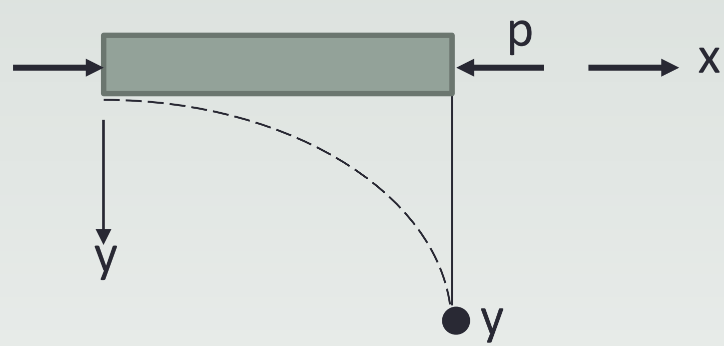
A = 0

y = B sin kx 0= B sinkL

y(L) = 0







إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Buckling of Columns :

$\sin kL = 0$

$kL = n\pi$

$k = n\pi / L$

$P / EI = k^2 = n^2 \pi^2 / L^2$ $\qquad n = 1, 2, \ldots\ldots$

$P = n^2 \pi^2 EI / L^2$

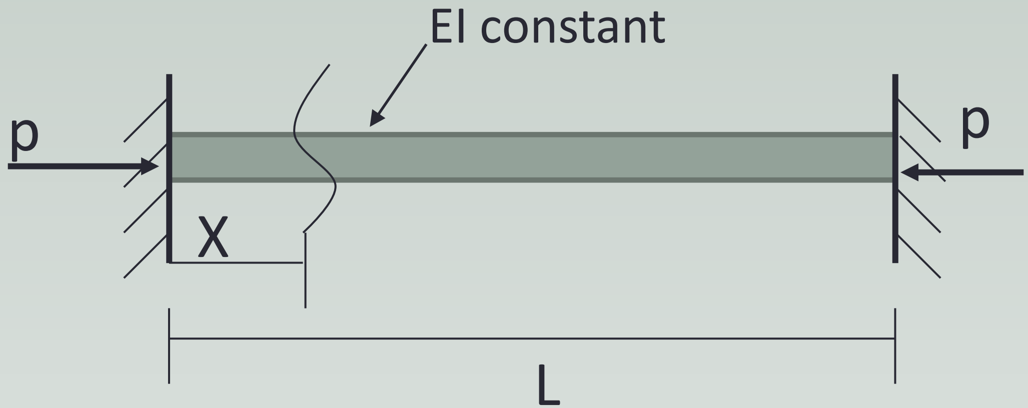
$P = P_{cr}$ if $n = 1$ only

$P_{cr} = \pi^2 EI / L^2$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

FIXED END Example:

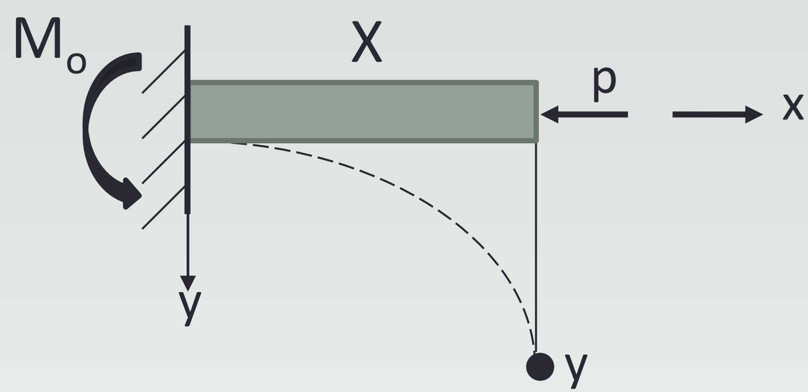
Ex: Find the deflection equation for fixed end column



$EI\ d^2y/dx^2 = M_0 - p_y$
$d^2y/dx^2 + Py / EI = M_0 / EI$

$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$
$y'' + k^2y = M_0 / EI \quad , \quad P/EI = k^2$
$y = y_h + y_p$
$y_h = A \cos kx + B \sin kx$

$y_p \qquad r(x) = M_0 / EI$
$y_p = c \qquad y''_p = 0$
$0 + k^2\ c = M_0 / EI$
$c = M_0 / k^2 EI = M_0 / PEI = M_0 / p$
$\mathbf{y_p = M_0 / p}$



$y = A \cos kx + B \sin kx + M_0 / p$
$y(0) = 0$
$0 = A \cos 0 + B \sin 0 + M_0 / P$
$\mathbf{A = - M_0 / P}$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Example:

FIXED END

$y = -M_0 / P \cos kx + B \sin kx + M_0 / p$

$y' = +M_0 k / P \sin kx + Bk \cos kx$

$y'=0$ at $x=0$

$0 = M_0\, k / P * \sin 0 + B\, k\cos 0$

$Bk = 0 \;,\quad k \neq 0 \;,\quad B = 0$

$y = -M_0 / P * \cos kx + M_0 / P$

$y = M_0 / p * (1 - \cos kx)$

$y(L) = 0$

$0 = M_0 / p * (1 - \cos kL)$

$\mathbf{M_0 / p \neq 0}$

$1 - \cos kL = 0$

$\cos kL = 1 = \cos n\pi \qquad n = 2, 4, 6, \ldots\ldots\ldots$

$kL = n\pi$

$k^2 = n^2\pi^2 / L^2 = k^2$

$P = n^2\pi^2 EI / L^2$

$P = Pcr \quad \text{if} \quad n = 2$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Beams on elastic foundation:

$d^4y/dx^4 + P\, d^2y / EI\, dx^2 + k / EI * y = w(x) / EI$

$d^4y/dx^4 + k / EI * y = w(x) / EI$

$w(x) = w \quad , \quad 0 \le x \le L$

Bcs $\quad$ **$y(0) = y(L) = 0$**

$y''(0) = y''(L) = 0$

Putting $k / EI = 4n^4$

$y = y_h + y_p$

y_h

$\lambda^4 + 4n^4 = 0$

$(\lambda^4 + 4n^2\lambda^2 + 4n^4) - 4n^2\lambda^2 = 0$

$(\lambda^2 + 2n^2)^2 - 4n^2\lambda^2 = 0$

$((\lambda^2 + 2n^2 - 2n\lambda)(\lambda^2 + 2n^2) + 2n\lambda) = 0$

$((\lambda^2 - 2n\lambda + 2n^2)(\lambda^2 + 2n\lambda + 2n^2) = 0$

$\lambda^2 - 2n\lambda + 2n^2 = 0$ OR $\lambda^2 + 2n\lambda + 2n^2 = 0$

OR

$\lambda_{1,2} = n \pm ni \qquad \lambda_{3,4} = -n \pm ni$

$y_h(x) = (A\cos nx + B\sin nx)\, e^{nx} + (C\cos nx + D\sin nx)\, e^{-nx}$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Beams on elastic foundation:

$y_p = \quad r(x) = w / EI$

$y_p = c \qquad y''_p = 0 \qquad y'' = 0$

$0 + k / EI * c = w / EI \qquad c = w / k$

$$\mathbf{y = (A \cos nx + B \sin nx)\, e^{nx} + (C \cos nx + D \sin nx)\, e^{-nx} + w / k}$$

ويكمل الحل حسب B.Cs لأيجاد قيم الثوابت A B C D.

$m y'' + c y' + k y = f(t)$

Dynamic load: حمل يتغير مع وحدة الزمن (t)

Static load: يتغير مع x وثابت مع الزمن (t)

Where

m is mass

c is damping ratio

k is stiffness

c ثابت للمادة الواحدة ومختلف لكل مادة متغيرة

I و E يعتمد على مقطع المادة k

y'' تعجيل * الكتلة = قوة

y' سرعة * c = قوة

نحتاج إلى إزاحة إبتدائية وسرعة إبتدائية أقل من مرتبة المعادلة بواحد

الحركة لا تحدث إلا بوجود السرعة ، والإزاحة الأبتدائية مع السرعة سوية لحدوث الحركة

$y(0) = ?$

$y'(0) = ?$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

Dynamic load

ممكن c = صفر أي قليلة جداً

m لا يمكن أن يكون صفر و k لا يمكن أن يكون صفر

Where $c = 0$ undamped vibration

When $F(t) = 0$ Free vibration

$f(t) \neq 0$ forced vibration

$c \neq$ damped vibration

free – undamped vibration when

$c = 0$ & $f(t) = 0$

$m\ y'' + ky = 0$

$y'' + k / m * y = 0$

$\lambda^2 + k / m = 0$

إعداد: أ.م.د. سلوى مبارك عبد الله
طباعة: م.م. تقى وليد أحمد

كيف نوجد A, B بالسرعة الإبتدائية أو الأزاحة الأبتدائية

$$y'(0) = 0$$

$$P_0 \sin\frac{\pi}{2} = A\cos 0 + B\sin 0$$

$$A = P_0 \sin\frac{n\pi}{2}$$

$$y'(0) = 0$$

$$y' = -w\ A\sin t + w\ B\cos t$$

$$0 = Bw \qquad w \neq 0 \qquad \therefore B = o$$

$$\therefore\ y(t) = P_0 \sin\frac{n\pi}{2}\ \cos\ wt$$