وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الفيزياء
المرحلة:الثانية
المادة: الصوت والحركة الموجية

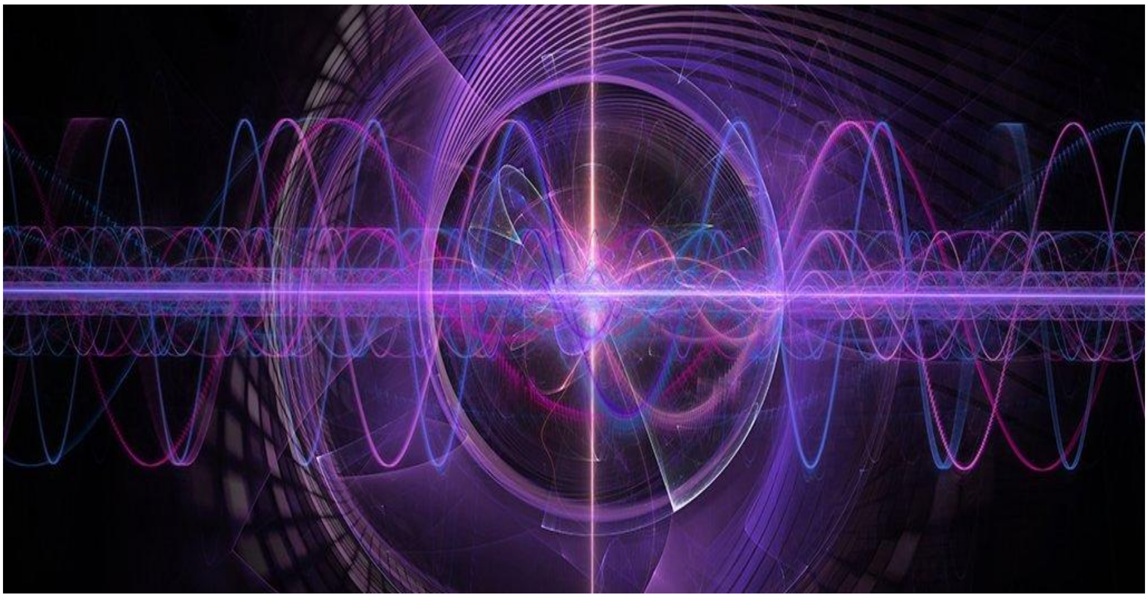
محاضرات فيزياء الصوت والحركة الموجية

د.محسن وليد محمد

للعام الدراسي 2021-2022

مفاهيم أساسية في الحركة الموجية

الفصـــل الأول



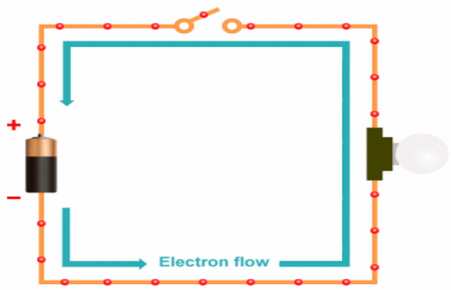
1-1 المقدمة

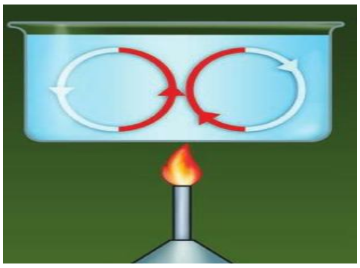
يعد موضوع الحركة الموجية من أهم فروع الدراسة في علم الفيزياء. فالكثير من الظواهر الطبيعية تنطوي على صفة موجية. والحقيقة إن محيطنا يعج بمختلف أنواع الموجات، منها ما هو مألوف وسهل المشاهدة كالموجات على سطح الماء ومنها ماله تطبيقات واسعة ويتعذر مشاهدتها كالموجات الكهرومغناطيسية. إن ما نسمعه يصلنا عبر موجات الصوت، وما نراه يصلنا عبر موجات الضوء. والطاقة التي تزودنا بها الشمس تصلنا عبر الموجات أيضا، وهناك أشكال أخرى كثيرة ومختلفة للموجات. وعلى الرغم من التباين الظاهر بين مختلف أنواع الموجات إلا أن جميعها تشترك بسمة أساسية واحدة هي أنها وسيلة لانتقال الطاقة. فضلا عن ذلك فان جميع الحركات الموجية تكاد تشترك في أسلوب التعبير الرياضي عنها رغم اختلاف المعنى الفيزيائي للرموز المستخدمة للتعبير عن ذلك. لذلك فان دراسة سلوك أي نوع من هذه الأمواج يساعد كثيرا في فهم سلوك الأنواع الأخرى.

1-2 وسائل انتقال الطاقة

تنتقل الطاقة في الطبيعة من موقع لآخر في بطريقتين : الأولى تتم بواسطة انتقال المادة (الكتلة) والثانية تتم بواسطة انتقال الموجة.

في الطريقة الأولى تنتقل الطاقة من موقع إلى آخر مع انتقال الكتلة (المادة) كما في سيل الالكترونات المسؤولة عن انتقال الطاقة الكهربائية كما هو موضح في الشكل 1-1، وحركة جزيئات المائع المسؤولة عن نقل الطاقة الحرارية كما في طريقة الحمل الحراري كما موضح في الشكل 2-1.





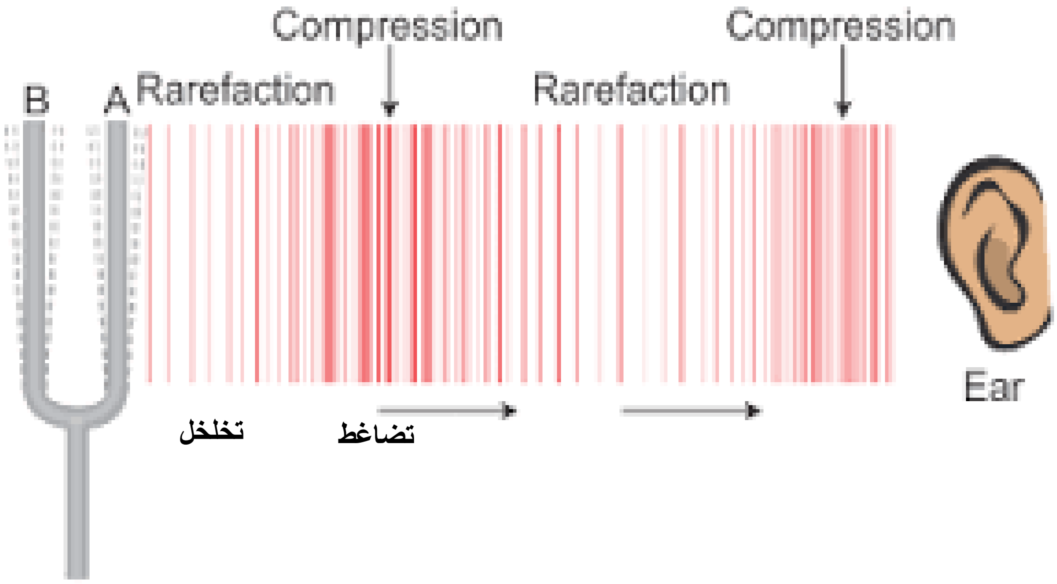
شكل 1-1 يبين انتقال الالكترونات ضمن دائرة كهربائية شكل 2-1 يبين انتقال الطاقةالحرارية بالحمل

وفي الطريقة الثانية تنتقل الطاقة من موقع إلى آخر عن طريق الموجة دون أن يصاحبها أي انتقال في الكتلة ، والموجة يمكن أن تنتقل في وسط مادي أو في الفراغ كما في موجات الصوت والموجات الضوئية.

1-3 ما هي الحركة الموجية؟

الحركة الموجية هي اضطراب لحظي ينتقل من نقطة الى أخرى عبر وسط مادي او في الفراغ وينتقل في الوسط المحيط بمصدر الاضطراب في اتجاه معين وبسرعة معينة ويقوم بنقل الطاقة في اتجاه انتشاره.

المقصود بالاضطراب هو نمط لحالة فيزيائية يولده مصدر متحرك مثال ذلك الشوكة الرنانة المهتزة تولد اضطراب في الهواء المحيط بها نمطه على شكل تضاغطات وتخلخلات وهذه الحالة الفيزياوية المتولدة في الهواء تنتقل إلى نقاط أخرى دون انتقال جزيئات الهواء من مواضع توازنها.



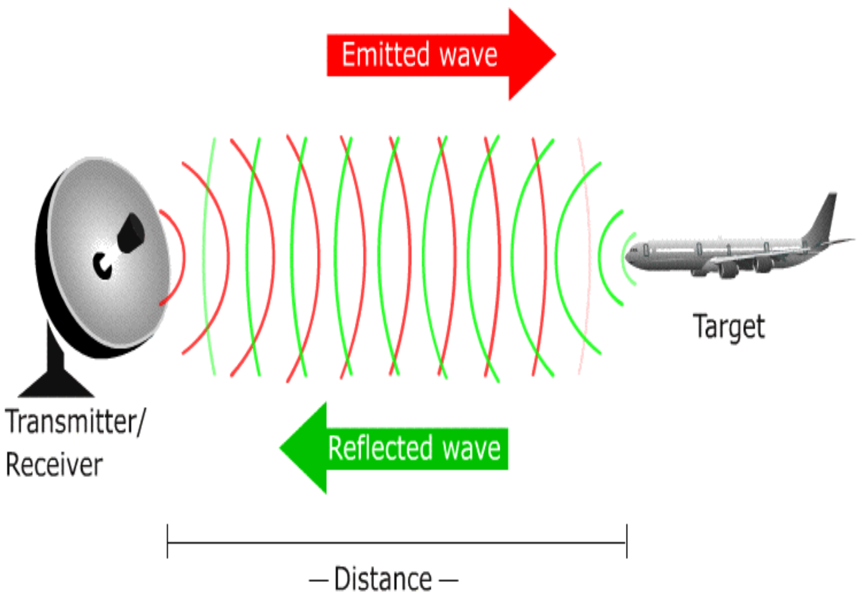
شكل 3-1 يبين انتقال الصوت الناتج عن اهتزاز شوكه رنانة

4-1 أنواع الحركة الموجية

يمكن تقسيم الحركة الموجية في الفيزياء إلى ثلاثة أنواع رئيسية هي:

1.الحركة الموجية الميكانيكية: وهي تلك التي تحتاج بالضرورة إلى وسط مادي لانتقالها وقد يكون هذا الوسط صلبا أو مائعا (سائلا أو غازا) والأمثلة على هذه الموجات هي موجات الصوت والموجات على سطح الماء والموجات الزلزالية والموجات في الأسلاك والقضبان المعدنية والموجات في الأوتار المهتزة والموجات في الأغشية والرقائق المهتزة والموجات في هياكل الأبنية والمكائن.

2.الحركة الموجية الكهرومغناطيسية: وهي تلك التي لا تحتاج بالضرورة إلى وسط مادي لانتقالها، فهي تنتقل في الفراغ كما تنتقل في بعض الأوساط المادية، مثل جميع أمواج الطيف الكهرومغناطيسي كموجات الراديو وموجات التلفزيون وموجات الرادار كما في الشكل 1-4 والموجات الدقيقة (المايكروويف) والموجات تحت الحمراء وموجات الضوء وموجات الأشعة فوق البنفسجية وموجات الأشعة السينية وموجات أشعة كاما.



شكل 1-4 موجات كهرومغناطيسية خاصة بالرادار.

3.الحركة الموجية المادية: وهي الصفة الموجية المصاحبة لحركة الجسيمات المادية. فقد دلت الدراسات النظرية للعالم دي برولي (deBroglie) وما أعقبه من اكتشاف العالمين دافيسون (Davisson) وجيرمر (Germer) لحيود الالكترونات إن الجسيم المتحرك يقرن بموجه. فالجسيم الذي كتلته m والمتحرك بسرعة v يكون مقرونا بموجة طولها الموجي λ هو

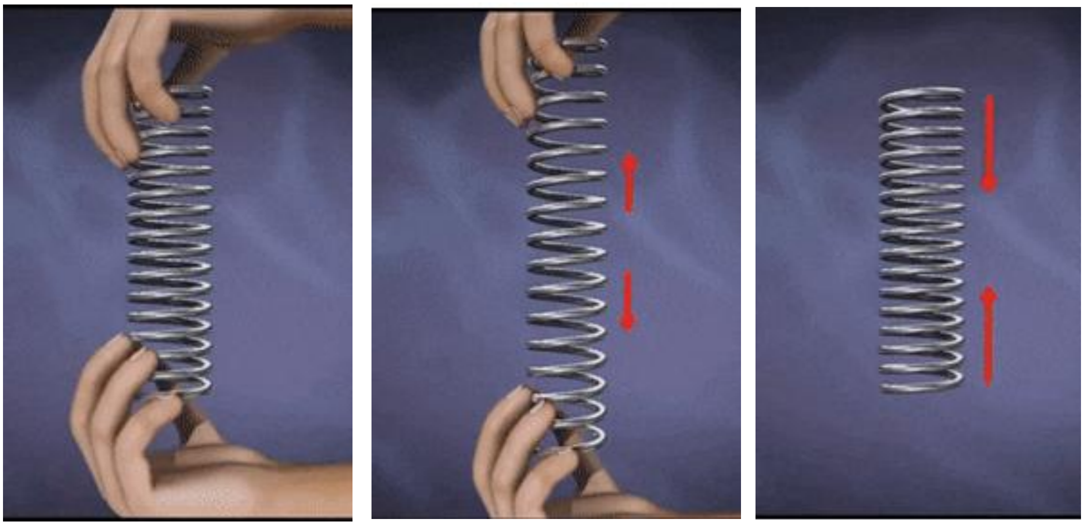
$$\lambda=h/mv \qquad (1)$$

حيث أن $h=6.626x10^{-34}J.S$ يمثل ثابت بلانك. وقد وجد بالتجربة أن الإلكترون المتحرك بطاقة حركية تعادل 150 eV يكون مقرونا بموجة طولها الموجي يساوي $0.1x10^{-9}m$ والنيترون المتحرك بسرعة 2200m/S يكون مقرونا بموجة طولها $0.14x10^{-9}m$. إن دراستنا في هذا الفصل ستقتصر على الحركة الموجية الميكانيكية فقط.والتي يشكل الصوت احد أهم أشكالها.

1-5 الخواص الأساسية لانتقال الحركة الموجية الميكانيكية

إن حدوث و انتقال الحركة الموجية الميكانيكية في أي وسط مادي يعزى إلى خاصيتين أساسيتين لذلك الوسط هي المرونة و القصور الذاتي.

خاصية المرونة: المقصود بمرونة الوسط هي خاصيته على مقاومة أي تشوه فيه و قابليته على استعادة شكله أو حجمه أو وضعة بعد زوال القوة ألمشوهه المؤثرة علية كما مبين في الشكل 1-5 .و القانون الذي يتحكم في سلوك المواد المرنة هو قانون هوك و الذي يشير إلى أن (أي قوة خارجية تسُلط على جسم ما تحدث فيه تشوها يؤدي إلى تغيير في الشكل أو الحجم أو كليهما، و يمكن التعبير عن قانون هوك بدلالة الإجهاد و المطاوعة.



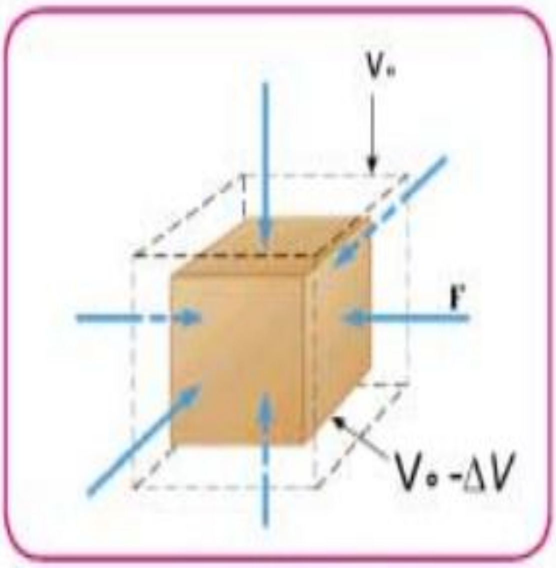
شكل 5-1خاصية المرونة لنابض حلزوني.

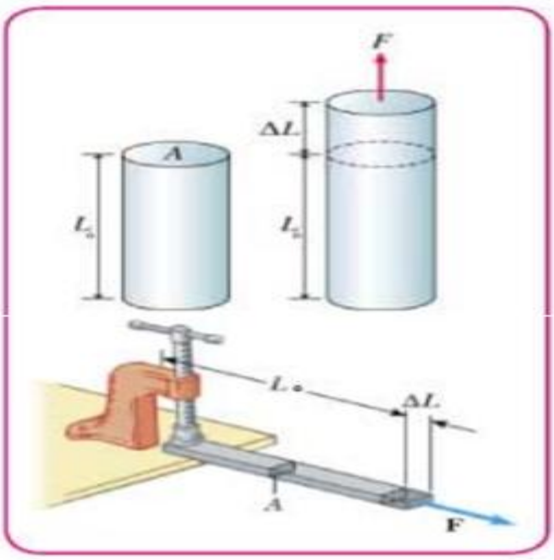
الإجهاد: هو القوة المسلطة على وحدة المساحات من السطح المعرض لتلك القوة و لذلك فان **الإجهاد = القوة \ المساحة**

المطاوعة:هي النسبة بين مقدار التشوه في الجسم الذي تسببه القوة المشوهة على بعده الأصلي قبل التشوه أي أن

المطاوعة = مقدار التشوه \ البعد الحقيقي

أن مقدار التشوه يمثل مقدار التغيير في الطول أو الحجم أو الشكل كما هو مبين في الشكل 6-1 أما البعد الأصلي فيمثل الطول الأصلي أو الحجم الأصلي للجسم.





شكل 6-1يبين المطاوعة الطولية (يمين) والمطاوعة الحجمية (يسار) .

أن العلاقة بين الإجهاد و المطاوعة ضمن حدود المرونة هو:

الإجهاد = ثابت x المطاوعة

حيث أن الثابت يسمى معامل المرونة

معامل المرونة = الإجهاد \ المطاوعة

خاصية القصور الذاتي:

تمثل صفة استمرارية الجسم أو أجزاء الوسط المادي على البقاء في حالة حركية ثابتة ما لم تؤثر علية قوة خارجية تغير تلك الحركة. أن القانون الذي يصف هذه الحالة هو قانون نيوتن الأول في الحركة و الذي يدعى بقانون الاستمرارية (كل جسم يبقى في حالة من سكون أو الحركة منتظمة على خط مستقيم ما لم يضطر لتغيير هذه الحالة بقوه خارجية تؤثر فيه.

يوصف أي جسم بدلالة كمية مادته التي تعرف بالكتلة، و كتلة الجسم تحدد مقدار مقاومته لتغيير حالته الحركية و علية فان هذه الخاصية تمثل القصور الذاتي لذا فان الكتلة هي المقياس الكمي للقصور الذاتي و غالبا ما يعبر عن خاصية الاستمرارية لأي جسم من خلال كتلة وحدة الحجوم أي الكثافة أي أن كثافة الوسط تحدد اثر القوة المؤثرة فيه و عليه فان القصور الذاتي لأي وسط مادي يزداد بازدياد كثافته .

1-6 سرعة انتقال الحركة الموجية الميكانيكية

أن سرعة انتقال الاضطراب الميكانيكي C في أي وسط مادي مرن تعتمد على معامل مرونته E و كثافته ρ أي أن $C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

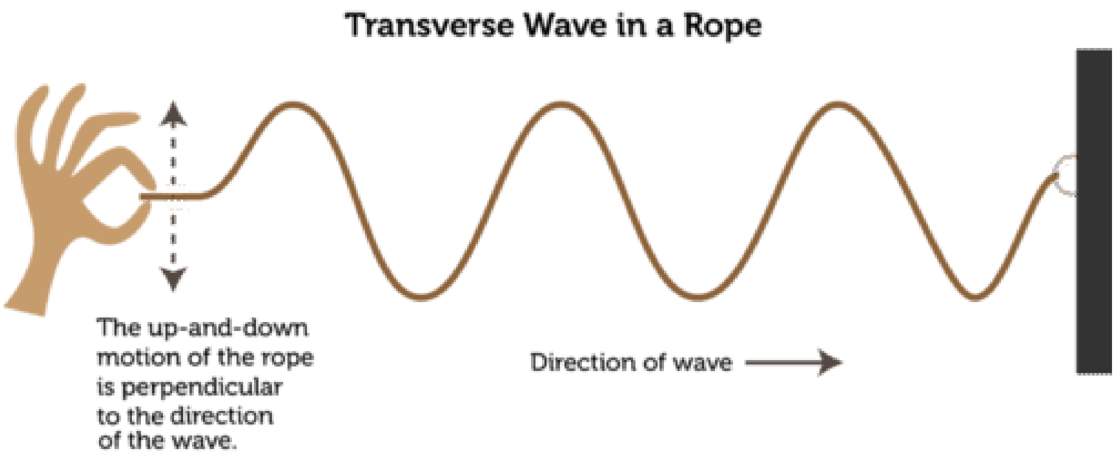
أن الاضطراب الميكانيكي ينتقل أسرع في المواد التي لها مرونة أعلى و كثافة اقل. في أي حركة موجية ميكانيكية ينتقل الزخم و الطاقة عبر الوسط المادي عن طريق اهتزاز جسيمات ذلك الوسط حول مواضع توازنها دون ان يصاحبها انتقال في جسيمات المادة آو في المادة ككل.

1-7تصنيف الموجات الميكانيكية

في المحاضرة السابقة قمنا بتقسيم الحركة الموجية في الطبيعة إلى ثلاثة أنواع، وذلك حسب خواص فيزيائية محددة. احد هذه الأنواع كان الحركة الموجية الميكانيكية . إن هناك أشكالا عديدة للحركة الموجية الميكانيكية يمكن تصنيفها بعدة طرق. إلا أن الطريقة الأساسية للتمييز بين مختلف أشكال الحركة الموجية الميكانيكية هو كيفية حركة جسيمات الوسط الناقل للموجة بالنسبة لاتجاه انتقال الموجة. واهم هذه الأنماط على الإطلاق حركتان هما الحركة الموجية المستعرضة والحركة الموجية الطولية.

1.الحركة الموجية المستعرضة: Transverse Waves Movement

في هذا الصنف من الحركة الموجية تهتز جسيمات الوسط باتجاه عمودي على اتجاه انتقال الموجة. مثل الموجات عبر الأوتار المهتزة عرضيا حيث أن مرور الموجة في الحبل المشدود أفقيا يؤدي إلى اهتزاز جزيئات الحبل إلى الأعلى والأسفل. لاحظ الشكل (1-7).

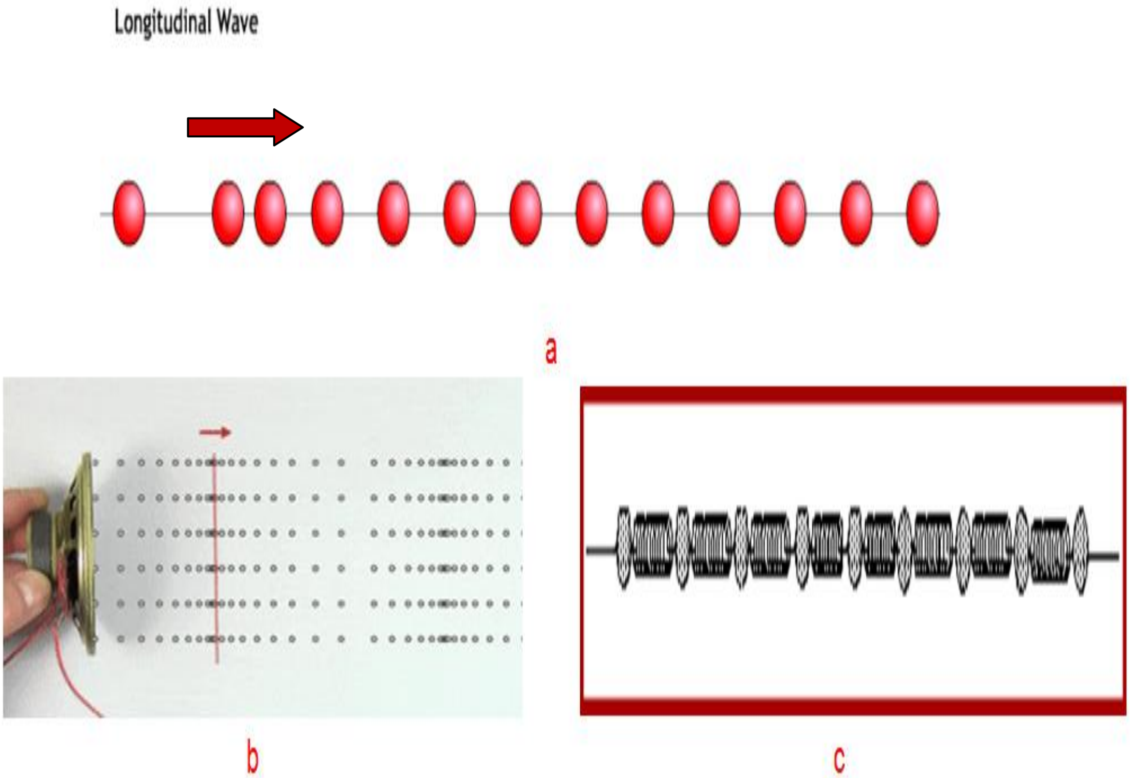


الشكل (1-7) يمثل نماذج لحركة موجية مستعرضة.

2.الحركة الموجية الطولية: Longitudinal Waves Movement

في هذا الصنف من الحركة الموجية تهتز جسيمات الوسط باتجاه مواز لاتجاه انتقال الموجة الشكل (1-8a). مثل الموجات الصوتية في الهواء كما في الشكل (1-8b) حيث إن مرور الموجة الصوتية (الموجة التضاغطية) يؤدي إلى اهتزاز جسيمات الوسط إلى الأمام و إلى الخلف بحركة ذهاب وإياب على طول خط انتقال الموجة.

كذلك الموجات التضاغطية في النابض الحلزوني تؤدي إلى اهتزاز لفاته على طول خط انتقال الموجة كما في الشكل (1-8c).

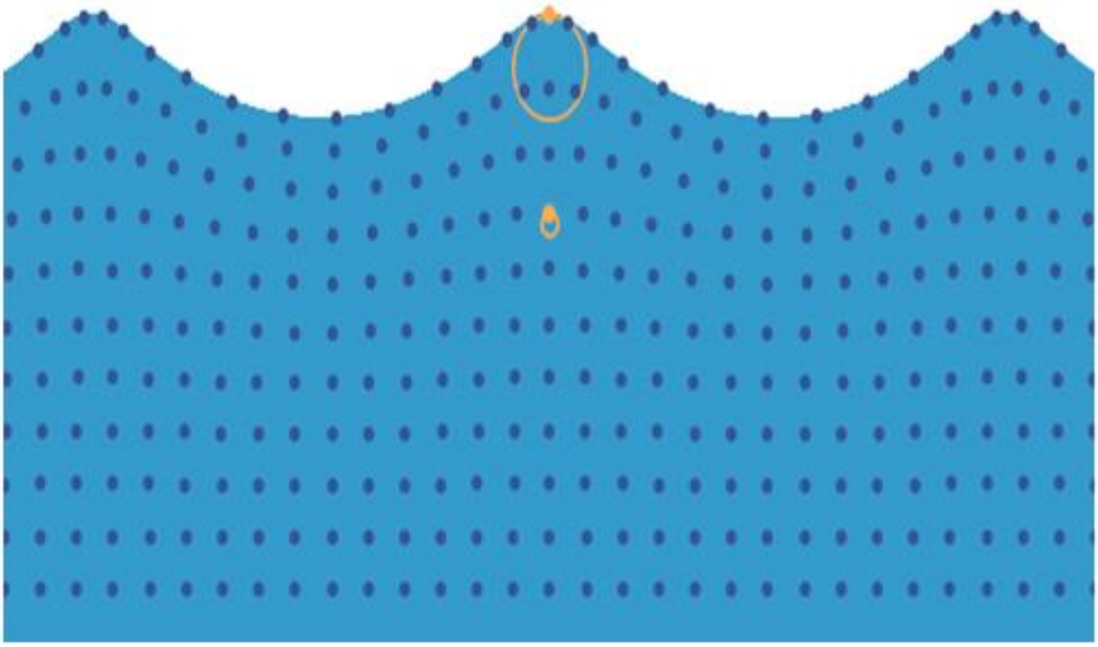


الشكل (1-8): a حركة موجية طولية,b:الموجات الصوتية,c:الموجات التضاغطية في النابض.

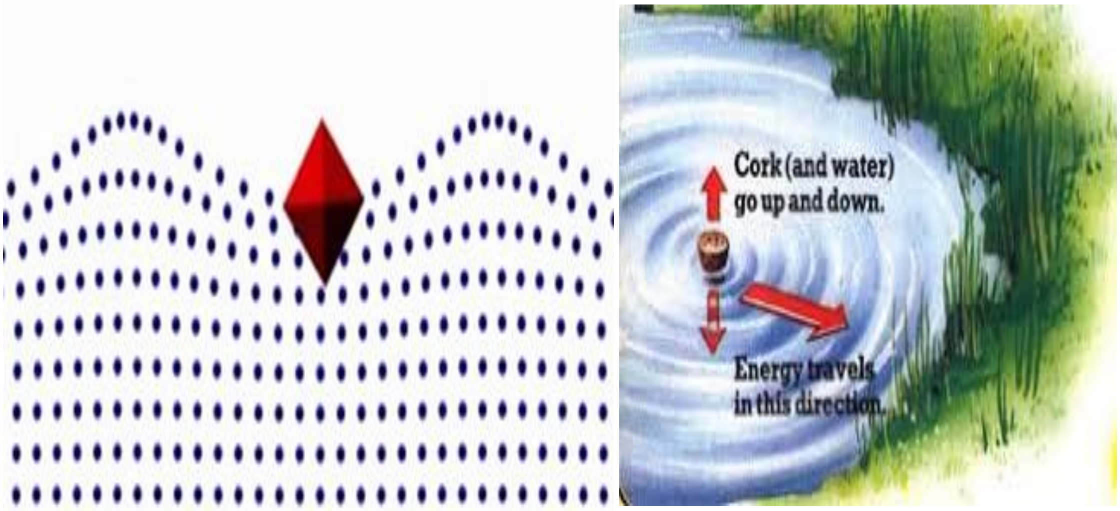
وفي الحقيقة لا يمكن اعتبار كل الموجات الميكانيكية على أنها طولية أو مستعرضة، فمثلا في الموجات المستقطبة دائريا في الحبل كما في الشكل (9-1) لا تكون حركة جميع جزيئاته مستعرضة تماما بل أن بعضها يتحرك طوليا.

الشكل (1-9): تتولد سلسلة من الموجات المستقطبة دائريا عندما يتحرك طرف الحبل حركة دورية دائرية.

وكذلك في الموجات على سطح الماء لا تكون حركة الجزيئات عمودية على سطح الماء بل أن مسار كل جزئ يكون على شكل مسار بيضوي، أي إذا توخينا الدقة تماما نلاحظ أن جزيئات الماء تتحرك إلى الأعلى والأسفل كما تتحرك إلى الأمام والى الخلف وهي ترسم مسارات بيضوية الشكل يكون محورها الرئيسي عموديا على سطح الماء كما موضح في الشكل (1-10a, b).



شكل (1-10a): يوضح حركة الموجات على سطح الماء



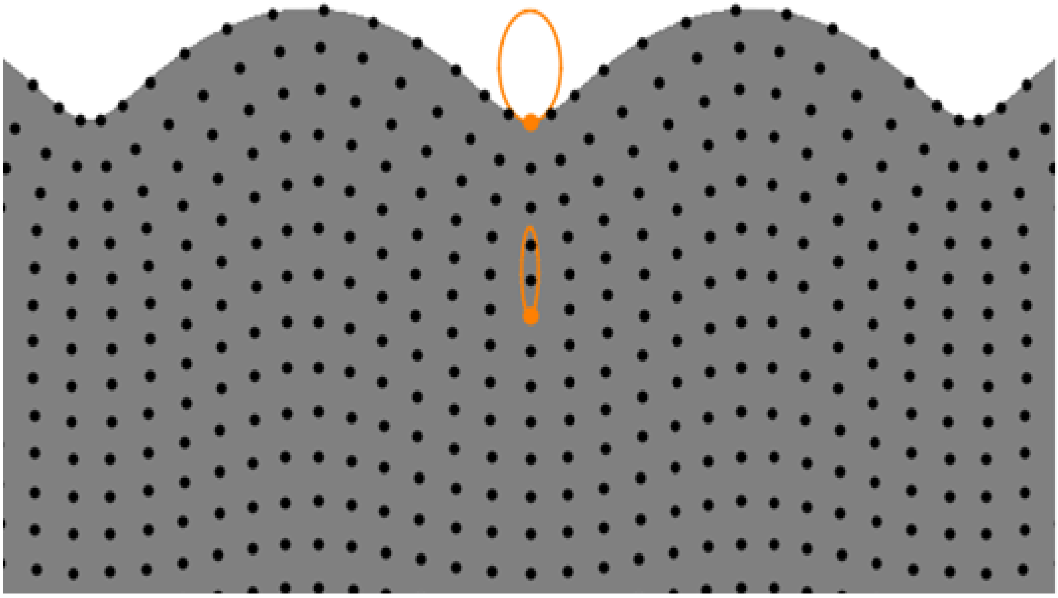
شكل (1-10b): يوضح حركة الموجات على سطح الماء في حالة وجود جسم يطفو على السطح

كما أن هناك طريقة أخرى لتصنيف الموجات الميكانيكية تبعا لعدد الأبعاد التي تنتقل فيها الموجة فمثلا هناك:

1.الموجات في بعد واحد 1D: وهي تلك التي تتقدم باتجاه واحد أي على امتداد محور واحد كالموجات المنتقلة على طول حبل مشدود أو نابض حلزوني (كما موضح في الشكل 11-1) أو قضيب معدني أو عمود هواء.

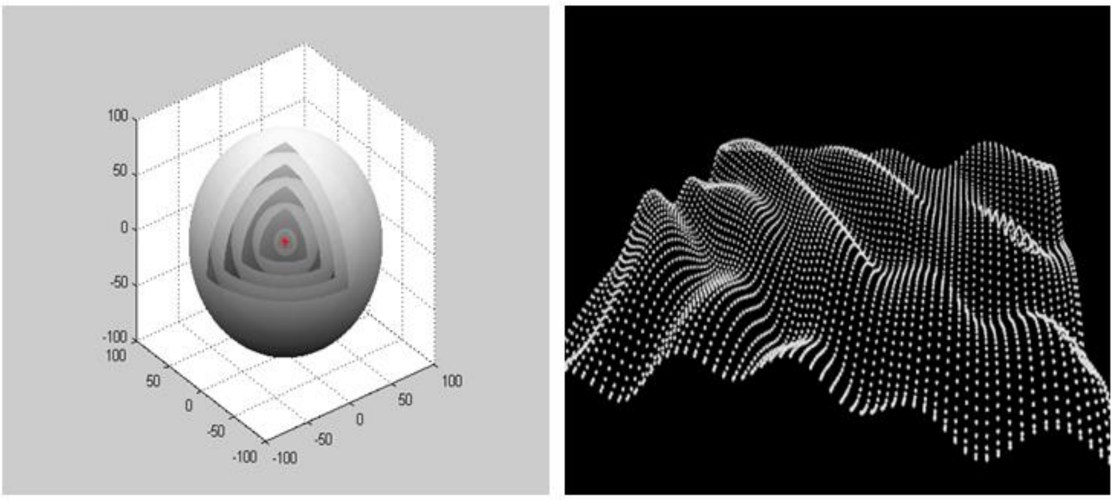
شكل (11-1): يوضح انتقال الموجات في نابض حلزوني

2.الموجات في بعدين 2D: وهي تلك التي تتقدم على امتداد سطح مستو يتعين بمحورين فقط كالموجات على سطح السوائل أو في الأغشية الرقيقة ذات البعدين (كما في الشكل 12-1).



شكل (1-12): يوضح انتقال الموجات على سطح السوائل في بعدين.

3.الموجات في ثلاثة أبعاد 3D:وهي تلك التي تتقدم في كل الاتجاهات ويمكن وصفها بدلالة ثلاثة محاور متعامدة كالموجات الصوتية في الهواء والموجات الزلزالية في الكرة الأرضية والموجات التضاغطية في مياه البحار والمحيطات (كما في الشكل 13-1). ويلاحظ في كل صنف من هذه الأصناف انه يتضمن خليطا من الموجات الطولية والمستعرضة. وهناك طرق أخرى لتصنيف الموجات الميكانيكية تبعا لأطوالها الموجية أو تردداتها أو سعتها.



شكل (1-13): يوضح انتقال الموجات في ثلاثة أبعاد كالموجات الزلزالية و الموجات التضاغطية في مياه البحار والمحيطات.

1-8مميزات الحركة الموجية الميكانيكية

تتميز الحركة الموجية بجميع أصنافها بما يلي:

1.هي شكل من الاضطراب في وسط مادي مرن يولده نمط من الحركة الدورية في جسيمات ذلك الوسط يسببها جسم متحرك يدعى بالمصدر.

2.شكل الاضطراب الذي يمثل شكل الموجة هو الذي ينتقل من نقطة إلى أخرى خلال الوسط بينما جسيمات ذلك الوسط لا تنتقل بل تتحرك بحركة دورية حول مواضع توازنها مماثلة لحركة المصدر.

3.سرعة انتقال الاضطراب (الموجة) في وسط ما هي مقدار ثابت يعتمد على خاصيتي المرونة والقصور الذاتي لذلك الوسط. مالم يكن ذلك الوسط مشتتا (dispersive medium).

4.سرعة انتقال الاضطراب (الموجة) يختلف عن سرعة حركة جسيمات الوسط الناقل للموجة.

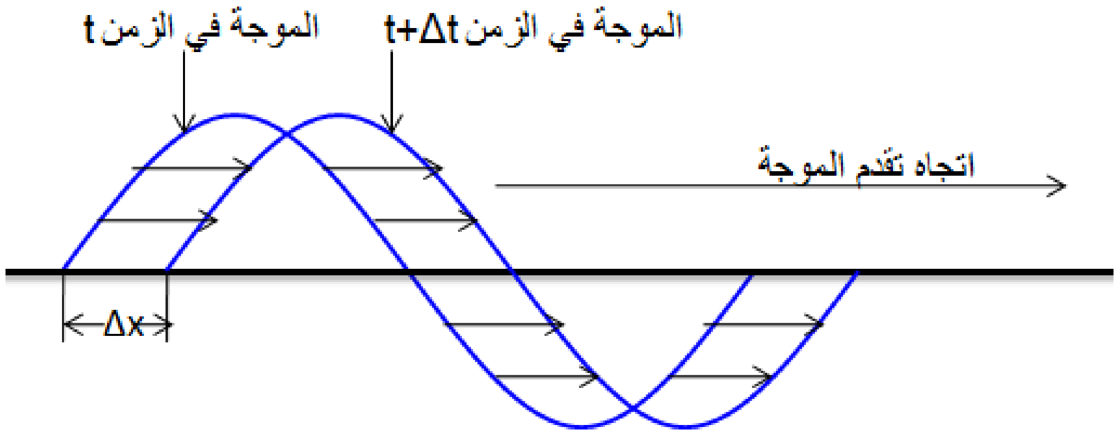
5.لا تتحرك جسيمات الوسط الناقل للموجة بطور واحد بل يتغير طور الحركة بانتظام من جسيم إلى آخر كلما ابتعدنا عن المصدر. فالجسيم الأقرب إلى المصدر يبدأ بالحركة الاهتزازية قبل الجسيم الأبعد عنه.

1-9التمثيل الرياضي للحركة الموجية

إن التعبير عن الحركة الموجية بصيغة رياضية يعني البحث عن الدالة التي تصف الموجة في أي موقع وزمن. ومثل هذه الدالة تدعى بـ (دالة الموجة). وهذه الدالة يمكن إيجادها على أساس حقيقتين هما

1.أن الموجة تتقدم بسرعة ثابتة (يرمز لها بالحرف v).

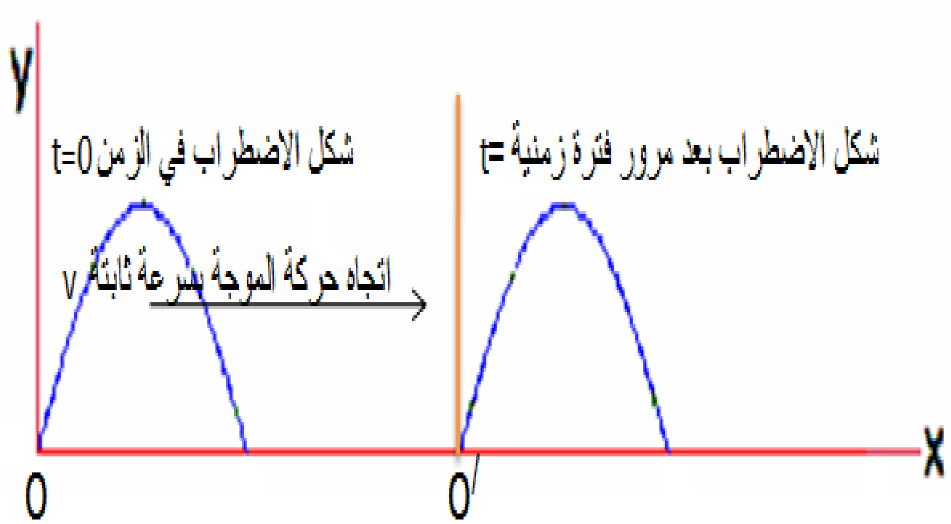
2.أن شكل الموجة يبقى ثابتا ولا يتغير أثناء التقدم ما لم يكن الوسط مشتتا والشكل (1-14) يبين شكلا من الاضطراب يتقدم بالاتجاه الموجب على المحور السيني x، الشكل (1-14) يبين أن الموجة تتقدم بسرعة ثابتة ولا يتغير شكلها أثناء التقدم. يلاحظ من هذا الشكل أن كل النقاط على الموجة في الزمن t قد تقدمت بنفس الاتجاه بمسافة واحدة Δx خلال نفس الفترة الزمنية Δt.



الشكل (1-14) يبين أن الموجة تتقدم بسرعة ثابتة ولا يتغير شكلها أثناء التقدم.

مما يشير إلى أن الموجة قد تقدمت دون أن يرافقها تشوه في الشكل وان سرعة تقدمها تساوي $v=\Delta x/\Delta t$ وهذه السرعة تكون ثابتة في الوسط الواحد. وللسهولة سنقتصر فيما يلي على تقديم وصف رياضي للحركة الموجية في بعد واحد. لنفرض أن لدينا سلكا مرنا طويلا جدا ومشدودا أفقيا، ونفرض انه كان في البداية ساكنا. نختار المحورين المتعامدين y,x ونتصور أن السلك واقع على امتداد المحور الأفقي x. ونقطة الأصل في الموضع o نفرض الآن أن السلك قد أعطي هزة خفيفة وسريعة في نقطة تقع على يسار نقطة الأصل، فيتشكل اضطراب يتقدم بسرعة ثابتة نحو اليمين ولا يتغير شكله أثناء التقدم. فإذا أخذت صورة سريعة للاضطراب أثناء

مروره فان السلك يبدو مشوها موضعيا على شكل منحني. هذا المنحني يشير إلى المظهر الجانبي للاضطراب الذي يمثل موجة مستعرضة كما مبين في الشكل (-1 15).



الشكل (15-1) يبين الاضطراب المتقدم على السلك. أن شكل الاضطراب يبقى ثابتا ويتحرك بسرعة ثابتة

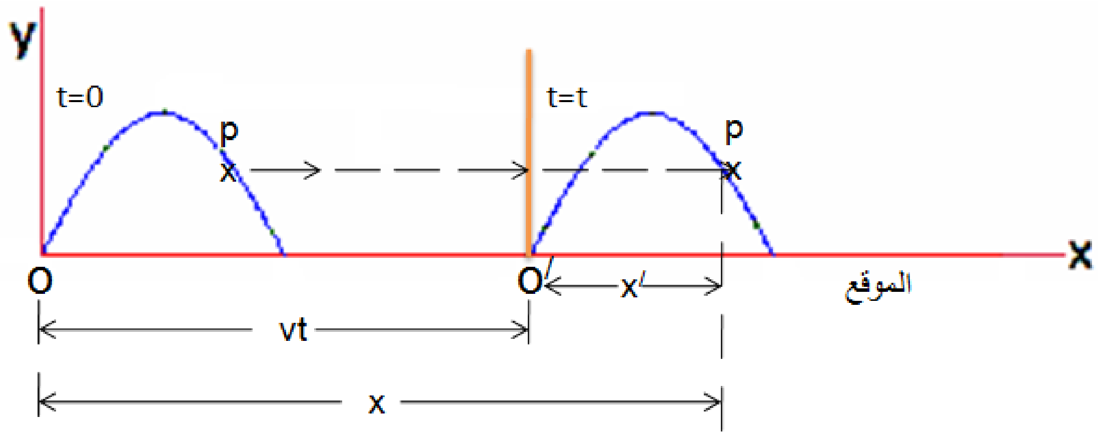
ويمكن اخذ قيمة الإزاحة المستعرضة y في أية نقطة x على امتداد السلك كمقياس للاضطراب (الموجة) في تلك النقطة في الزمن t. لنفرض أننا بدأنا رصد الاضطراب المتقدم في الزمن $t=0$. إن شكل الاضطراب في هذه اللحظة ($t=0$) يمكن وصفه من خلال دالة الموجة.

$$y=f(x) \qquad (2)$$

حيث x مقاسة بالنسبة لنقطة الأصل الثابتة o. ولما كان الاضطراب يتقدم في الاتجاه الموجب دون أن يتغير شكله وبسرعة ثابتة v فان دالة الموجة تصبح بعد مرور زمن t كالآتي

$$y=f(x')\qquad(3)$$

حيث x' مقاسة بالنسبة لنقطة الأصل المتحركة o'، o' تقع بالنسبة لشكل الاضطراب في الزمن t كما تقع o بالنسبة لشكل الاضطراب في بداية الرصد (t=0). إن المعادلتين (2) و (3) تصفان شكل نفس الاضطراب في زمنين وموقعين مختلفين. من الواضح انه ليس من المناسب وصف شكل الاضطراب المتحرك بالنسبة لنقطتين للأصل احدهما ثابتة o والأخرى مرافقة للاضطراب المتحرك o'. لذلك يفضل وصف شكل الاضطراب في أي موقع x وزمن t بالنسبة لنقطة الأصل الثابتة o. لهذا الغرض يجب إجراء تحويل لنقطة الأصل من o' إلى o.من الشكل (16-1) يلاحظ أن المسافة بين oo' تساوي vt.



الشكل (16-1) يبين كيف ترتبط نقطة الأصل المتحركة o' مع نقطة الأصل الثابتة o.

وان أي نقطة مثل p على الشكل الموجي في الزمن t يمكن تحديد موقعها على المحور السيني بالنسبة لنقطة الأصل الثابتة o من المعادلة:

$$x=vt+x^{/}$$

$$x^{/}=(x-vt) \qquad (4)$$

نعوض المعادلة (4) في المعادلة (3) فتصبح دالة الموجة كالآتي

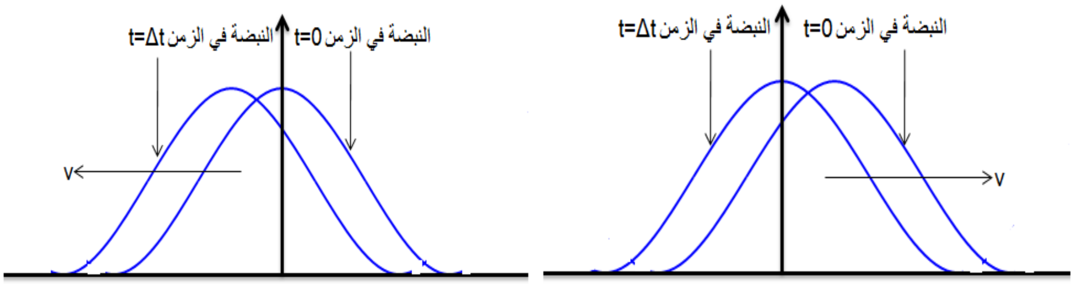
$$y=f(x-vt) \qquad (5)$$

هذه الدالة ذات أهمية خاصة في موضوع الحركة الموجية. إنها تعرف تماما أي موجة مستعرضة ثابتة الشكل تتحرك بسرعة منتظمة v في الاتجاه الموجب على امتداد المحور السيني. وبنفس الطريقة يمكن إيجاد دالة الموجة المستعرضة المتحركة بسرعة منتظمة v في الاتجاه السالب على امتداد المحور السيني، وهي

$$y=f(x+vt) \qquad (6)$$

$$y=a^3/(a^2+(x\pm vt)^2) \qquad (7)$$

حيث a مقدار ثابت. والإشارة الموجبة داخل القوس تشير إلى تحرك النبضة في الاتجاه السالب بينما الإشارة السالبة تشير إلى تحركها في الاتجاه الموجب على المحور السيني. وهيئة هذه النبضة موضح في الشكل (1-17).



(a) النبضة تتحرك نحو اليمين بسرعة ثابتة وشكلها ثابت تصفه المعادلة $y=a^3/(a^2+(x-vt)^2)$

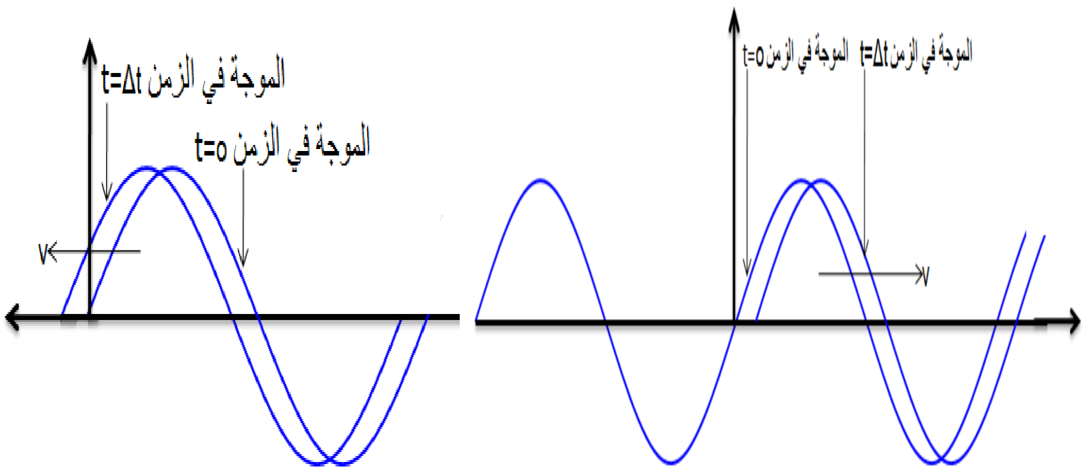
(b) النبضة تتحرك نحو اليسار بسرعة ثابتة وشكلها ثابت تصفه المعادلة $y=a^3/(a^2+(x+vt)^2)$

الشكل (1-17) يبين شكل النبضة في زمنين مختلفين t=0 وt=Δt عندما تتحرك نحو اليمين واليسار.

إن الدالة f قد تصف شكل موجي جيبي كما في المعادلة

$$y=b\sin k(x\pm vt) \quad (8)$$

حيث b وk ثوابت. والإشارة الموجبة داخل القوس تشير إلى تحرك الموجة من اليمين إلى اليسار والإشارة السالبة تشير إلى تحركها بعكس الاتجاه على امتداد المحور السيني. وهيئة هذه المعادلة موضح في الشكل (1-18) الآتي. وهناك أشكال كثيرة للموجات يمكن وصف أي منها من خلال دوال مرفوعة لقوى معينة أو دوال جيبية أو آسية أو غيرها. والمهم في جميع هذه الدوال أن يعبر عن الإزاحة المستعرضة y بدلالة ($x\pm vt$)، ويفترض طبعا في جميع هذه الموجات أنها تتحرك بسرع منتظمة وتحتفظ بشكلها ثابتا خلال الحركة (في حالة كون الوسط مشتت dispersive medium فان سرعة الموجة لا تكون ثابتة بل تتوقف على الطول الموجي وشكل الموجة لا يكون ثابتا في هذه الحالة).



(a) النبضة تتحرك نحو اليمين بسرعة ثابتة وشكلها ثابت تصفه المعادلة $y=a^3/(a^2+(x-vt)^2)$

(b) النبضة تتحرك نحو اليسار بسرعة ثابتة وشكلها ثابت تصفه المعادلة $y=a^3/(a^2+(x+vt)^2)$

الشكل (1-18) يبين شكل النبضة في زمنين مختلفين $t=0$ و$t=\Delta t$ عندما تتحرك نحو اليمين واليسار.

1-10 المعادلة العامة للحركة الموجية

إن المعادلتين (5) و (6) هما دالتان لمتغيرين. ولإيجاد y يجب أن نعرف قيم كل من t,x (وطبعا يجب أن نعرف أيضا شكل الموجة الذي تحدده الدالة f وسرعة انتقالها v لكنهما ثابتان). وفيزيائيا هذا يعني انه يمكن تحديد الاضطراب (الإزاحة) y في نقطة على السلك إذا علمنا موقع تلك النقطة x والزمن t الذي نرغب فيه تحديد الاضطراب. إن المعادلتين (5) و (6) تصفان نفس الشكل الموجي المتحرك في اتجاهين متعاكسين، لذا فان أيا من المعادلتين لا تقدم وصفا كاملا للحركة الموجية، لذلك ينبغي البحث عن معادلة واحدة تعطي وصفا عاما كاملا للحركة الموجية بغض النظر عن شكل الموجة واتجاه انتقالها. ويمكن الحصول على مثل هذه المعادلة إذا تخلصنا من أي إشارة إلى دالة الموجة f واتجاه انتقالها. في المعادلة (5) نفرض أن:

$$z=x-vt \qquad (9)$$

من المعادلتين (5) و (9) نحصل على

$$y=f(x-vt)=f(z) \qquad (10)$$

نفاضل المعادلة (10) بالنسبة للزمن t فينتج

$$(\partial y/\partial t)=(df/dz).(\partial z/\partial t) \qquad (11)$$

(حيث يشير الرمز ∂ للتفاضل الجزئي و d للتفاضل الكلي). إن الدالة (df/dz) تشير إلى مشتقة f بالنسبة لكل المقدار argument $(x-vt)$. لكن من المعادلة (9) نجد أن

$$(\partial z/\partial t)=-v \qquad (12)$$

لذلك فعند تعويض المعادلة (12) في المعادلة (11) نحصل على

$$(\partial y/\partial t)=-v(df/dz) \qquad (13)$$

وبالمثل نفاضل y بالنسبة لـx فينتج

$$(\partial y/\partial x)=(df/dz).(\partial z/\partial x) \tag{14}$$

ألان نفاضل المعادلة (9) بالنسبة لـx فنجد أن

$$(\partial z/\partial x)=1 \tag{15}$$

بتعويض المعادلة (15) في المعادلة (14) فنحصل على

$$(\partial y/\partial x)=(df/dz) \tag{16}$$

من المعادلتين (13) و (16) نحصل على

$$(\partial y/\partial t)=-v(\partial y/\partial x) \tag{17}$$

الآن نكرر نفس العمل، ولكن نبدأ من المعادلة (6) نفرض أن

$$w=x+vt \tag{18}$$

من المعادلتين (6) و (18) نحصل على

$$y=f(x+vt)=f(w) \tag{19}$$

نفاضل المعادلة (19) بالنسبة للزمن t فينتج

$$(\partial y/\partial t)=(df/dw).(\partial w/\partial t) \tag{20}$$

لكن من المعادلة (20) نجد أن

$$(\partial w/\partial t)=+v \tag{21}$$

لذلك فعند تعويض المعادلة (21) في المعادلة (20) نحصل على

$$(\partial y/\partial t)=+v(df/dw) \tag{22}$$

ثم نفاضل y بالنسبة لـx فنحصل على

$$(\partial y/\partial x)=(df/dw).(\partial w/\partial x) \qquad (23)$$

نفاضل المعادلة (18) بالنسبة لـx فنجد أن

$$(\partial w/\partial x)=1 \qquad (24)$$

بتعويض المعادلة (24) في المعادلة (23) فنحصل على

$$(\partial y/\partial x)=(df/dw) \qquad (25)$$

من المعادلتين (22) و (25) نحصل على

$$(\partial y/\partial t)=+v(\partial y/\partial x) \qquad (26)$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة (17) نجد أنهما متشابهتان ولكنهما غير متطابقتين بسبب اختلاف الإشارة الناتجة من اختلاف اتجاه انتقال الموجة في المعادلتين (5) و (6). الآن نحاول التخلص من اختلاف الإشارة. نفاضل المعادلة (13) مرة ثانية بالنسبة للزمن t فينتج

$$(\partial^2 y/\partial t^2)=-v(\partial/\partial t)(\partial f/\partial z) =-v(d/dz)(df/dz)(\partial z/\partial t) \qquad (27)$$

لكن:

$$(d/dz)(df/dz)=(d^2f/dz^2) \qquad (28)$$

فتصبح المعادلة (27) كالآتي

$$(\partial^2 y/\partial t^2)=-v(d^2f/dz^2)(\partial z/\partial t) \qquad (29)$$

بتعويض المعادلة (12) في المعادلة (29) نحصل

$$(\partial^2y/\partial t^2)=v^2(d^2f/dz^2) \qquad (30)$$

وبالمثل نفاضل المعادلة (16) مرة ثانية بالنسبة لـx فنجد أن

$$(\partial^2y/\partial x^2)=(\partial/\partial x)(\partial f/\partial z)=(d/dz)(df/dz)(\partial z/\partial x) \qquad (31)$$

لكن

$$(d/dz)(df/dz)=(d^2f/dz^2) \qquad (32)$$

فتصبح المعادلة (31) كالآتي

$$(\partial^2y/\partial x^2)=(d^2f/dz^2)(\partial z/\partial x) \qquad (33)$$

بتعويض المعادلة (15) في المعادلة (33) نحصل على

$$(\partial^2y/\partial x^2)=(d^2f/dz^2) \qquad (34)$$

وأخيرا من المعادلتين (30) و (34) نحصل على

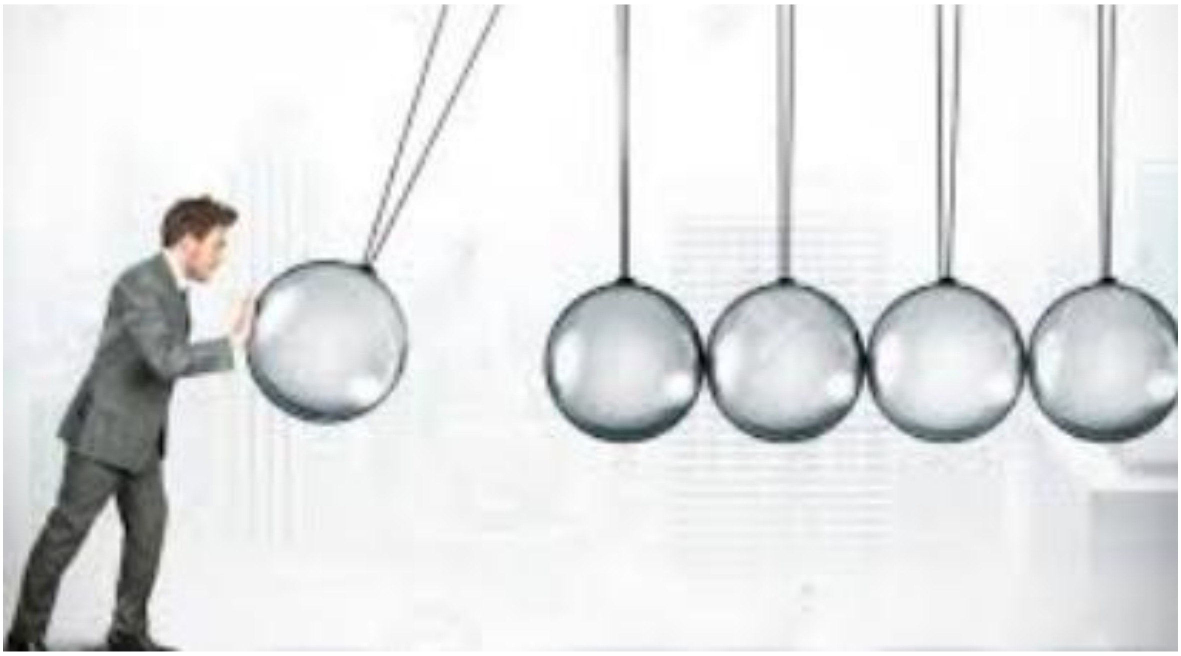
$$(\partial^2y/\partial t^2)=v^2(\partial^2y/\partial x^2) \qquad (35)$$

وهذه هي المعادلة العامة للحركة الموجية في بعد واحد إنها معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية وتكمن أهمية هذه المعادلة بالنسبة للموجات الخاضعة لها أنها مستقلة تماما عن شكل الموجة واتجاه انتقالها وكثيرا ما تظهر هذه المعادلة لتمثل مختلف أنواع وأصناف الحركات الموجية في الفيزياء.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الفيزياء
المرحلة:الثانية
المادة: الصوت والحركة الموجية

الفصل الثاني

نظرية الاهتزاز الحـر



مدرس المادة: د.محسن وليد محمد

نظرية الاهتزاز الحر

تعاريف عامة

الذبذبة الكاملة : هي حركة الجسم التي يقطع فيها المسار ذهابا وإيابا.

مدة (نقطة) الذبذبة : هي الزمن اللازم لذبذبة كاملة.

التردد f : هو عدد الذبذبات التي يصنعها الجسم المهتز في وحدة الزمن ويقاس بالهيرتز (ذبذبة/ثانية)

الطول الموجي λ: المسافة الفاصلة بين نقطتين متتاليتين تتحركان بنفس الشكل والاتجاه والطور عندما تكون سرعة الموجة v ثابتة فالموجة تقطع مسافة قيمتها λ بزمن مقداره t حيث $\lambda = v.\,t$

الإزاحة : هي بعد الجسم عن موضع الاستقرار في أي لحظة يرمز لها بالرمز (x).

سعة الموجة (الاهتزاز) : هي أقصى إزاحة للجسم المهتز عن موضع الاستقرار ، وسعة الاهتزاز لنقطة ما تعتمد على بعد النقطة عن نقطة الأصل (x) وعلى الزمن (t) من بدء الحركة.

سرعة الموجة : المسافة التي تقطعها الموجة في الثانية الواحدة.

الطور وفرق الطور: هو الموقع النسبي للنقاط المختلفة في الموجات. وتحسب زاوية الطور (φ) لنقطة تبعد أفقياً من الصفر (o) مسافة (x) بالعلاقة:(أي إن الطور هو النقاط التي يمر بها الجسم أثناء تذبذبه)

$$\varphi = \frac{2\pi x}{\lambda}$$

فـرق الطور :هو الفرق بين طوري موجتين لهما نفس التردد (بالتالي نفس طول الموجة).

الجسم المرن: هو الجسم الذي يستطيع استعادة وضعه أو شكله الأصلي بعد زوال القوة المؤثرة عليه.

خاصية القصور الذاتي: تمثل صفة استمرارية الجسم أو أجزاء الوسط المادي على البقاء في حالة حركية ثابتة ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تغير تلك الحالة.

إن كل جسم يمتلك خاصيتي المرونة والقصور الذاتي له القابلية على الاهتزاز إذا ما استثير .

الاهتزاز : هي حركة جسيم ذهابا وإيابا حول نقطه ثابتة تدعى بموضع التوازن والاستقرار

موضع الاستقرار : هي نقطة تنعدم فيها محصلة القوى المؤثرة في الجسيم المهتز وتمثل نقطة سكونه عندما يتوقف عن الاهتزاز

الجسيم : هو أي جسم صلب وصغير لا يتغير حجمه ويتغير كقطعة واحدة

الحركة الدورية : هي حركة جسم مهتز في مسار محدد تتكرر في فترات زمنية منتظمة وقد يكون مسار هذه الحركة بسيطا أو معقدا مثل الحركة الدائرية وحركة جسم معلق بنابض وحركة الشوكة الرنانة.

الحركة الاهتزازية : هي الحركة الدورية التي تنعكس دوراتها بفترات زمنية منتظمة أي إنها حركة ذهاب وإياب مثل حركة البندول البسيط والجسم المعلق بنابض.

الحركة التوافقية البسيطة : هي حركة جسم على خط مستقيم بتعجيل يتناسب طرديا مع إزاحته عن نقطة ثابتة تمثل موضع توازنه واتجاهه دائما متجها نحو تلك النقطة (أي موضع الاستقرار).

شروط الحركة التوافقية البسيطة

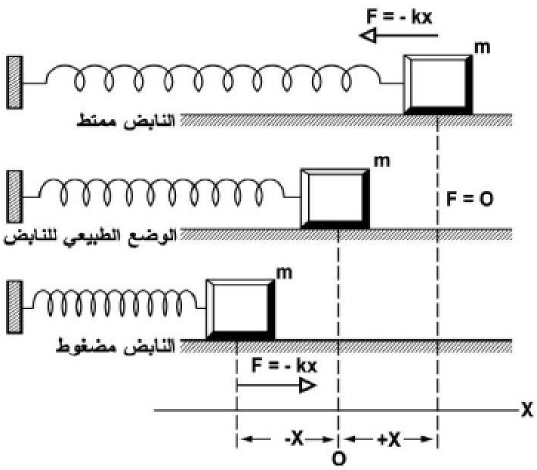
1- إن يكون مسار الجسم على خط مستقيم يمر بنقطة ثابتة تمثل موضع استقراره.

2- إن مقدار تعجيل الجسم يتناسب طرديا مع مقدار إزاحته عن موضع التوازن ، أي أن هناك قوة تدعى القوة المعيدة تحاول إعادة الجسم لموضعه الأصلي.

3- إن اتجاه تعجيل الجسم يكون دائما متجها نحو التوازن .

معادلة الحركة الخطية التوافقية البسيطة

إذا كان لدينا جسم كتلته m يتحرك علي سطح أفقي أملس بسبب تأثير نابض مربوط بالجسم كما في الشكل أدناه وقد أزيح الجسيم إزاحة آنية طفيفة مقدارها x من موضع التوازن وضمن حدود المرونة فان القوه التي تحاول إرجاع الجسم إلى موضع توازنه تدعى (قوة المعيدة)



من قانون هوك $F = -kx$ ....(1)

حيث k تمثل ثابت المرونة والإشارة السالبة تشير إلى إن اتجاه القوة يعاكس اتجاه زيادة الإزاحة.

وبتطبيق قانون نيوتن الثاني للجسيم المتحرك والذي ينص على (محصلة القوى المؤثرة في الجسيم ΣF يساوي حاصل ضرب حاصل ضرب كتلته m في التعجيل a)

$$\Sigma F = ma \ldots\ldots(2)$$

وبما إن محصلة القوى المؤثرة في الجسيم المهتز هي

$$\Sigma F = -k\,x$$

من المعادلة (2) نحصل على

$$\Sigma F = m\frac{d^2x}{dt^2} \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$-k\,x = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}\,x \quad \ldots\ldots(4)$$

وإذا فرضنا إن $w_\circ^2 = \frac{k}{m}$ حيث إن $w_\circ$ هي مقدار ثابت تمثل فيزياويا التردد الزاوي للمهتز وبالتالي

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w_\circ^2\, x \ldots..(5)$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية تدعى بمعادلة الحركة التوافقية البسيطة.

حل معادلة الحركة التوافقية البسيطة

لحل معادلة الحركة التوافقية البسيطة يجب إن نفرض معادلة مشابهة لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة إذا علمنا الشروط الابتدائية للحركة عند بدء الحركة $t=0$ و$x=0$ أي يبدأ الجسم بالحركة من موضع التوازن.

$$X = A\sin\alpha t \ldots\ldots\ldots\ldots..(6)$$

حيث A, a يمثل ثوابت اختيارية

$$\frac{dx}{dt} = A\alpha\cos\alpha t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2 \sin at$$

وبالتعويض عن x وعن $\frac{d^2x}{dt^2}$ في المعادلة (5) ينتج

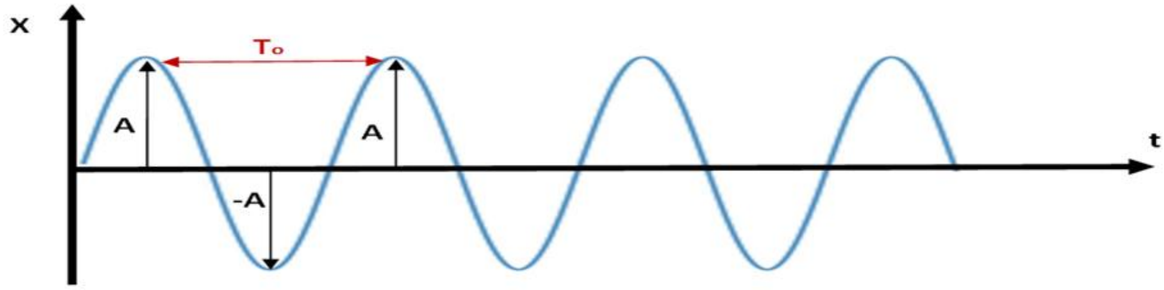
$$-\alpha^2 \sin\alpha t = -w_\circ^2 A\sin\alpha t$$

وبتساوي الطرفين يكون $\alpha = w_\circ$ وتكون المعادلة (6) كالآتي:

$$X = A\sin w_\circ\, t \ldots\ldots..(7)$$

وتمثل الحل الخاص لمعادلة الحركة التوافقية بتطبيق الشروط الابتدائية إن هذا الحل يشير إلى إن

الحركة الخطية التوافقية هي جيبيه يمكن تمثيلها بالمنحني الجيبي .



حيث إن x تمثل الإزاحة الخطية للجسيم من موضع التوازن في الزمن t

A تمثل سعة الاهتزاز ، $w_{\circ}$ يمثل التردد الزاوي للمهتز ويساوي $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$T_{\circ}$ يمثل الزمن الدوري للحركة الخطية التوافقية البسيطة ويساوي $T_{\circ} = \frac{1}{f_{\circ}}$

$f_{\circ}$ يمثل تردد الحركة الخطية التوافقية البسيطة

الزمن الدوري هو الزمن اللازم لإكمال دورة واحدة من X=A إلى X= -A ثم بعد ذلك إلى X=A مرة أخرى.

والحل أعلاه يحتوي على ثابت اختياري واحد لذلك يمثل حل خاص وليس حلا كاملا لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية حيث من المعلوم إن الحل العام لمثل هذا النوع من المعادلات يجب أن يتضمن ثابتين اختياريين، لذلك هناك حل آخر للمعادلة التفاضلية للمركبة الخطية التوافقية هو

$$X = B\cos b\,t \ldots \ldots .(8)$$

بأخذ المشتقة الأولى والثانية للمعادلة (8) نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = -bB\sin bt \ldots \ldots \ldots (9)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -b^2\,B\cos bt \ldots \ldots \ldots . (10)$$

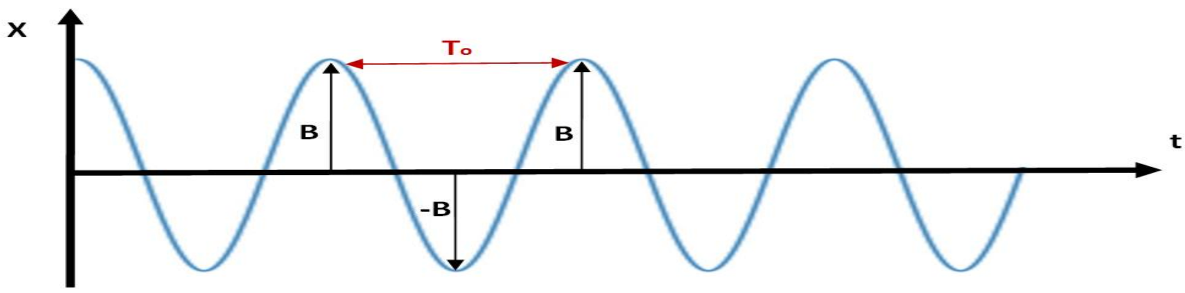
وبتعويض المعادلتين(8,10) في معادلة (5) نحصل على

$$-b^2\,B\cos b\,t = -w_{\circ}^{2}\,B\cos b\,t$$

$$w_{\circ} = b$$

$$\Rightarrow \quad X = B\cos w_{\circ}\,t \ldots \ldots .(11)$$

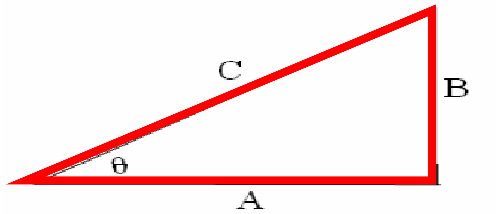
إن هذا الحل يمثل حلا خاصا لان يحتوي على ثابت اختياري واحد ويمكن تمثيله بمنحني الجيب تمام



ولما كانت المعادلتين (7,11) مستقلتين عن بعضهما البعض وكل منهما يمثل حلا خاصا يختلف عن الآخر لذلك يمكن اعتبار مجموع هذين المعادلتين حلا آخر للمعادلة (5) وبذلك يصبح

$$X(t) = A\sin w_{\circ} t + B\cos w_{\circ} t ......(12)$$

إن هذا الحل يحتوي على ثابتين A,B لذلك يمكن اعتباره حلا عاما وكاملا للمعادلة التفاضلية للحركة الخطية التوافقية البسيطة، ويمكن تبسيط هذا الحل بفرض إن A,B يمثلان طول ضلعين مثلثين قائمين في مثلث قائم الزاوية طول وتره C كما في الشكل أدناه



حيث إن $C^2 = A^2 + B^2$

وبضرب الطرف الأيمن من المعادلة(12) والقسمة على C نحصل على

$$X(t) = C\left[\frac{A}{C}\sin w_{\circ} t + \frac{B}{C}\cos w_{\circ} t\right]$$

من المثلثات لدينا

$$\sin\theta = \frac{B}{C} \quad , \quad \cos\theta = \frac{A}{C} \quad , \quad \tan\theta = \frac{B}{A}$$

نعوض هذه العلاقات في المعادلة نحصل على

$$X(t) = C\left[\cos\theta \sin w_{\circ} t + \sin\theta \cos w_{\circ} t\right]$$

$$\boldsymbol{X(t) = C\sin(w_{\circ} t + \theta)}$$

هذه المعادلة تمثل حلا عام لمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية لأنها تتضمن ثابتين اختياريين هما C,θ.

X : تمثل الإزاحة الخطية الآنية من موضع التوازن في الزمن t

C: تمثل سعة الاهتزاز وهي أقصى قيمة للإزاحة من موضع التوازن

$w_{\circ} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ تمثل التردد الزاوي

θ: تمثل الطور الابتدائي لحركة الجسيم ، أي تحدد موضع الجسم عندما t=0 حيث

وحدة الطور هي زاوية نصف قطرية $\theta = \frac{2\pi x}{\lambda}$

تدل الزاوية (wt+θ) على الطور الآني أو الطور الذي يحدد حالة الجسم المهتز في أي لحظة .

لو عوضنا عن θ و W بما يساويها فان:

$$X(t) = C\sin(2\pi f\ t - \frac{2\pi x}{\lambda})$$

$$X(t) = C\sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

فإذا كان K (ثابت الانتشار او العدد الموجي) = $\frac{2\pi}{\lambda}$ ، وعليه

معادلة الإزاحة

$$X(t) = C\sin(wt - \mathrm{kx})$$

كما إن

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 C\sin(wt - kx)$$

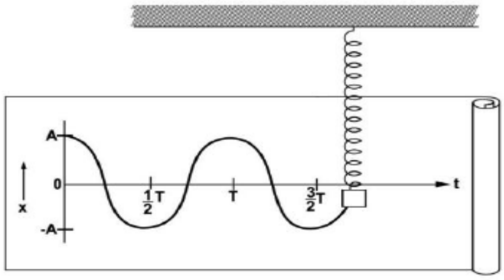
وتوضح معادلة التعجيل إن القوة المؤثرة على جسم ستؤدي إلى إزاحته في اتجاه معاكس وهذا يؤكد إن الجسم سيقوم بحركة اهتزازية بسيطة زمنها الدوري هو :

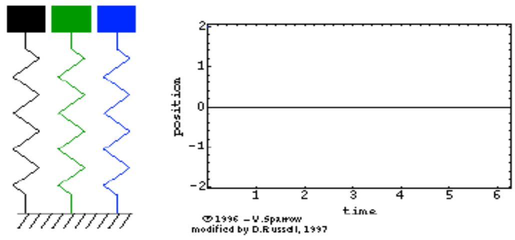
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

، وترددها

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

إن نموذج أو منظومة" الكتلة – النابض " تطبق عمليا بكثرة في صناعة بعض (الراسمات والمسجلات التشابهية) ومخططات القلب والدماغ، وكذلك في تسجيل اهتزازات القشرة الأرضية وبعض بيانات الأرصاد الجوية حيث يربط فيلم يقوم برسم الإشارة المسجلة كما موضح في الشكل التالي:





مثال // يتدلى جسم كتلته 50gm من نهاية نابض عندما يضاف جسم آخر كتلته 20gm إلى نهاية النابض ، يستطيل النابض 7cm أخرى ، 1- أوجد ثابت النابض 2- إذا ابعد الجسم الآخر عن النابض احسب زمن الدورة.

$$F = -kx \quad , \quad \Rightarrow \quad k = \frac{F}{x} = \frac{ma}{x} = \frac{20*980}{7} = 2800\ dy/cm^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad , \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{50}{2800}} = 2 * 3.14 * 0.13 = 0.816\ sec$$

السرعة الآنية والتعجيل الآني للمهتز التوافقي البسيط

وجدنا إن الإزاحة الآنية للمهتز التوافقي البسيط هي

$$X = C \sin (w_\circ t + \theta) \text{ --------- } 1$$

يمكن إيجاد السرعة الآنية من اشتقاق الإزاحة الآنية بالنسبة للزمن

$$V = \frac{dx}{dt} = C\, w_\circ \cos (w_\circ t + \theta) \text{ --------- } 2$$

سعة السرعة هي أقصى قيمة لسرعة المهتز ويرمز لها $v_\circ = c\, w_\circ$

$$V = V_\circ \cos (w_\circ t + \theta) \text{ --------- } 3$$

من المعادلة 1 نجد :

$$\frac{x}{c} = \sin (w_\circ t + \theta) \text{ --------- } 4$$

ومن المعادلة 2 نجد :

$$\frac{V}{CW_\circ} = \cos (w_\circ t + \theta) \text{ ------------- } 5$$

بتربيع طرفي المعادلتين 4 و5 نحصل على

$$\left(\frac{x}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{cw_\circ}\right)^2 = 1 \text{ ---------} 6$$

حيث إن :

$$[\sin (w_\circ t + \theta)]^2 + [\cos (w_\circ t + \theta)]^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad V = W_\circ \sqrt{C^2 - X^2}$$

يلاحظ من المعادلة أعلاه بان السرعة الآنية للجسيم المهتز تصبح صفرا عندما يصل أقصى إزاحة من موضع التوازن أي عندما تكون X=C وتكون السرعة في ذروتها عندما يمر الجسيم في نقطة توازنه أي عندما تكون X=0 .

ويمكن الحصول على التعجيل الآني للجسيم المهتز بأخذ المشتقة الثانية للإزاحة بالنسبة للزمن

$$A=\frac{d2x}{dt^2}= - cw_\circ^2 \sin(w_\circ t+ \theta)$$

حيث إن $cw_\circ^2$ يمثل سعة التعجيل أي أقصى قيمة للتعجيل ويرمز له $a_\circ$ فتصبح المعادلة

$$a = - a_\circ \sin (w_\circ t + \theta)$$

إن هذه المعادلة هي نفس معادلة الحركة التوافقية البسيطة فإذا عوضنا بدل $a_\circ$ بالمقدار $cw_\circ$ وبدل $C \sin (w_\circ + \theta)$ بالمقدار x ينتج

$$\mathbf{a = - w_\circ^2 X}$$

أي إن التعجيل يساوي صفر عندما يمر الجسم في موضع التوازن ويكون في ذروته عندما يكون الجسم في أقصى إزاحة له.

طاقة المهتز التوافقي البسيط

عندما يهتز الجسيم فان كلا من الطاقة الحركية والكامنة تتغيران باستمرار ماعدا في نقطتين يختفي احد الشكلين ليتحول كليا إلى الشكل الآخر . ففي أقصى إزاحة للجسيم من موضع التوازن حيث يتوقف الجسيم لحظيا عن الحركة لتتحول الطاقة كليا إلى طاقة كامنة وفي لحظة مرور الجسيم في نقطة التوازن تتحول الطاقة كليا إلى طاقه حركية .

KE : الطاقة الحركية الآنية التي تكتسبها كتلة الجسيم المهتز بفضل سرعته

PE : الطاقة الكامنة الآنية التي يختزنها النابض الحلزوني

تعطى الطاقة الحركية كما يلي علما إن m كتلة الجسيم ، v السرعة الآنية في الزمن t

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore w^2 = \frac{k}{m} \quad , \quad k = w^2 m$$

$$KE = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2 (\omega t + \varphi)$$

أما الطاقة الكامنة فهي على النحو الآتي:

$$PE = \Delta U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 cos^2(\omega t + \varphi)$$

وعليه تكون الطاقة الكلية E كما يلي: $E = KE + PE$

$$E = KE + \Delta U = \frac{1}{2} kA^2 [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)]$$

$$E = \frac{1}{2} kA^2$$

وهذا يعني إن الطاقة الكلية الميكانيكية تساوي الطاقة الكامنة القصوى المختزنة في النابض (عند استطالة النابض تكون PE أعظم ما يمكن).

عندما $x = \pm A$ فان $v = 0 \quad , \quad k = 0 \quad , \quad E = PE$

أما عندما تكون $x = 0$ ، فان $PE = 0$ ، وبالتالي تكون $E = KE$

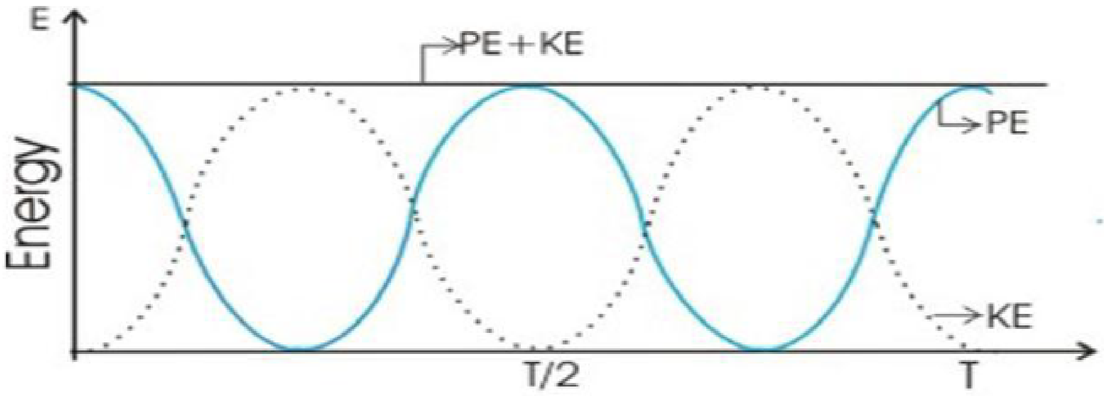
أي أن $E = \frac{1}{2} mv_{max}^2 = \frac{1}{2} kA^2$

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

أي أن :

$$v = \pm\sqrt{\omega^2 (A^2 - x^2)}$$

يوضح الشكل التالي تغيرات الطاقة الكامنة مع الطاقة الحركية وهي تغيرات تبادلية بين شكلي الطاقة كما هو متوقع وفق قانون حفظ الطاقة.



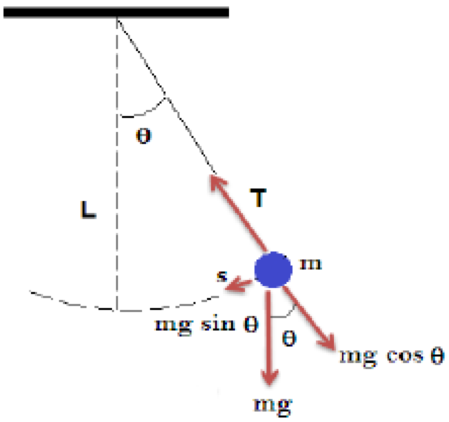
طاقة الحركة وطاقة الوضع مع الزمن لمتذبذب توافقي بسيط

تطبيقات على الحركة التوافقية البسيطة

1- البندول البسيط

يعتبر البندول البسيط احد الأنظمة الميكانيكية التي تعمل حركة دورية. يتكون البندول البسيط من جسم كتلتهm معلق بخيط طوله L في احد طرفيه والطرف الآخر مثبت ، كما في الشكل .تحدث الحركة على المستوى الأفقي وتستمر تحت تأثير قوة الجاذبية . القوة المؤثرة على الجسم المعلق هي قوة الشد T التي تنتج في الخيط وقوة الجاذبية الأرضية mg .المركبة المماسية mgsinθ تؤثر دائما في الاتجاه الذي يجعل الزاوية θ=0 وفي عكس الإزاحة التي تحدث للجسم بالنسبة لموضع الاتزان .ولهذا فان المركبة المماسية تعتبر قوة الاستعادة وبما إن قوة الشد عمودية على الحركة تكاد تكون معدومة ليس لها تأثير لذلك نأخذ فقط القوة المماسية وبتطبيق قانون نيوتن الثاني على الحركة في الاتجاه المماسي .

$$F_t = -\mathrm{mg}\,\sin\theta = \mathrm{m}\,\frac{d^2\mathrm{x}}{\mathrm{dt}^2}$$



حيث s هي موضع الجسم مقاسا بطول المنحني والإشارة السالبة تشير إلى أن القوة المماسية تعمل في اتجاه نقطة الاتزان (والإشارة السالبة تعني اتجاه زيادة القوة يعاكس اتجاه زيادة الزاوية θ) ولان x=Lθ وحيث أن L ثابتة فالمعادلة تصبح :

$$\frac{d^2\theta}{\mathrm{dt}^2} = -\frac{g}{\mathrm{L}}\sin\theta$$

باعتبار إن θ هي الموضع وهي صغيرة جدا فمن الممكن أن نقرب sinθ≈θ ، وعليه تصبح المعادلة

$$\frac{d^2\theta}{\mathrm{dt}^2} = -\frac{g}{\mathrm{L}}\theta$$

وهـي تمثـل حركـة توافقيـة بسـيطـة ، وعليـه يمكـن أن تكتـب دالـة الزاويـة θ

$$\theta = \theta_{\max}\cos(wt + \varphi)$$

حيث $\theta_{\max}$ هي اكبر موضع زاوي للبندول والتردد الزاوي w يعطى على النحو التالي:

$$\therefore a = -w^2 x$$

$$\therefore w^2 = \frac{g}{L} \qquad , \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

ونجد إن الزمن الدوري لحركة البندول البسيط $\quad , \quad w = \frac{2\pi}{T}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

أي أن الزمن الدوري والتردد يعتمد على طول الخيط والتعجيل ولا يعتمد على الكتلة.

س // يستخدم البندول البسيط في تحديد الوقت ؟ لان زمنه الدوري يعتمد فقط على طول البندول وعلى التعجيل الأرضي . كما يستخدم كأداة لقياس عجلة الجاذبية الأرضية ، وهذه القياسات مهمة جدا لرصد التغيرات في التعجيل الأرضي في مناطق مختلفة على سطح الكرة الأرضية وربما تساعد هذه القياسات في التنقيب عن النفط في بعض الأحيان.

مثال// اقترح العالم هايكنز وحدة للطول تعتمد على فكرة البندول البسيط وهي طول البندول الذي زمنه الدوري 1sec .فكم يبلغ طول هذه الوحدة بالنسبة للمتر ؟

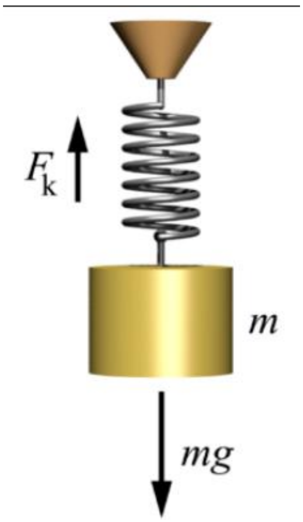
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \therefore L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1)^2 9.8}{4\pi^2} = 0.248\, m$$

وعليه سيكون المتر اقصر بقليل من طوله الحالي بمقدار ربع طوله الحالي .

2- النابض الحلزوني

إذا ثبت جسم كتلته m بنابض فانه يتدلى متوازنا مع النابض الذي يكون قد تمدد بمقدار Δl بحيث يكون القوة متجهة نحو الأعلى والتي لا تؤثر على النابض مساوية لثقل الجسم mg حيث k ثابت النابض

$k\,\Delta L = mg$



لنفرض أن الجسم سحب نحو الأسفل مسافة y من وضع التوازن الذي كان عليه ثم ترك ليتذبذب فان محصلة القوة F المؤثرة على الجسم حسب قانون نيوتن الثاني هي :

$$F = ma = m\ddot{y} = mg - k\Delta L - ky$$

$$F = -ky \qquad , m\ddot{y} + ky = 0$$ بتطبيق نيوتن الثاني

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0 \qquad \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_\circ{}^2 y = 0$$

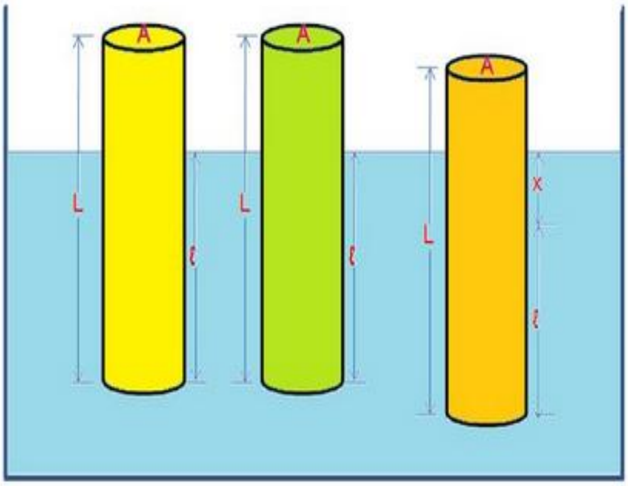
وهذه هي معادلة الحركة التوافقية البسيطة

$$Y = y_\circ \sin\,(wt + \theta)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

3- الجسم الطافي

أن أي جسم طافي على سطح سائل إذا ما دفع قليلا إلى الأسفل أو رفع قليلا نحو الأعلى ثم ترك حرا فانه سوف يهتز بحركة صعود ونزول عمودية على سطح السائل. ولإيجاد طبيعة هذه الحركة يجب إيجاد معادلة الحركة للجسم الطافي. إن تحليل مثل هذه الحركة يصبح سهلا إذا تعاملنا مع جسم طاف له مساحة مقطع عرضي ثابت في الجزء الذي يتقاطع مع سطح السائل. لهذا السبب سنفرض أن لدينا جسما اسطوانيا منتظما يطفو في سائل بحيث يكون محور الاسطوانة عموديا على سطح ذلك السائل. نفرض أن طول الاسطوانة L ومساحة مقطعها العرضي A وكثافتها ρ وان كثافة السائل ρ_L في حالة التوازن نفرض أن طول الجزء المغمور من الاسطوانة داخل السائل هو ℓ كما مبين في الشكل. وحسب قاعدة ارخميدس بالنسبة للجسم الطافي في حالة التوازن يكون وزن الجسم الطافي مساويا لوزن السائل المزاح. وبما أن وزن الاسطوانة يساوي $AL\rho g$ ووزن السائل المزاح يساوي $\rho_L g\ell A$ حيث أن g يمثل التعجيل الأرضي. لذلك فان $(F=F_L)$ أي أن



$$AL\rho g=A\ell\rho_L g$$

$$L/\ell=\rho_L/\rho \qquad (1)$$

فإذا دفعت الاسطوانة قليلا نحو الأسفل وكانت الإزاحة الآنية عن موضع التوازن x عند اللحظة الزمنية t كما مبين في الشكل الذي يقع لليمين فان وزن السائل الإضافي المزاح في هذه الحالة $Ax\rho_L g$ يساوي قوة دفع السائل للاسطوانة نحو الأعلى. وهذه القوة هي الوحيدة المؤثرة في الاسطوانة. وتمثل قوة الاستعادة التي تحاول أعادة الاسطوانة إلى موضع توازنها وتسبب الاهتزاز. فإذا أهملنا حركة السائل المصاحبة لاهتزاز الاسطوانة وتطبيق قانون نيوتن الثاني نجد أن

$$AL\rho(d^2x/dt^2)=-Ax\rho_L g \qquad (2)$$

إن الإشارة السالبة تشير إلى أن اتجاه قوة دفع السائل يعاكس اتجاه زيادة الإزاحة.

$$d^2x/dt^2=-(\rho_L g/\rho L)x \qquad (3)$$

وبمقارنة (3) بالمعادلة (5) في فقرة (معادلة الحركة الخطية التوافقية البسيطة) نستنتج أن حركة الجسم الطافي إذا رفع أو خفض قليلا من موضع توازنه وترك حرا ستكون حركة توافقية بسيطة ترددها الزاوي ω هو

$$\omega=(\rho_L g/\rho L)^{1/2} \qquad (4)$$

والتردد الطبيعي f يمكن الحصول عليه من $\omega=2\pi f$ أي أن

$$f=(1/2\pi)(\rho_L g/\rho L)^{1/2} \qquad (5)$$

والزمن الدوري T يمكن الحصول عليه من $(f=1/T)$ أي أن

$$T=2\pi(\rho L/\rho_L g)^{1/2} \qquad (6)$$

إن الإزاحة الآنية x في أية لحظة زمنية تكون

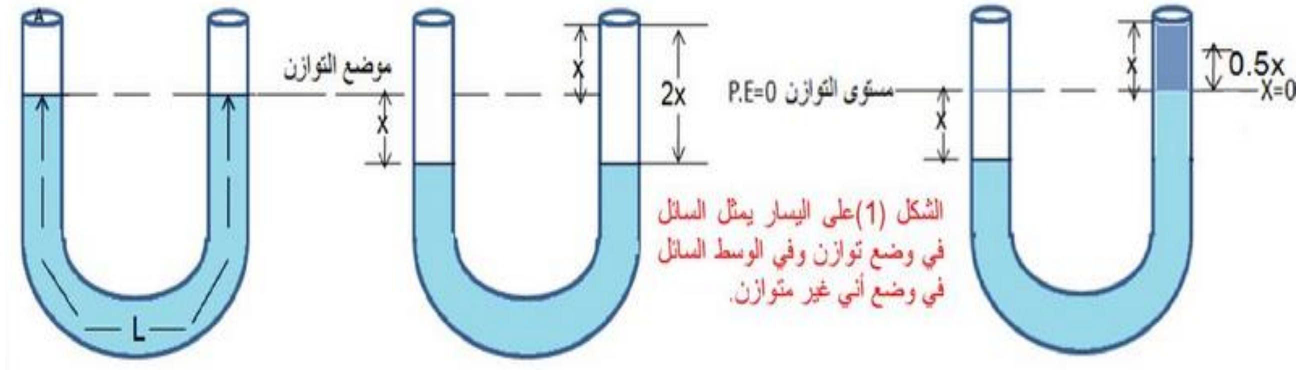
$$x=A\sin(\rho_L g/\rho L)^{1/2}t+B\cos(\rho_L g/\rho L)^{1/2}t \qquad (7)$$

حيث أن A و B ثابتان اختياريان يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة. فإذا فرضنا انه في اللحظة $t=0$ كانت الإزاحة الابتدائية x_o والسرعة الابتدائية $(dx/dt=0)$. فمن الشروط نجد أن $B=x_o$ وان $A=0$ وبذلك يكون الحل العام وفق الشروط الابتدائية المذكورة كالأتي

$$x=x_o\cos(\rho_L g/\rho L)^{1/2}t \qquad (8)$$

4- السائل في انبوبة على شكل الحرف U

نفرض أن لدينا أنبوبة على شكل حرف U ذات ذراعين قائمين ومساحة مقطع ثابت كما مبين في الشكل (1). فإذا وضع سائل



الشكل (1)على اليسار يمثل السائل في وضع توازن وفي الوسط السائل في وضع أني غير متوازن.

في الأنبوبة فان مستوى سطح السائل يكون واحدا في كلا الذراعين في حالة التوازن. وإذا دفع سطح السائل في احد الذراعين قليلا نحو الأعلى أو الأسفل ثم ترك حرا فان السائل في الأنبوبة يهتز. وطبيعة الحركة الاهتزازية للسائل يمكن معرفتها من معادلة الحركة.

نفرض أن الطول الكلي لعمود السائل L وكثافته هي ρ وان مساحة المقطع العرضي للأنبوبة هو A لذلك فان الكتلة الكلية للسائل هي ρAL فإذا أزيح سطح السائل في الذراع الأيسر نحو الأسفل إزاحة آنية صغيرة مقدارها x من موضع التوازن في أية لحظة زمنية t، فان مستوى سطح السائل في الذراع الأيمن سوف يزاح بنفس المقدار x نحو الأعلى من موضع التوازن، وبذلك يصبح فرق الارتفاع بين سطحي السائل في الذراعين 2x. إن ثقل عمود السائل الذي طوله 2x يمثل القوة الآنية الوحيدة المؤثرة في السائل وهي قوة الاستعادة التي تحاول أعادة السائل إلى موضع توازنه وتسبب الاهتزاز. إن حركة السائل في هذا النموذج لا تكون في بعد واحد بل في بعدين (أي أن حركة السائل ليست حركة انتقالية بسيطة وليست حركة دورانية بسيطة حول محور ثابت بل إنها حركة في بعدين) إلا انه يمكن وصف هذه الحركة بدلالة الإزاحة العمودية x في بعد واحد. وفي مثل هذه الحالة يفضل استخدام طريقة الطاقة لإيجاد معادلة الحركة للسائل.

نفرض أن جميع أجزاء السائل تتحرك بنفس السرعة الآنية (dx/dt) لذلك فان الطاقة الحركية الآنية K.E يمكن كتابتها كالآتي

$$K.E=\frac{1}{2}(\rho L A)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad (1)$$

أما الطاقة الكامنة الآنية P.E فيمكن حسابها من ملاحظة الشكل (1) على اليمين. عندما يكون السائل في حالة توازن يكون مستوى السائل واحد في الذراعين، وفي هذه الحالة يكون مقدار الإزاحة x صفرا وبذلك تكون الطاقة الكامنة في هذا الوضع مساوية للصفر. أما إذا ارتفع سطح السائل في احد الذراعين (وليكن الذراع الأيمن مثلا) مسافة x عن موضع التوازن فإن كل جزء من أجزاء السائل المرتفع سيمتلك طاقة كامنة تختلف عن الأجزاء الأخرى التي لا تقع في نفس المستوى. ولتلافي هذا التباين في الطاقة الكامنة في مختلف أجزاء السائل، سنفرض أن كتلة السائل المرتفع مركزه في مركز كتلة كمية السائل المحصور بين مستوى التوازن والإزاحة x. وبما أن السائل المرتفع متجانس وشكله اسطواني منتظم لذلك فان مركز كتلته سيقع في منتصف الإزاحة x. وعليه تكون الطاقة الكامنة التي يمتلكها السائل المرتفع في الذراع الأيمن هي

$$P.E(Right)=(\rho A x)g\frac{1}{2}x \qquad (2)$$

وبنفس الطريقة يمكن حساب الطاقة الكامنة التي يمتلكها السائل المزاح في الذراع الآخر (الأيسر) وتساوي نفس المقدار، أي أن

$$P.E(Left) = (\rho A x)g\frac{1}{2}x \qquad (3)$$

وبجمع المعادلتين (2) و (3) نحصل على مجموع الطاقة الكامنة الآنية P.E التي يمتلكها السائل.

$$P.E = P.E(Right) + P.E(Left)$$

$$P.E = (\rho A x)g\frac{1}{2}x + (\rho A x)g\frac{1}{2}x$$

$$P.E = \rho A g x^2 \qquad (4)$$

الآن نطبق قانون حفظ الطاقة على اعتبار انه ليس هنالك أي فقدان في الطاقة فنحصل على

$$E = \frac{1}{2}(\rho L A)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \rho A g x^2 = constant \qquad (5)$$

والآن نفاضل طرفي المعادلة (5)

$$\rho AL\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\rho A g x\frac{dx}{dt} = 0 \qquad (6)$$

نقسم طرفي المعادلة (6) على (ρAL) ونرتب المعادلة فتصبح كالأتي

$$\frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{L}x\right) = 0 \qquad (7)$$

أما أن

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

وهذا لا يتحقق دائما إلا في حالة سكون السائل لذلك فان

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{L}x = 0 \qquad (8)$$

المعادلة (8)هي المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة، حيث المقدار (2g/L) يمثل التردد الزاوي ω.

أي أن

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}} \qquad (9)$$

ومنها نحصل على التردد الطبيعي f

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{L}} \qquad (10)$$

والزمن الدوري T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}} \qquad (11)$$

إن المعادلة (11) تشير إلى أن الزمن الدوري لاهتزاز السائل لا يعتمد على مساحة مقطع الأنبوبة أو نوعية السائل المستخدم. وبالحقيقة لا يعتمد أيضا على شكل الأنبوبة. إن الحل العام للمعادلة (11) هو

$$x = A\sin\sqrt{\frac{2g}{L}}t + B\cos\sqrt{\frac{2g}{L}}t \tag{12}$$

حيث أن A و B ثابتان اختياريان يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة. فإذا علمنا في اللحظة الزمنية $t=0$ الإزاحة الابتدائية هي x_o والسرعة الابتدائية هي v_o فان $B=x_o$ وان $A=0$، وبذلك يكون الحل العام للمعادلة (12) وفق الشروط المذكورة هو

$$x = x_o\cos\sqrt{\frac{2g}{L}}t \tag{13}$$

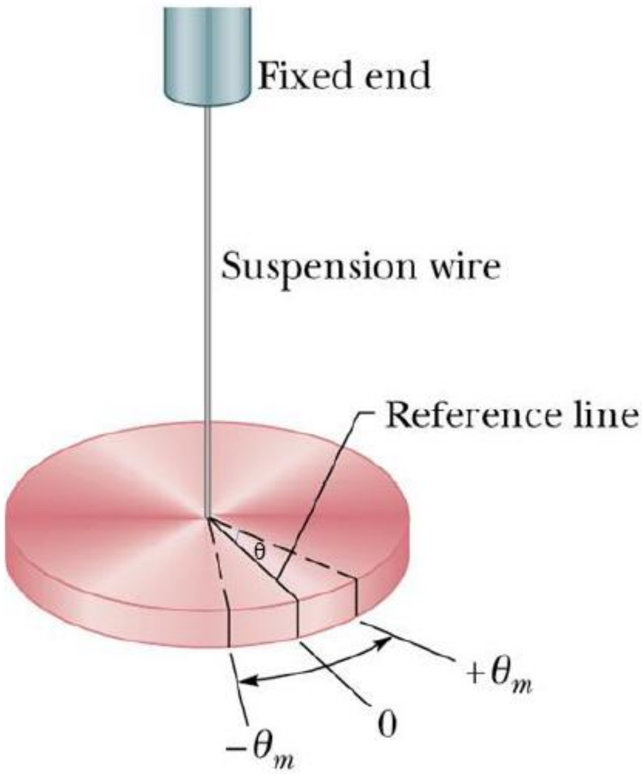
5- بندول اللي Torsional Pendulum

يتألف بندول اللي من قرص اسطواني معلق من مركزه بطرف قضيب رقيق (أو سلك) يتصل بمركز ثقل القرص اتصالا وثيقا ويتصل الطرف الآخر من القضيب بمسند ثابت كما مبين بالشكل. عندما يكون البندول في وضع التوازن أي في حالة سكون نرسم خطا من المركز إلى النقطة $+\theta_m$ كما موضح في الشكل. إذا أدير القرص أفقيا إلى النقطة $-\theta_m$ بزاوية θ يحدث لي في القضيب ونتيجة ذلك يؤثر القضيب بعزم لي T يعمل على أعادة البندول إلى موضع التوازن الأصلي. ومن قانون هوك الذي يشير إلى أن عزم لي الإرجاع T يتناسب طرديا مع مقدار اللي الذي يتمثل بمقدار الإزاحة الزاوية θ أي أن $T\alpha\theta$ ومن ذلك نحصل على

$$T = -k\theta \qquad (1)$$

حيث أن k هو ثابت التناسب ويدعى بثابت اللي ويتوقف مقداره على طول وقطر السلك وطبيعة مادته. والإشارة السالبة توضح أن عزم اللي يعمل في اتجاه معاكس لاتجاه زيادة الإزاحة الزاوية. وعندما يحرر البندول بعد إزاحته بزاوية θ فان عزم اللي الذي يمثل عزم القوة المعيدة يولد تعجيل زاوي $(d^2\theta/dt^2)$ يتناسب طرديا مع الإزاحة الزاوية ، والحركة الناتجة تدعى بالحركة الزاوية التوافقية البسيطة. ومعادلة الحركة لهذا البندول هي

$$T = -k\theta = I(d^2\theta/dt^2) \qquad (2)$$



حيث I يمثل عزم القصور الذاتي للقرص، نرتب المعادلة (2)فتصبح

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(\frac{k}{I})\theta \qquad (3)$$

ويلاحظ أن شكل هذه المعادلة مطابق تماما من وجهة النظر الرياضية للمعادلة القياسية للحركة الخطية التوافقية البسيطة

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(\frac{k}{m})x \qquad (4)$$

حيث أننا استبدلنا الإزاحة الخطية x بالإزاحة الزاوية θ والكتلة m بعزم القصور الذاتي I وثابت النابض بثابت اللي k والحل العام للمعادلة (3) يمكن الحصول عليه بنفس الطريقة السابقة فنجد أن الإزاحة الزاوية θ في أية لحظة زمنية T هي

$$\theta = \theta_o cos(\omega t - \varphi) \qquad (5)$$

حيث أن θ_o هي النهاية العظمى للإزاحة الزاوية أي سعة الذبذبة الزاوية و φ هي زاوية الطور الابتدائي للحركة و ω هو التردد الزاوي والتردد الزاوي لبندول اللي هو

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} \qquad (6)$$

ومنها نجد التردد الطبيعي f والزمن الدوري T على الترتيب

$$\omega=2\pi f$$

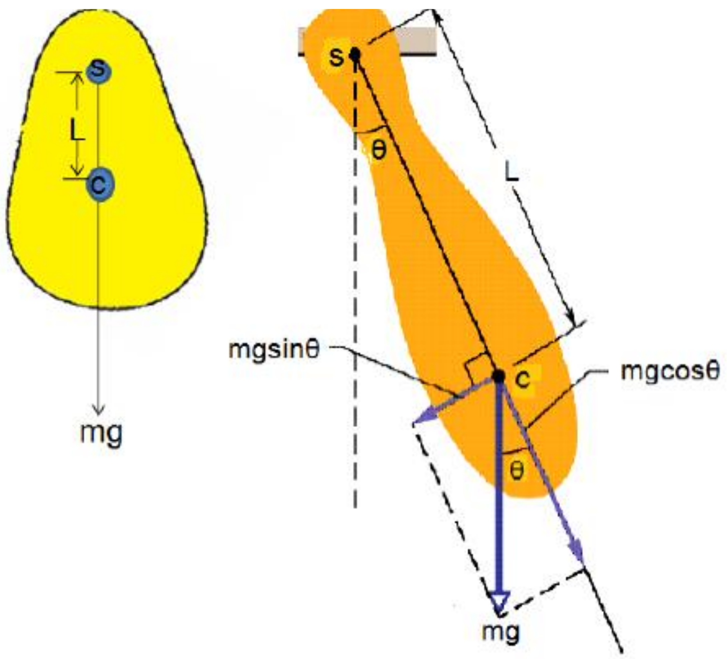
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I}} \qquad (7)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \qquad (8)$$

6- البندول الفيزيائي أو البندول المركب

أن أي جسم صلب مهما كان شكله وقادر على التذبذب حول أي محور أفقي يمر خلاله يدعى بالبندول الفيزيائي (المركب). وفي الواقع فان جميع البندولات الحقيقية هي بندولات فيزيائية. وما البندول البسيط إلا حالة خاصة من هذا النوع من البندولات. لنأخذ بندول فيزيائي على شكل جسم غير منتظم يمكنه أن يدور حول محور أفقي أملس يمر من النقطة s التي تدعى بنقطة التعليق كما مبين بالشكل الأتي. يلاحظ من الشكل الذي يقع إلى اليمين انه في حالة التوازن يقع مركز الكتلة c للجسم على نفس الخط العمودي المار بنقطة التعليق s فإذا فرضنا أن المسافة بين نقطة التعليق ومركز الكتلة هي L وان كتلة الجسم هي m وان عزم القصور الذاتي للجسم حول نقطة التعليق حيث يمر محور الدوران هي I. في آية لحظة زمنية تكون القوة المؤثرة على الجسم عموديا نحو الأسفل هي mg وعند إزاحة الجسم إزاحة زاوية صغيرة θ فان الخط الواصل بين s و c يصنع زاوية θ مع العمود وبذلك يكون عزم القوة المعيدة التي تحاول أعادة الجسم إلى موضع توازنه الأصلي تساوي mgLsinθ وهذا العزم الوحيد الذي ينتج التعجيل الزاوي $(d^2\theta/dt^2)$ في البندول . وعليه فان معادلة الحركة للبندول هي

$$\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = -\left(\frac{mgL}{I}\right)\sin\theta \qquad (1)$$



الشكل على اليسار البندول في حالة توازن والشكل على اليمين البندول وقد أزيح إزاحة زاوية θ عن موضع التوازن.

إن الإشارة السالبة هنا تشير إلى أن القوة المعيدة متجهة دائما نحو موضع التوازن. وإذا كانت الزاوية θ صغيرة صغرا كافيا، فعندئذ تكون العلاقة $\sin\theta=\theta$ صحيحة لدرجة عالية من الدقة، وبذلك تصبح المعادلة (1) كالأتي

$$\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = -\left(\frac{mgL}{I}\right)\theta \qquad (2)$$

وهذه تمثل معادلة الحركة الزاوية التوافقية البسيطة التي تحدث عندما تكون السعات صغيرة. وفي هذه الحالة يكون التردد الزاوي ω هو

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \qquad (3)$$

ومن هذه العلاقة نجد التردد الطبيعي f و الزمن الدوري T على الترتيب

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgL}{I}} \qquad (4)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (5)$$

ويمكن إيجاد قيمة عزم القصور الذاتي I حول محور الدوران من العلاقة

$$I = mL^2 + mk^2 \qquad (6)$$

حيث أن k يمثل نصف قطر التدويم حول مركز كتلة البندول وبالتعويض نجد أن التردد الطبيعي للبندول المركب هو

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L+\frac{k^2}{L}}} \qquad (7)$$

وان الزمن الدوري هو

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L+\frac{k^2}{L}}{g}} \qquad (8)$$

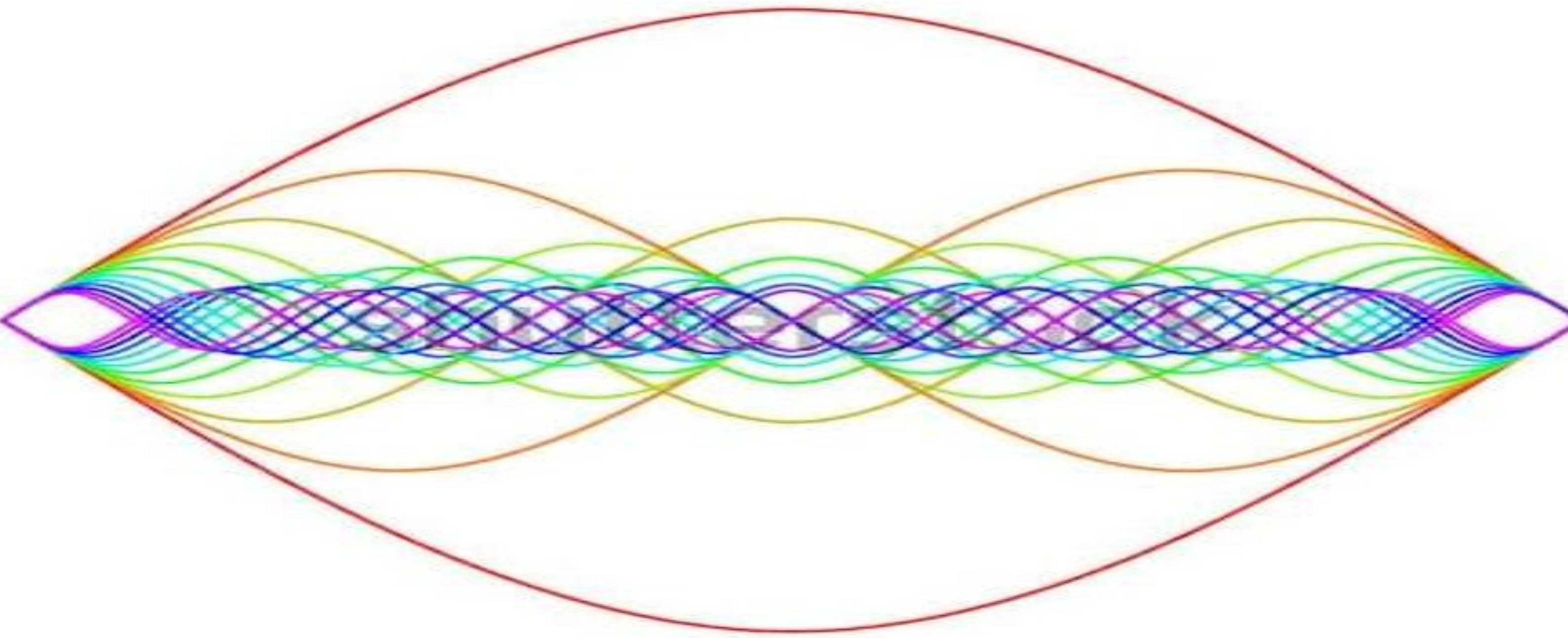
وهنا يشير المقدار $(L+(k^2/L))$ إلى الطول المكافئ للبندول. والجدير بالذكر انه في السعات الكبيرة تكون حركة البندول الفيزيائي دورية، ولكنها لا تكون توافقية بسيطة.

نهاية الفصل الثاني

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الفيزياء
المرحلة:الثانية
المادة: الصوت والحركة الموجية

الفصل الثالث

تركيب الحركات التوافقية البسيطة



مدرس المادة: د.محسن وليد محمد

تركيب الحركات التوافقية البسيطة

تمهيد:

لقد درسنا في الفصل الثاني أمثلة على حركة الجسيم المهتز بحركة توافقية بسيطة واحدة، ولكن الواقع هناك أمثلة كثيرة في الفيزياء تندمج فيها حركتان توافقيتان بسيطتان أو أكثر في آن واحد. فغشاء الطبلة في الأذن غالبا ما يتأثر بأكثر من حركة توافقية بسيطة نتيجة لالتقاط الأذن أصوات متعددة بترددات مختلفة في نفس الوقت، والبندول البسيط المعلق بمسند مثبت على سطح باخرة يتأثر آنيا بحركتين إذا ما اهتز كل من البندول والباخرة معا. وقد يكون تأثير هذه الحركات في الجسيم في خط مستقيم واحد أو في خطين مستقيمين متعامدين أو في أي اتجاه آخر. وفي جميع هذه الحالات سنحاول إيجاد محصلة الحركة الناتجة من تأثير هذه الحركات باستخدام قاعدة التركيب.

قاعدة التركيب:

إن لهذه القاعدة أهمية خاصة لجميع أنواع الموجات والاهتزازات في الطبيعة، فهي حقيقة تجريبية يمكن التأكد من صحتها من خبراتنا اليومية. وهي تنص"على انه يمكن لحركتين اهتزازيتين أو موجيتين أو أكثر أن تحدثا في نفس النقطة دون أن تؤثر إحداها بالأخرى". "أي بعبارة أخرى يمكن لموجتين أو أكثر أن تنتقلا في وقت واحد خلال نفس النقطة في الفضاء دون أن تتأثر أية موجة بحركة الموجات الأخرى".

أمثلة على قاعدة التركيب:

1.عند إلقاء حجرتين أو أكثر في مواقع متباعدة عن بعضها في بركة ساكنة من الماء فان كل حجر سيكون مصدر للموجة على سطح الماء. أن الموجات المتولدة ستتقدم وتتداخل مع بعضها ثم تخرج من منطقة التداخل وتستمر بالتقدم دون أن يتأثر بعضها بالأخر.

2.بالنسبة للموجات الصوتية، فنحن نسمع الصوت الصادر من مصدر معين بالرغم من أن هذا الصوت ينتقل في الفضاء الذي يحتوي على موجات صوتية أخرى.

3.وبالنسبة للموجات الضوئية كذلك نحن نرى الأجسام حولنا بوضوح بالرغم من أن الضوء الذي يصل إلى أعيننا من جسم معين ينتقل في فضاء يحتوي على موجات ضوئية كثيرة وفي مختلف الاتجاهات.

أن هذه الحقيقة التجريبية تشير إلى أن الموجات المختلفة تسلك سلوكا مستقلا عن بعضها البعض وهذا يعني انه إذا مرت مجموعة من الموجات في نقطة معينة في الفضاء فان محصلة الإزاحة في تلك النقطة تساوي مجموع الإزاحات المنفردة التي تحدثها الموجات كلا على حدة. إن هذه القاعدة تسري فقط على الحركات الموجية والاهتزازية الخطية، أي في الحالات التي تخضع لقانون هوك ضمن حدود المرونة فقط، ويمكن التعبير عن الحركات الموجية أو الاهتزازية بمعادلات رياضية خطية.

وابرز هذه المعادلات هي معادلة الحركة التوافقية البسيطة. أن أهمية قاعدة التركيب تتضح بجلاء في أنها وسيلة فعالة تمكننا من تحليل الحركات الموجية والاهتزازية المعقدة إلى مركباتها التوافقية البسيطة. ولقد كان العالم الفرنسي فورير (*G.Fourier*) سباقا في التأكيد على أن الحركات الموجية والاهتزازية الدورية المعقدة ما هي في حقيقتها إلا مجموعة من الحركات التوافقية البسيطة. ومن الجدير بالتنويه إن هذه القاعدة على شموليتها فإنها مقيدة فقط على الحركات الصغيرة التي يمكن وصفها بالمعادلات الخطية حيث تكون سعة الموجة أو الاهتزاز ضئيلة وهذا ما يحدث في اغلب الحالات العملية. أما في حالات الحركة التي توصف بمعادلات غير خطية كتلك التي تمثل الاهتزازات العنيفة والموجات الراجة فان هذه القاعدة لا تتحقق. ولغرض التحليل والتعبير الرياضي عن هذه القاعدة سنستخدم المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة التي تم اشتقاقها في الفصل السابق وهي

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x \qquad 1$$

ويلاحظ من هذه المعادلة أن التعجيل $(\frac{d^2x}{dt^2})$ يتناسب خطيا مع الإزاحة من موضع التوازن x وان الحدين في هذه المعادلة مرفوعان للقوة واحد مما يعني أنها بتعبير رياضي معادلة خطية. وبالإضافة لذلك يلاحظ أن الحدين يحتويان نفس المتغير x مما يشير إلى أنها معادلة متجانسة. وان حل هذه المعادلة يعطي وصفا كاملا للحركة. أما إذا لم تكن المعادلة خطية أي أن حدودها لا تتضمن نفس المتغير عندئذ يصبح الحل صعبا ويحتاج إلى رياضيات متقدمة لتحليل الحركة الناتجة. إن مثل هذا غير مطلوب الآن. وسيقتصر تحليلنا الآن على المعادلة الخطية المتجانسة (1) فقط. لنفرض أن الحل الأول المناسب لهذه المعادلة هو

$$x = x_1 \qquad 2$$

حيث x_1 يمكن أن يأخذ أي شكل وليكن $A\sin\omega t$ مثلا. ولنفرض الحل الثاني المناسب لهذه المعادلة هو

$$x = x_2 \qquad 3$$

حيث x_2 يمكن أن يأخذ أي شكل آخر وليكن $B\cos\omega t$ مثلا. نعوض الحد الأول في المعادلة (1) فنجد أن

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + w^2x_1 = 0 \qquad 4$$

ونعوض الحد الثاني في المعادلة (1) فنجد أن

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + w^2x_2 = 0 \qquad 5$$

نجمع المعادلتين (4) و (5) فينتج

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + w^2(x_2 + x_1) = 0 \qquad 6$$

وهذا يشير إلى أن هناك ثلاثة حلول للمعادلة (1) هي

$$x = x_1$$

$$x = x_2$$

$$x = x_1 + x_2 \qquad 7$$

من ذلك نستنتج إن هناك خاصية مهمة تميز المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة وهي إن التركيب الخطي لأي حلين لمثل هذه المعادلة يعتبر حلا مناسبا لها. أي أن المجموع البسيط لأي حلين هو حل ثالث للمعادلة الخطية المتجانسة. وهذه الخاصية غير صحيحة للمعادلات غير الخطية. إن هذه الخاصية تمثل قاعدة التركيب. وبما أن كل الحركات التوافقية البسيطة تتحكم بها معادلة خطية متجانسة فجميعها إذن تخضع لقاعدة التركيب. أي بصيغة أخرى إن محصلة اهتزازين توافقين أو أكثر مساويا لمجموع الاهتزازات المنفردة التي يتأثر بها الجسم. وسنطبق هذه القاعدة على الجسيم الذي يخضع لتأثير أكثر من حركة توافقية بسيطة واحدة.

تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين في نفس الاتجاه

نفرض ان لدينا جسيما يخضع انيا لحركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد على امتداد المحور السيني وتمثل الحركه التوافقيه البسيطه الاولى بالمعادله

$$x_1 = a_1 \sin(wt + \theta_1) \qquad 8$$

والحركه التوافقيه البسيطه الثانيه تعطى بالمعادله

$$x_2 = a_2 \sin(wt + \theta_2) \qquad 9$$

حيث x_1 و x_2 تمثلان الازاحتين الانيتين للجسيم نتيجه تاثير الحركتين التوافقيتين و a_1 وa_2 تمثلان سعتي الحركتين , θ_1 , θ_2 يمثلان زاويتي الطور الابتدائيتين , w التردد الزاوي .

ان محصله الازاحه x الناتجه من تركيب الازاحتين هي .

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = a_1 \sin(wt + \theta_1) + a_2 \sin(wt + \theta_2)$$

$$x = a_1[\sin(wt) \cos(\theta_1) + \cos(wt) \sin(\theta_1)] + a_2[\sin(wt) \cos(\theta_2) + \cos(wt) \sin(\theta_2)]$$

$$x = [\{a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_2)\} \sin(wt)] + [\{a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_2)\} \cos(wt)]$$

حيث ان a_1 , a_2 , θ_1 , θ_2 , هي ثوابت يمكن ان نفرضها تساوي

$$a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_2) = A\cos(\theta) \qquad *$$

$$a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_2) = A\sin(\theta) \qquad **$$

وبذلك تكون المعادله اعلاه بالشكل التالي

$$x = A\cos(\theta) \sin(wt) + A\sin(\theta) \cos(wt)$$

$$x = A \sin(wt + \theta) \qquad 1$$

بتربيع وبجمع المعادليتين (* و**) نحصل على

$$[\{A\cos(\theta)\}^2 + \{A\sin(\theta)\}^2] = [\{a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_2)\}^2 + \{a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_2)\}^2]$$

$$A^2[\cos^2\theta + \sin^2\theta] = [a_1^2 \cos^2\theta_1 + a_2^2 \cos^2\theta_2 + 2a_1 a_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + a_1^2 \sin^2\theta_1 + a_2^2 \sin^2\theta_2 + 2a_1 a_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2]$$

$$A^2 = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2)]$$

$$A^2 = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \qquad 2]$$

الان بقسمه المعادليتين (* و**) نحصل على

$$\frac{A\sin(\theta)}{A\cos(\theta)} = \frac{a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_2)}{a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_2)}$$

$$\tan\theta = \frac{a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_2)}{a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_2)} \qquad 3$$

المعادله 1 تمثل محصله الازاحه الانيه x للحركتين التوافقيتين البسيطتين ونلاحظ بانها تشابه المعادلتين x_1 و x_2 مما يشير بانها تمثل حركه توافقيه بسيطه ايضا لها نفس التردد الزاوي المشترك لمركبتي الحركه . A تمثل السعه للحركه التوافقيه البسيطه الناتجه من جمع الحركتين ويمكن ايجادها من العلاقه 2. وان θ تمثل زاويه الطور الابتدائي لمحصله الحركه ويمكن ايجادها من العلاقه 3.

يمكن استخلاص بعض النتائج الهامه للحركه التوافقيه البسيطه من العلاقه 1 فيما يتعلق بالتداخل بين اي حركتين .

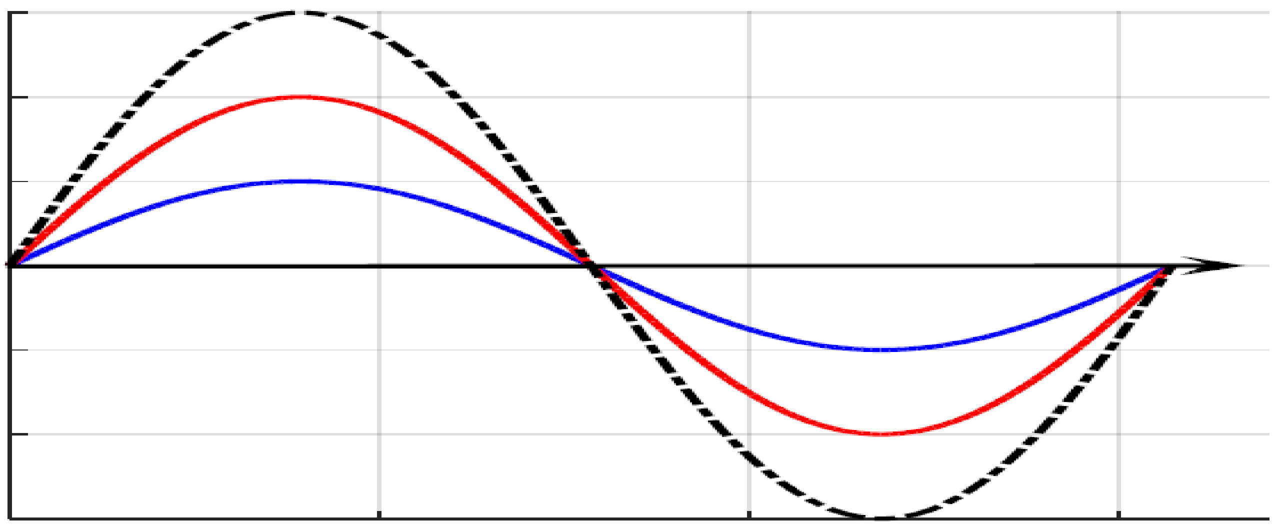
1- **التداخل بين حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد والطور ويختلفان بالسعه**

اي ان

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta$$

فالمعادله تصبح كالاتي

$$x = (a_1 + a_2)\sin(wt + \theta)$$



من الشكل اعلاه نلاحظ بان سعه الحركه الاهتزازيه الناتجه تساوي مجموع سعتي الحركتين المتداخلتين اللتين لهما نفس التردد والطور . اي ان الحركتين التوافقيتين في هذه الحاله تقويان بعضهما البعض ويسمى **التداخل البناء**. وعند تساوي السعتين فان محصلتهما تكون ضعف السعه الاصليه.

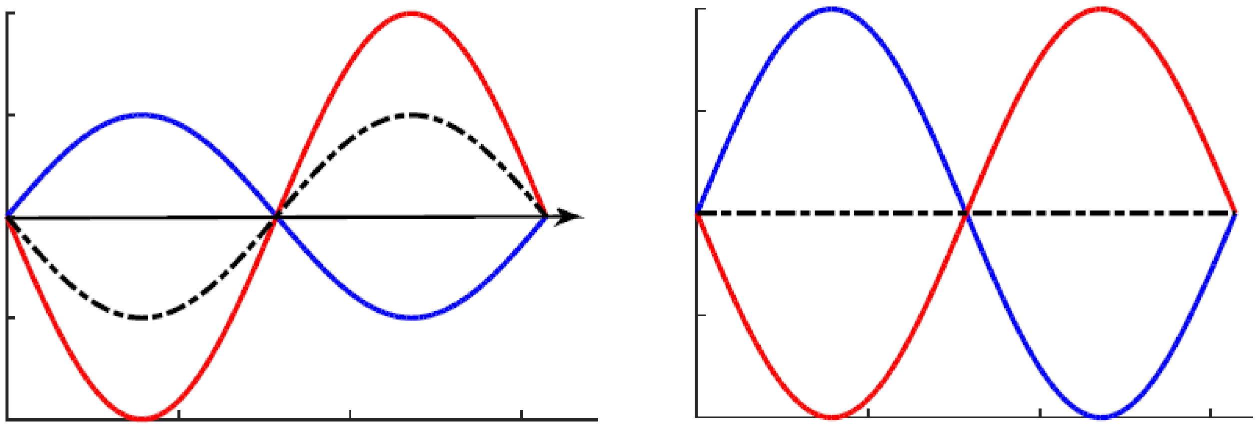
2- التداخل بين حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد ولكن يختلفان بالسعة والطور.

لناخذ حاله هي ان

$\theta_2 = \pi$ و $\theta_1 = 0$

تصبح المعادله اعلاه بالشكل التالي

$$x = (a_1 - a_2)\sin(wt)$$



نلاحظ من الشكل بان محصله السعه تساوي الفرق بين سعتي الحركتين التوافقيتين المتداخلتين وتقع قمه احداهما فوق قعر الاخرى ان الحركتين تعاكس احداهما الاخرى وفي هذه الحاله فانهما تهدمان بعضهما البعض ويسمى **بالتداخل الهدام** . في حاله $a_1 = a_2$ فان المحصله تساوي صفرا كما في الشكل اعلاه.

أشكال ليساجو Lissajous Figures:

عندما يخضع جسيم آنيا لحركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين فان محصلة الحركة للجسيم تكون على مسار منحن، وشكل هذا المنحني يدعى بشكل ليساجو. أن هذا الشكل يعتمد على سعة وتردد كل من الحركتين التوافقيتين البسيطتين وفرق الطور بينهما. فلو كان لدينا بندول بسيط معلق من نقطة تتحرك بحركة توافقية بسيطة باتجاه المحور الصادي وسمح لكرة البندول أن تذبذب بنفس الوقت بسعة صغيرة باتجاه المحور السيني فان كرة البندول ستخضع لحركتين متعامدتين في وقت واحد. ونتيجة ذلك فان كرة البندول ستتحرك في بعدين بمسار يحدده محصلة هاتين الحركتين فإذا كانت النسبة بين ترددي الحركتين مساويا لعدد صحيح وفرق الطور بينهما زاوية معينة فان شكل المسار يكون مغلقا. ويمكن توضيح ذلك تحليليا وبيانيا بأمثلة محددة.

تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهين متعامدين.

لنفرض أن لدينا جسيما يتأثر آنيا بحركتين توافقيتين بسيطتين أحداهما تؤثر باتجاه المحور السيني والأخرى تؤثر باتجاه المحور الصادي وسنعتبر أولا الحالة التي يكون الترددان متساويين. فلو فرضنا أن الإزاحة الآنية للجسيم على امتداد المحور السيني هي

$$x = a\sin(\omega t + \theta) \qquad 1$$

والإزاحة الآنية لنفس الجسيم على امتداد المحور الصادي هي

$$y = b\sin\omega t \qquad 2$$

يلاحظ هنا أن الحركتين التوافقيتين السينية والصادية تختلفان في السعة والطور الابتدائي للحركة. وللحصول على المعادلة العامة لمسار الحركة نحذف الزمن بين المعادلتين (1) و (2). من المعادلة (1) نحصل على

$$\left(\frac{x}{a}\right) = \sin\omega t\cos\theta + \cos\omega t\sin\theta \qquad 3$$

ومن المعادلة (2) نحصل على

$$\left(\frac{y}{b}\right) = \sin\omega t \qquad 4$$

وبالاستفادة من المتطابقة $(\cos^2 wt + \sin^2 wt = 1)$ تصبح المعادلة (4) على النحو

$$\cos\omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)} \qquad 5$$

نعوض المعادلتين (4) و (5) في المعادلة (3) فينتج أن

$$\left(\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{y}{b}\right)\cos\theta + \sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)}\sin\theta \qquad 6$$

نرتب هذه المعدلة فتصبح

$$\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{y}{b}\right)\cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)}\sin\theta \qquad 7$$

نربع طرفي المعادلة(7)

$$\left[\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{y}{b}\right)\cos\theta\right]^2 = \sin^2\theta\left(1 - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)\right)$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{xy}{ab}\right)\cos\theta + \left(\frac{y^2}{b^2}\right)\cos^2\theta = \left(\sin^2\theta - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)\sin^2\theta\right)$$

نختزل هذه المعادلة ونرتبها فتصبح كالأتي

$$\left(\frac{x^2}{a^2}\right)+\left(\frac{y^2}{b^2}\right)-\left(\frac{2xy}{ab}\right)cos\theta = sin^2\theta \qquad 8$$

أن المعادلة (8) تمثل المعادلة العامة للقطع الناقص *(Ellipse)* وهذه تمثل شكل المسار الذي يسلكه الجسيم عندما يخضع لتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد وسعتين مختلفتين وفرق الطور بينهما θ. ومن هذه المعادلة يمكن الحصول على أشكال ليساجو لمختلف قيم θ كما يأتي

1. عندما $\theta = 0, 2\pi$ فان المعادلة (8) تصبح

$$\{(\tfrac{x}{a})-(\tfrac{y}{b})\}^2 = 0$$

$$y=\left(\frac{b}{a}\right)x \qquad 9$$

هذه المعادلة تشير إلى أن شكل المسار الذي يسلكه الجسيم يكون خطا مستقيما ميله يكون مقدارا موجبا يساوي (b/a) كما في الشكل الآتي (aو z) وهذا يعني أن x و y لهما نفس الإشارة الجبرية دائما. أي أما يكون كلاهما موجبا أو كلاهما سالبا. وهذه الحالة يقابلها في البصريات ما يدعى بالاهتزاز المستقطب خطيا.

2-عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ فان المعادله 8 تصبح

$$\left(\frac{x^2}{a^2}\right)+\left(\frac{y^2}{b^2}\right)=1 \qquad 10$$

وهي معادلة القطع الناقص التي يقع محوراها الأساسيان على امتداد المحورين السيني والصادي. أن اتجاه حركة الجسيم على هذا المسار عندما $(\theta = \pi/2)$ يمكن تفسيرها كالأتي: عندما يبدأ الجسيم بالحركة في لحظة زمنية $t=0$ فان x تبدأ بالتناقص من أقصى قيمة موجبة لها، بينما y تبدأ مباشرة بالزيادة من الصفر. وهذا يعني أن المسار الناقص يحدث باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقرب الساعة. كما مبين في الشكل الأتي (c). أما إذا كانت الزاوية $(\theta = 3\pi/2)$ فان اتجاه حركة الجسيم تكون باتجاه حركة عقرب الساعة كما مبين في الشكل الآتي (g). ويلاحظ أن المعادلة (11) تختزل إلى شكل دائري عندما تصبح $a=b$.

3. عندما $\theta = \pi$ فان المعادلة (8) تصبح

$$\{(\tfrac{x}{a})+(\tfrac{y}{b})\}^2 = 0$$

$$y=(-b/a)x \qquad 11$$

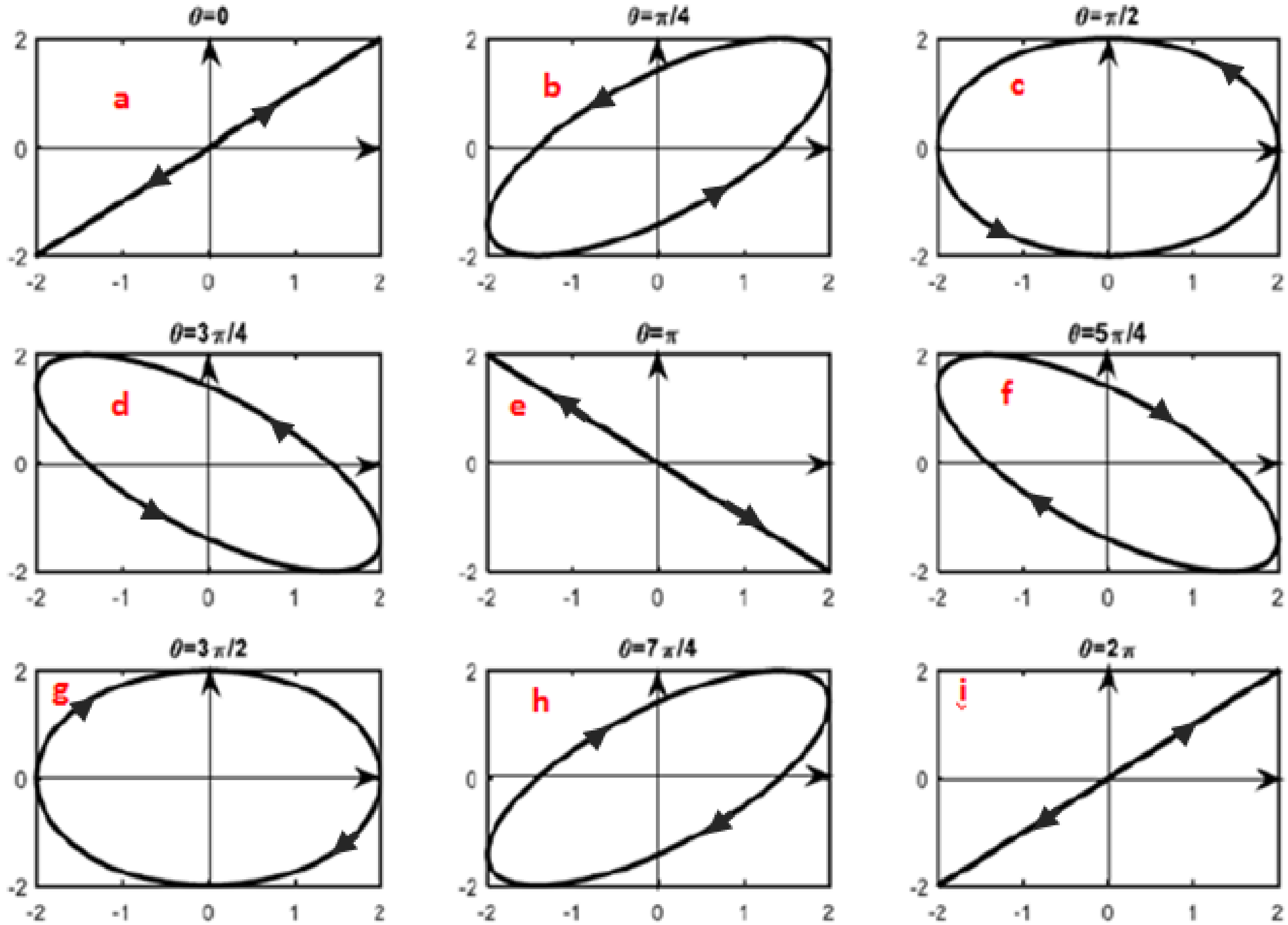
أن هذا الحل يمثل الحالة في الشكل السابق (a) لكن ميل الخط المستقيم هو مقدار سالب يساوي $(-b/a)$.

4.عندما $\theta = \pi/4, 7\pi/4$ فان المعادلة (8) تأخذ شكل قطع ناقص مائل.

فعندما تكون $\theta = \pi/4$ فان اتجاه حركة الجسيم يكون معاكسا لاتجاه حركة عقرب الساعة كما مبين في الشكل الأتي (b). والحقيقة أن هذا الشكل يمثل الحالة عندما تكون φ بين صفر و $\pi/2$ وبذلك يكون هذا الشكل وسطا بين الحالتين (a) و (c). أما عندما تكون $\theta = 7\pi/4$ فان اتجاه حركة الجسيم تكون بنفس اتجاه حركة عقرب الساعة كما مبين في الشكل الأتي (h).

5.عندما $\theta = 3\pi/4, 5\pi/4$ فان المعادلة (8) تأخذ أيضا شكل قطع ناقص مائل وتكون محصلة مسار الحركة للجسيم كما مبين في الشكل الآتي (d و f).

أن هذه السلسلة من التغييرات في شكل ليساجو تتكرر بنفس الطريقة في كل زمن دوري. من هذا نستنتج أن محصلة الحركة لتركيب أي حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد يكون مسارها على شكل قطع ناقص في جميع الحالات، على اعتبار أن الدائرة والخط المستقيم هما حالتان خاصتان من القطع الناقص.



والحركة الفعلية للجسيم أما أن تتم مع اتجاه حركة عقرب الساعة أو في الاتجاه المضاد، ويتوقف ذلك على أي الحركتين تتقدم الأخرى في طورها.

مثال:موجتان تسيران باتجاهين متعامدين متمثلتان بالمعادلتين $x=a sin(\omega t-60)$ و $y=a sin\omega t$. أوجد محصلتيهما واتجاهما.

الحل:

نلاحظ من المعادلتين إن سعة الموجة الأولى $a=a$ وسعة الموجة الثانية $b=a$ وزاوية الطور الابتدائي للموجة الأولى $\theta_1 = 60^o$ وزاوية الطور الابتدائي للموجة الثانية $\theta_1 = 0^o$ ، إذن زاوية الطور للموجة المحصلة

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

$$\theta = 60 - 0 = 60^o$$

وباستخدام معادلة المحصلة الناتجة من موجتين متعامدتين

$$(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{b^2}) - 2(\frac{xy}{ab})cos\theta = sin^2\theta$$

$$(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{b^2}) - 2\left(\frac{xy}{ab}\right)cos60 = sin^2 60$$

$$(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{b^2}) - 2(\frac{xy}{ab})(\frac{1}{2}) = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

$$(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{a^2}) - (\frac{xy}{a^2}) = (\frac{3}{4})$$

وتمثل معادلة المحصله قطع ناقص ، واتجاه المحصلة باتجاه معاكس لاتجاه عقرب الساعة.

سؤال :ما هي الفوائد العملية لأشكال ليساجو؟

ج:تعتبر أشكال ليساجو وسيلة لمقارنة ترددين أو الزمن الدوري لحركتين توافقيتين. ولذلك يمكن استخدامها لإيجاد قيمة التردد المجهول إذا توفر لدينا تردد معلوم. وتفيد أيضا في الكشف عن التغير في طور الحركة الناتجة من تركيب اهتزازيين متعامدين. وهناك طرق عملية عديدة للحصول على أشكال ليساجو منها طرق ميكانيكية وأخرى بصرية إلا أن أهمها على الإطلاق هي الطريقة الالكترونية باستخدام راسم ذبذبات الأشعة المهبطية.

3- تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين نسبة ترددهما 1:2

نفرض أن لدينا جسيما يخضع لحركتين توافقيتين متعامدتين تمثلهما المعادلتين

$$x = asin(2\omega t + \theta) \qquad (1)$$

$$y = bsin\omega t \qquad (2)$$

نحاول الآن ربط المعادلتين بالتخلص من الزمن t. من المعادلة (2) نحصل على

$$(\frac{y}{b}) = sin\omega t \qquad (3)$$

ومن المعادلة ($sin^2\omega t+cos^2\omega t=1$) نجد أن

$$cos\omega t = \sqrt{(1 - sin^2\omega t)}$$

$$cos\omega t = \sqrt{(1 - (\frac{y^2}{b^2}))} \qquad (4)$$

ومن المعادلة (1) نحصل على

$$\left(\frac{x}{a}\right) = sin(2\omega t + \theta) = sin2\omega tcos\theta + cos2\omega tsin\theta \qquad (5)$$

لكن ($sin2\omega t=2sin\omega tcos\omega t$) و ($cos2\omega t=1-2sin^2\omega t$) وبالتعويض في المعادلة (5) نجد أن

$$\left(\frac{x}{a}\right) = 2sin\omega t\ cos\omega t\ cos\theta + (1 - 2sin^2\omega t)sin\theta \qquad (6)$$

بتعويض المعادلتين (3) و (4) في المعادلة (6) نحصل على

$$(\frac{x}{a}) = 2(\frac{y}{b})(1 - (\frac{y^2}{b^2}))^{1/2}cos\theta + (1 - (2(\frac{y^2}{b^2}))sin\theta \qquad (7)$$

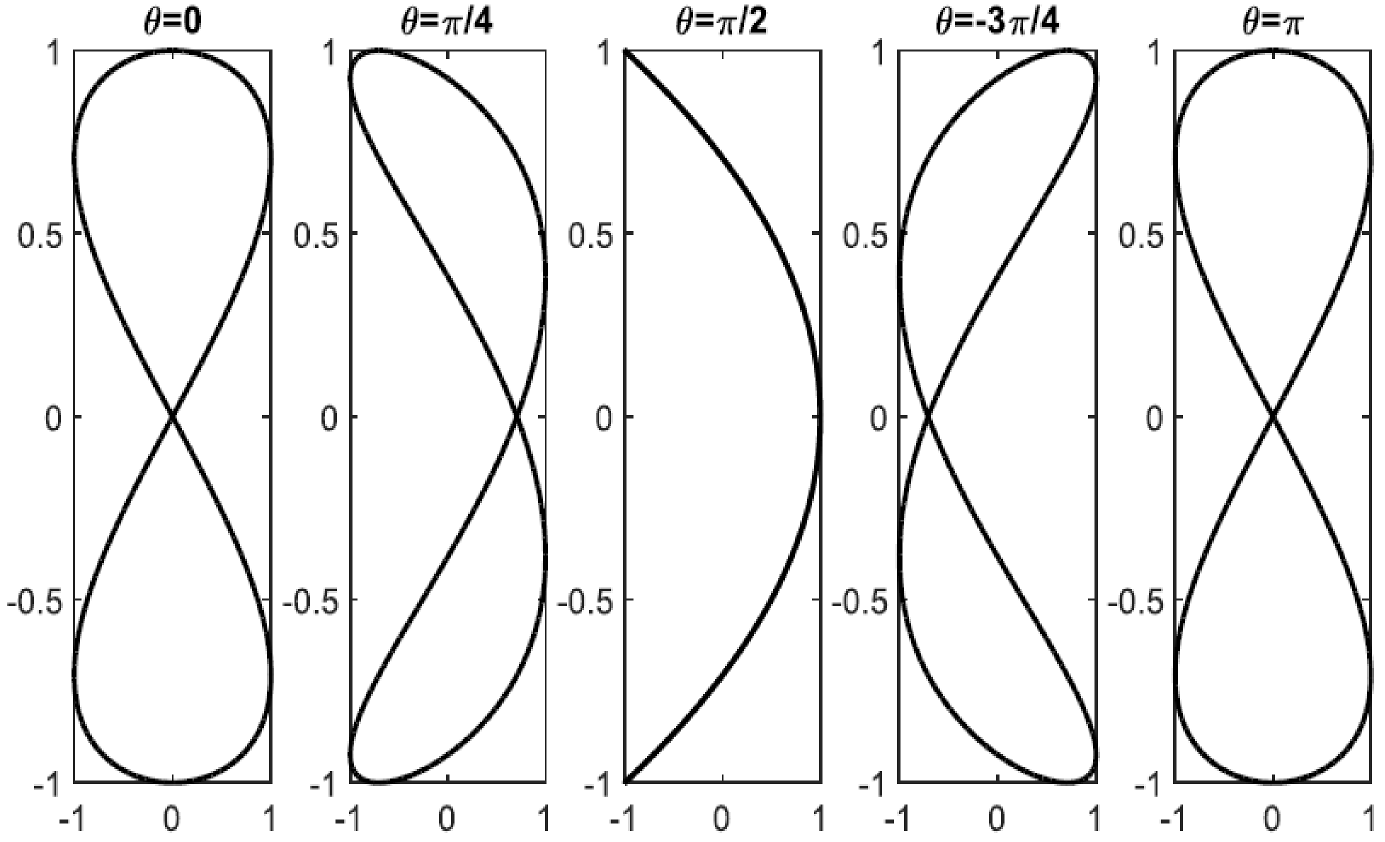
نرتب المعادلة (7) فتصبح

$$\{(\frac{x}{a}) - (1 - (2(\frac{y^2}{b^2}))sin\theta\} = 2(\frac{y}{b})\sqrt{(1 - (\frac{y^2}{b^2}))}\ cos\theta \qquad (8)$$

نربع طرفي المعادلة (8) ونبسط الحدود فتصبح المعادلة الناتجة كالآتي

$$\{(\frac{x}{a}) - sin\theta\}^2 + (4(\frac{y^2}{b^2}))\{(\frac{y^2}{b^2}) + (\frac{x}{a})sin\theta - 1\} = 0 \qquad (9)$$

أن هذه المعادلة العامة للمنحني الذي يحتوي على حلقتين مغلقتين وهي تحدد شكل المسار الذي يسلكه الجسيم لمختلف قيم θ والشكل (1) الآتي يوضح أشكال المنحنيات التي نحصل عليها عندما تأخذ θ القيم $(\pi, 3\pi/4, \pi/2, \pi/4, 0)$



مثال: اثبت أن المعادلة

$$(\frac{x}{a}) - (1 - (2(\frac{y^2}{b^2}))sin\theta = 2(\frac{y}{b})\sqrt{(1 - (\frac{y^2}{b^2}))}\, cos\theta$$

تحقق المعادله التاليه

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + \left(\frac{2y}{b}\right)^2\left[\left(\frac{x}{a}\right)sin\theta + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1\right] = 0$$

الحل

بتربيع الطرفين نجد ان

$$\left[(\frac{x}{a}) - (1 - (2(\frac{y^2}{b^2}))sin\theta\right]^2 = \left[2(\frac{y}{b})\sqrt{(1 - (\frac{y^2}{b^2}))}\, cos\theta\right]^2$$

$$\left[\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta + (2\frac{y^2}{b^2})sin\theta\right]^2 = 4(\frac{y}{b})^2(1 - (\frac{y^2}{b^2}))\, cos^2\theta$$

$$\left[\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right) + (2\frac{y^2}{b^2})sin\theta\right]^2 = (\frac{2y}{b})^2 cos^2\theta - (\frac{2y}{b})^4\, cos^2\theta$$

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + 4\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)\left(\frac{y^2}{b^2}\right) sin\theta + 4(\frac{y}{b})^4\, sin^2\theta = (\frac{2y}{b})^2 cos^2\theta - \left(\frac{2y}{b}\right)^4\, cos^2\theta$$

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + 4\left(\frac{xy^2}{ab^2}\right) sin\theta + 4\left(\frac{y}{b}\right)^4 (sin^2\theta + cos^2\theta) = \left(\frac{2y}{b}\right)^2 (cos^2\theta + sin^2\theta)$$

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + 4\left(\frac{xy^2}{ab^2}\right) sin\theta + 4\left(\frac{y}{b}\right)^4 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2 = 0$$

4- تمثيل الحركة التوافقية البسيطة بالمتجه الدوار.

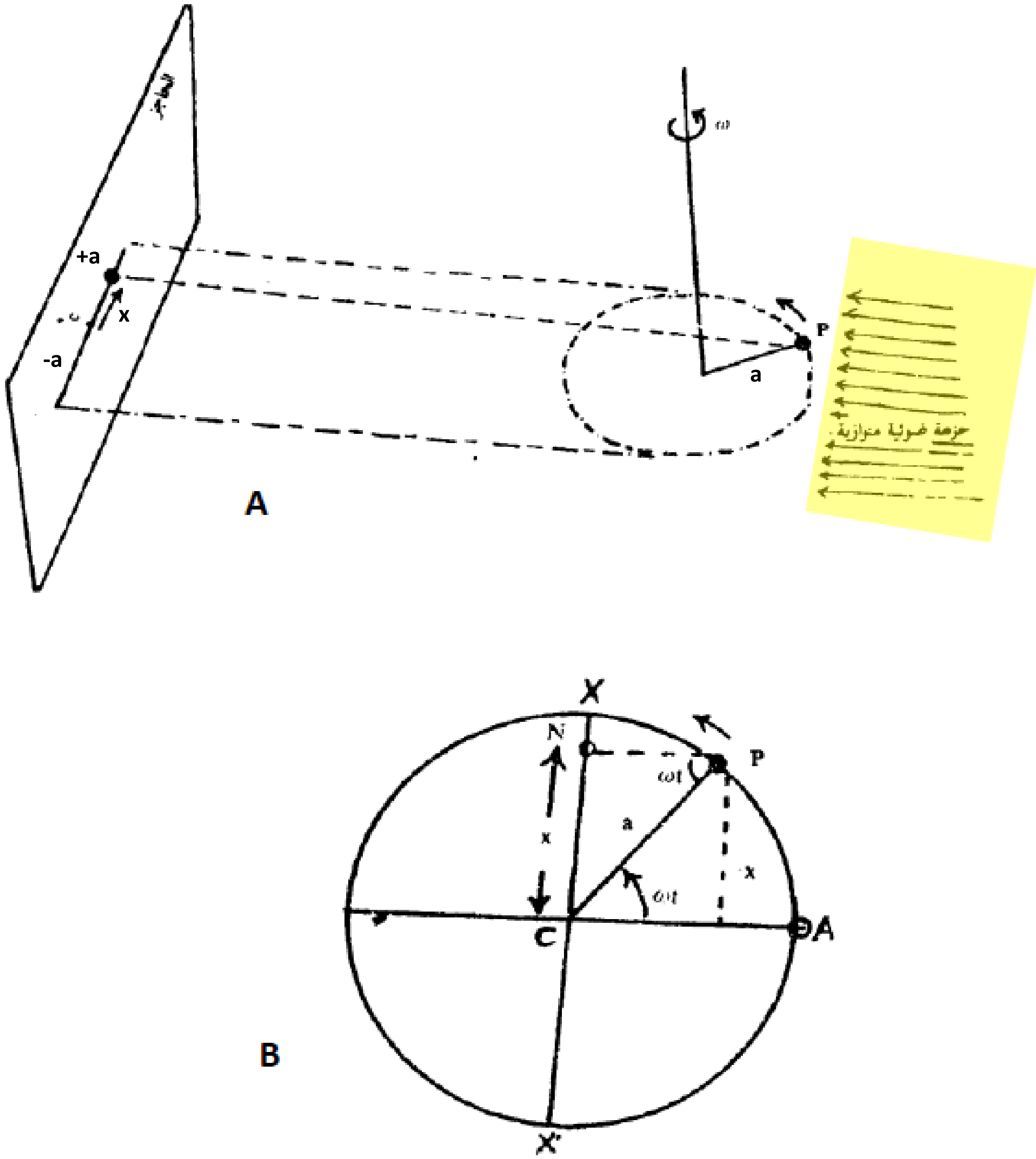
ان من الطرق المفيدة في الفيزياء هي وصف الحركة التوافقية البسيطة من خلال مسقط الحركة الدائرية المنتظمة.

لنفرض أن لدينا جسيماً P مثبت بطرف ذراع أفقي طوله a وهذا الذراع متصل بمحور عمودي يدور بسرعة منتظمة ω . ان a تمثل نصف قطر المسار الدائري الذي يسلكه الجسيم خلال الحركة ويدعى بالمتجه الدوار . ونفرض ان حزمة ضوئية أفقية تلقي ظلاً للجسيم على حاجز عمودي كما مبين في الشكل (A 3-4) فعند أمعان النظر على حركة ظل الجسيم على الحاجز نلاحظ أنه ينجز حركة توافقية بسيطة على طول الخط الأفقي على الحاجز الذي مركزه c وبزمن دوري T قدره $\frac{2\pi}{\omega}$ وبسعة مقدارها a.

وللحصول على معادلة الحركة التوافقية البسيطة نلاحظ الشكل (B 3-4) . نرسم القطر X'X للدائرة التي مركزها c ومن النقطة P التي تمثل الموقع الآتي للجسيم نقيم العمود PN حيث N هي النقطة التي تقابل الجسيم وتمثل قاعدة العمود الساقط على القطر من ذلك الجسيم . فاذا استمر الجسيم P بالدوران بسرعة منتظمة على محيط الدائرة فان النقطة N ستستمر بالحركة التوافقية البسيطة على امتداد القطر 'XX فلو فرضنا ان الجسيم بدأ بالحركة في الزمن $t = 0$ من الموقع A فان النقطة N تكون في تلك اللحظة في مركز الدائرة C . وعندما يصل الجسيم الموقع X فان النقطة N تتطابق مع 'X وعندما يستمر الجسيم بالحركة على محيط الدائرة ويصل الموقع X فان النقطة N تتطابق مع 'X وعندما يعود الجسيم الى A بعد اكمال دورة واحدة تعود النقطة الى المركز C وهكذا عندما يتكرر دوران الجسيم على محيط الدائرة بسرعة منتظمة تتكرر الحركة التوافقية البسيطة للنقطة N على طول القطر 'XX.

نفرض ان الجسيم بدأ بالحركة من الموقع A في اللحظة الزمنية $t = 0$ وبعد فترة زمنية t فان موقعه الآني يكون P والنقطة المقابلة هي N . وفي هذه الحالة تكون الزاوية ACP مساوية للزاوية NPC وعليه يكون لدينا

$$\sin \omega t = \frac{x}{a}$$



الشكل (3·4) الحركة التوافقية البسيطة تمثل بمسقط للحركة الدائرية المنتظمة في نفس مستوى الحركة .

حيث ان x تمثل المسافة من النقطة N الى مركز الدائرة C وندعى بالازاحة الآنية . لذلك فان .

$$x = a \sin \omega t \qquad ......(3·27)$$

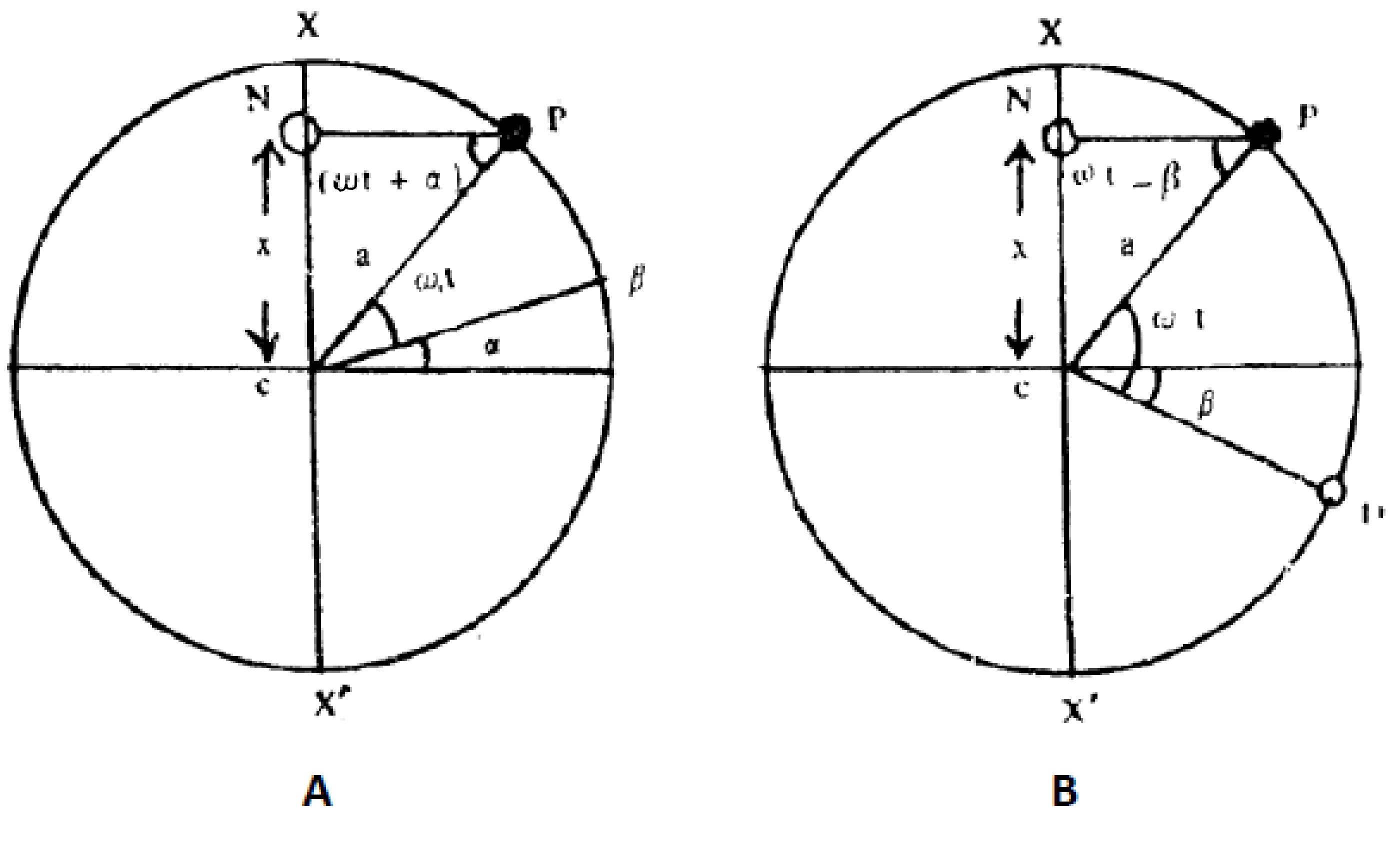
اما اذا بدا الجسيم بالحركة في الزمن $t = o$ من الموقع B المبين في الشكل (A3·5

فان الازاحة الآنية x للنقطة N من مركز الدائرة c في الزمن t هي

$$x = a \sin(\omega t + \alpha) \qquad \ldots\ldots(3\cdot28)$$

اما اذا بدأ الجسيم بالحركة في اللحظة الزمنية $t = 0$ من الموقع D المبين في الشكل (**B 3.5**) . فان الازاحة الآنية للنقطة N من مركز الدائرة C في الزمن t هـــي

$$x = a \sin(\omega t - \beta) \qquad \ldots\ldots(3\cdot29)$$



الشكل (3·5)

نماذج أسئلة مع الحل

السؤال الأول :موجتان لهما نفس السعة وتختلفان في الطور، ما هي محصلة الموجة الناتجة، ناقش ذلك بالتفصيل.

الحل

نفرض ان الموجة الاولى تمثلها المعادلة

$$y_1 = A\sin(\omega t - kx) \quad ...(1)$$

الموجة الثانية تمثلها المعادلة

$$y_2 = A\sin(\omega t - kx + \phi) \quad ...(2)$$

ويمكن كتابة المعادلة الثانية هكذا

$$y_2 = A\sin\left[\omega t - k\left(x - \frac{\phi}{k}\right)\right] \quad ..... (3)$$

أو

$$y_2 = A\sin\left[\omega - \left(t + \frac{\phi}{\omega}\right) - kx\right] \quad ..... (4)$$

من المعادلتين (1) ، (3) يتضح ان الموجتين يفترقان عن بعضهما في أي لحظة زمنية t بمسافة قدرها ($\frac{\phi}{k}$) في اتجاه الحركة X ومن المعادلتين (1) و (4) يتضح ان الموجتين عند الموضع x يعطيان حركتين توافقيتين بسيطتين باختلاف زمني قدره ($\frac{\phi}{\omega}$) محصلة الموجتين هي

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = A[\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t - kx + \phi) \quad (5)$$

ولكن من نظريات المثلثات لدينا

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

لذلك فان المعادلة (5) تصبح

$$y = A\left[2\sin\left(\omega t - kx + \frac{\phi}{2}\right)\cos\frac{\phi}{2}\right] \quad \dots (6)$$

$$= 2A\cos\frac{\phi}{2}\sin(\omega t - kx + \phi/2)$$

وهذه تمثل معادلة موجة لها نفس تردد الموجات الأصلية ولكن سعتها تساوي

$$2A\cos\frac{\phi}{2}$$

واذا كانت ϕ صغيرة جداً فان

$$\cos\frac{\phi}{2} \simeq 1$$

وتكون السعة مساوية تقريباً 2A أي ضعف السعة الأصلية تقريباً واذا كانت $\phi = 0$ فان السعة تكون ضعف السعة الأصلية وتكون الموجتين متحدتين في الطور وتنطبق كل منهما على الأخرى ، أي ان الموجتين تقويان بعضهما ويسمى التداخل بينهما بالتداخل البناء .

واذا كانت ($\phi = 180°$) فان محصلة السعة تصبح صفراً وتقع قمة احداهما فوق قاع الأخرى . أي ان الموجتين تهدمان بعضهما ، ويسمى التداخل في هذه الحالة بالتداخل الأتلافي أو التداخل الهدام . واذا كان فرق الطور يختلف بين الموجتين فان محصلة السعة تتراوح قيمتها بين الصفر و 2A .

السؤال الثانى:

في تجربة للحصول على أشكال ليساجو استخدمت شوكتا رنين ، تردد الأولى 250 هيرتز ووجد ان شكل ليساجو الدائري يكمل بعد مرور 5 ثانية . كيف يمكن ايجاد تردد الشوكة الثانية ؟

الحل

لنأخذ شوكة رنانة مجهولة التردد ولنفرض ان هذا التردد هو f_1 فاذا اخذنا شوكة رنانة اخرى ترددها f_2 وهذا التردد يكاد يكون مساوياً لـ f_1 (او بالاحرى يختلف قليلاً جداً عن f_1) اذا اهتزت الشوكتين في مستويين متعامدين فان اي جسيم يتأثر آنياً بالاهتزازين يسلك مسار يدعى بشكل ليساجو. وعندما يكون فرق التردد بين الشوكتين صغيراً فان فرق الطور بين الاهتزازين يتغير مع الزمن. وعليه فان شكل ليساجو يتغير استمرار مع الزمن. وهكذا نلاحظ ان الشكل يتغير باستمرار مع تغير الطور من صفر الى 2π.

واذا فرضنا ان دورة كاملة من التغير في الشكل تستغرق t ثانية فان فرق التردد بين الشوكتين $= \frac{1}{t_1}$

وعليه فان تردد الشوكة المجهولة $= \left(\frac{1}{t}\right) \mp f_2$

الآن لدينا

تردد الشوكة المعلومة التردد = 250 هيرتز

الزمن المستغرق ليكمل شكل ليساجو الدائري = 5 ثانية.

لذلك فان فرق التردد بين الشوكتين $= \frac{1}{5}$ هيرتز

وعليه فان الترددات المتوقعة للشوكة المجهولة التردد

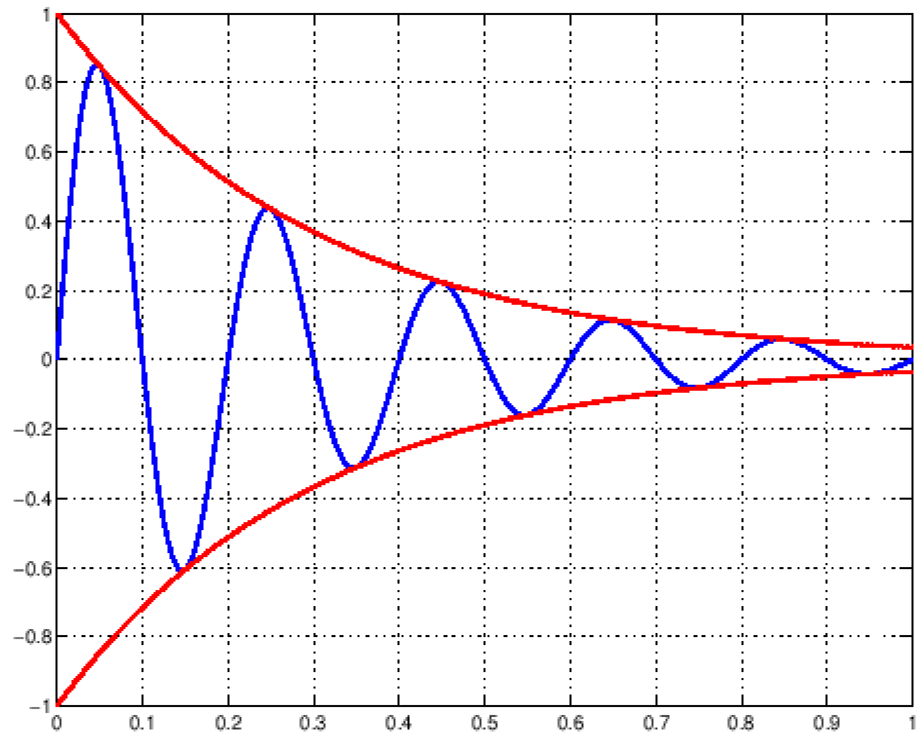
اما $0.2 + 250 = 250.2$ هيرتز

أو $0.2 - 250 = 249.8$ هيرتز

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الفيزياء
المرحلة:الثانية
المادة: الصوت والحركة الموجية

الفصل الرابع

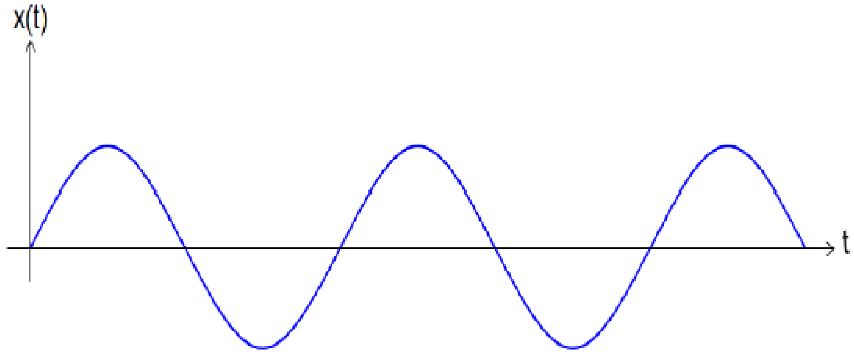
الاهتــزاز المضمحل



مدرس المادة: د.محسن وليد محمد

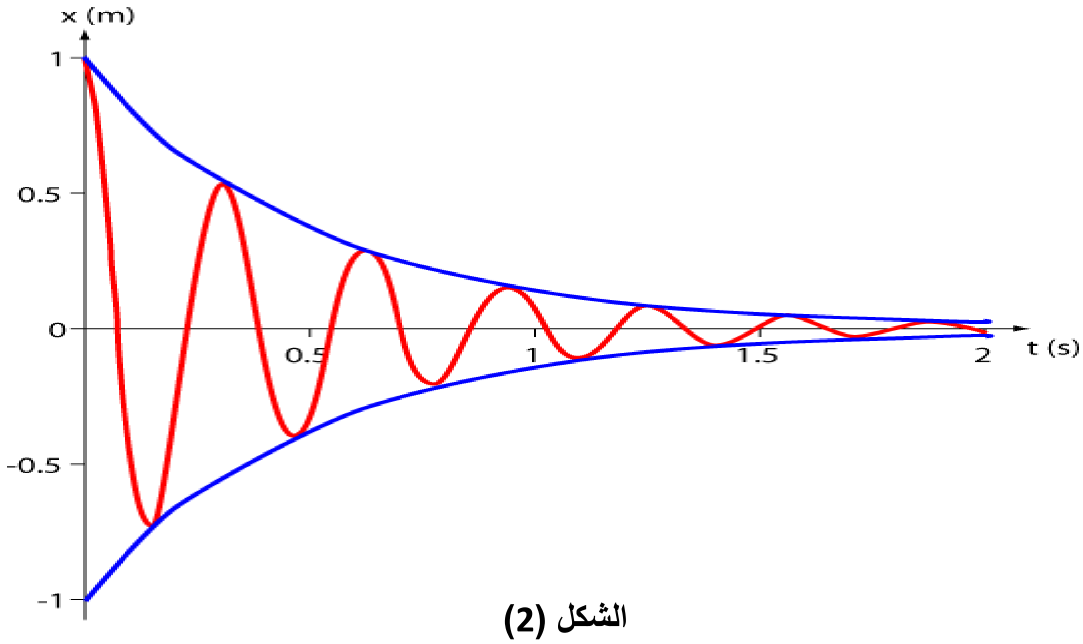
المقدمة

لقد اعتبرنا في دراستنا للحركة التوافقية البسيطة في الفصل الثاني أن الاهتزاز حر وغير مضمحل (*Damped*). وهو الاهتزاز الحاصل من إزاحة الجسيم قليلا عن موضع توازنه ومن ثم تركه يهتز بصورة حرة تحت تأثير قوة الاستعادة الناتجة من خاصية المرونة فقط، دون أن يعاني أي مقاومة خارجية آو تبديد في الطاقة مهما كان شكله. ونتيجة ذلك فان سعة الحركة الاهتزازية تبقى ثابتة مما يعني أن الاهتزاز يستمر دون توقف مع مرور الزمن كما مبين في الشكل (1).



الشكل (1)

وفي الحقيقة أن مثل هذا الاهتزاز يمثل حالة مثالية تماما إذ لا يوجد مهتز حقيقي يستمر على الاهتزاز الحر إلى الأبد. وفي الواقع أن أي مهتز حقيقي لابد أن يعاني شيئا من الفقدان في الطاقة بشكل آو بآخر. ونتيجة ذلك فان سعة الحركة الاهتزازية تتضاءل تدريجيا مع مرور الزمن كما مبين في الشكل (2). أن مثل الاهتزاز يدعى بالاهتزاز المضمحل الذي يمثل حالة أكثر واقعية من الاهتزاز غير المضمحل.



الشكل (2)

القوى المسببة لاضمحلال الاهتزاز

بصورة عامة يمثل الاهتزاز بحد ذاته شكلا من الضياع بالطاقة غير مرغوب فيه في كثير من الأحيان لأسباب متعددة، منها على سبيل المثال انه قد يكون سببا في انهيار الأجزاء المهتزة، أو في توليد أصوات مزعجة أو في نقل قوى وحركات غير مطلوبة إلى أجزاء أو أجسام أخرى قريبة. لهذا السبب يمكن اعتبار أن الطاقة المصاحبة للاهتزاز تستهلك بشكل أو بأخر. وفي الواقع أن كل جسيم مهتز يجابه نوعا من القوى المقاومة لحركته والتي تؤدي إلى اضمحلال حركته الاهتزازية تدريجيا مع الزمن وقد يكون مقدار هذه القوى من الكبر مالا يسمح بحدوث الاهتزاز أصلا. ومن الصعب وصف القوى الحقيقية المؤدية إلى تبديد الطاقة المصاحبة للاهتزاز. إلا انه بالتأكيد يمكن حصر القوة المقاومة لحركة الجسيم المهتز بعامل أو أكثر من عوامل الاضمحلال التي قد تكون ناتجة من لزوجة المائع (كالهواء أو السائل) الذي يتحرك خلاله الجسيم المهتز أو الاحتكاك الداخلي بين الجزيئات التي تعاني حركة نسبية نتيجة الاهتزاز أو قوى كهربائية ستاتيكية كتلك الناتجة عن الاحتكاك الجاف (احتكاك كولومب لتوليد الشحنات الساكنة) أو قوى محتثة ناتجة من الحث الكهرومغناطيسي المتولد بسبب اهتزاز المهتز الذي يحتوي مواد قابلة للتمغنط قرب مغناطيس طبيعي أو كهربائي. إن واحدا أو أكثر من هذه العوامل أو غيرها موجود دائما في أي عملية اهتزاز، لذلك فان شغلا يجب أن يصرف دائما للتغلب عليها، وهذا الشغل المصروف يتبدد تدريجيا على شكل حرارة مفقودة إلى الوسط المحيط بالمهتز. إن هذا التضاؤل في السعة يعرف بالاضمحلال أو التبديد في الطاقة. ومثل هذه الحركة الاهتزازية تدعى بالحركة التوافقية المضمحلة. إن جميع المهتزات في الطبيعة التي تهتز اهتزازا حرا تعاني هذا النوع من الاهتزاز ولكن بدرجات متفاوتة. فالبندول البسيط المهتز في الهواء يعاني مقاومة قليلة نسبيا لذلك فان سعته تتضاءل تدريجيا بمقدار ضئيل وعليه يستمر على الاهتزاز لفترة طويلة نسبيا إذا ما ترك يهتز اهتزازا حرا. ولكن إذا ما غمر البندول المهتز في الماء فان المقاومة التي يعانيها تصبح كبيرة لذلك فان سعته تتضاءل بمقدار ملحوظ تماما وعليه فانه يتوقف عن الاهتزاز بعد فترة قصيرة جدا، أما إذا غمر في سائل عالي اللزوجة كالعسل مثلا فانه لا يهتز بل يرجع إلى موضع توازنه الأصلي إذا ما أزيح عن ذلك الموضع وترك حرا. ونفس الشيء يحدث لأي مهتز آخر إذا ما تعرض إلى نفس الشروط.

والحقيقة إن أي جسم يهتز في وسط ما كالهواء مثلا يفقد بالضرورة طاقة. فأثناء عملية الاهتزاز فان جزيئات الهواء المحيطة به تهتز أيضا والطاقة الاهتزازية التي اكتسبتها هذه الجزيئات تمثل جزء من الطاقة التي فقدها الجسم المهتز. والحقيقة إن الصوت المنبعث من أي جسم مهتز كالشوكة الرنانة مثلا يمثل الطاقة الاهتزازية المنقولة عبر الهواء إلى آذاننا وهذه الطاقة تمثل شكلا من أشكال الطاقة المستنزفة من الجسم المهتز.

ولغرض دراسة الاهتزاز المضمحل دراسة وافية لابد من اخذ كل قوى التبديد في الاعتبار، ولكن ليس من السهل حصر كل عوامل التبديد بالطاقة خاصة وان قوى التبديد قد تعتمد على عوامل عديدة ومختلفة مثل الإزاحة، السرعة، الإجهاد ... الخ. لذلك ستقتصر دراستنا في هذا الفصل على اعتبار أكثر العوامل بروزا في إحداث الاضمحلال في حركة المهتز. وهذا العامل ناتج من مقاومة المائع بسبب لزوجته لحركة الجسيم.

إن مقدار المقاومة التي يبديها المائع لحركة الجسيم تعتمد على سرعة الجسيم وشكله وخواص المائع. وبالنسبة لجسيم ما يتحرك في مائع معين تختلف العلاقة بين قوة مقاومة المائع لحركة الجسيم باختلاف السرعة. فعند السرع العالية يكون مقدار القوة المقاومة متناسب طرديا مع مربع السرعة تقريبا. وعند السرع الواطئة أو الاعتيادية يكون مقدار القوة المقاومة F_R متناسب خطيا مع السرعة الآنية v للجسيم المهتز. ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا بالتناسب

$$F_R \alpha v$$

ومن هذا التناسب ينتج أن

$$F_R = -Rv \qquad (1)$$

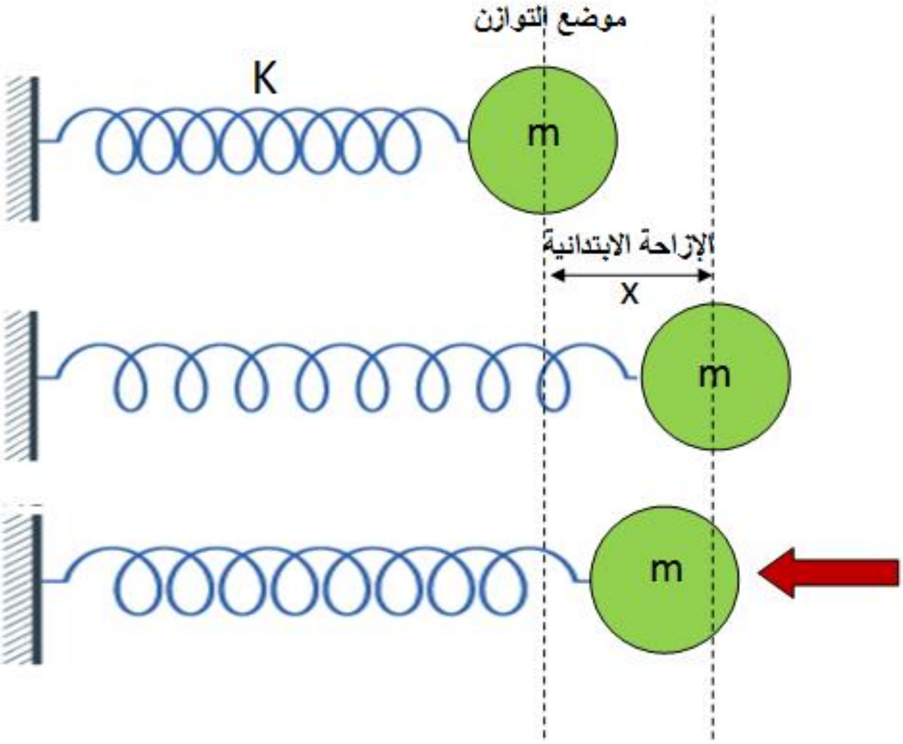
حيث R يمثل ثابت التناسب ويدعى بثابت المقاومة أو ثابت الاضمحلال. والإشارة السالبة تشير إلى أن اتجاه القوة المقاومة يكون دائما معاكسا لاتجاه حركة الجسم. وهذا يعني أن هذه القوة تحاول دائما إبطاء حركة الجسيم المهتز.

ويمكن أن نعبر عن السرعة الآنية v للجسيم بالمقدار dx/dt إذا كان الجسيم يتحرك باتجاه المحور السيني، وتصبح المعادلة (1) كالاتي

$$F_R = -R(\frac{dx}{dt}) \qquad (2)$$

إن العلاقة الخطية إلى جانب كونها تمثل حالة ليست بعيدة عن الواقع فإنها تقود إلى ابسط التحليلات الرياضية فيما يتعلق بالاهتزاز المضمحل، لذلك ستقتصر دراستنا في هذا الفصل على اعتبار إن القوة المقاومة التي يعانيها الجسيم المهتز والناجمة عن اللزوجة أو الاحتكاك تتناسب طرديا مع السرعة الآنية للجسيم.

سنعتبر هنا حركة المهتز المؤلف من جسيم كروي كتلته m متصل بنابض حلزوني ثابت مرونته k ومثبت طرفه بأحكام بمسند ثابت كما مبين في الشكل (3).



الشكل (3) يبين مهتز توافقي تؤثر عليه قوتان هما قوة الاستعادة وقوة مقاومة المائع

عندما تزاح الكتلة m إزاحة صغيرة مقدارها x فان قوة استعادة تظهر مقدارها $(-kx)$، وحينما تترك الكتلة فأنها تتحرك للعودة إلى موضع توازنها وخلال حركتها تعاني قوة مقاومة ناتجة من الاحتكاك أو لزوجة المائع ومقدار هذه القوة هو $(-R(dx/dt))$ حيث الإشارة السالبة تشير إلى أن اتجاه هذه القوة يعاكس دائما اتجاه السرعة النسبية للكتلة المهتزة. أن محصلة القوة المؤثرة على الكتلة المتحركة في أية لحظة زمنية t هي $\left(-R\left(\frac{dx}{dt}\right)\right) - kx)$ والآن نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة فينتج

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -R\left(\frac{dx}{dt}\right) - kx \qquad (1)$$

نقسم طرفي المعادلة (1) على m ونرتب الحدود فتصبح

$$(\frac{d^2x}{dt^2}) + (\frac{R}{m})(\frac{dx}{dt}) + (\frac{k}{m})x = 0 \qquad (2)$$

ولتسهيل شكل الحل للمعادلة (2) نفرض أن $2r=R/m$، ولما كانت $\omega^2=k/m$ فان المعادلة (2) تصبح

$$(\frac{d^2x}{dt^2}) + 2r\left(\frac{dx}{dt}\right) + w^2x = 0 \qquad (3)$$

هذه هي المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية الحرة المضمحلة، ويلاحظ أنها معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

حل معادلة الحركة التوافقية المضمحلة

بالنظر لعدم إجراء تكامل مباشر للمعادلة (3) لذلك يجب البحث عن الحل المناسب بطريقة أخرى. وبالتخمين نجد أن الحل المطلوب يجب أن يكون دالة تعطي نفس الشكل الرياضي لكل الحدود فيها. والدالة المناسبة لذلك هي الدالة التي يكون شكل المشتقة الأولى والثانية لها مشابها تماما للدالة ذاتها. والدالة الرياضية التي تتوفر فيها هذه الشروط هي الدالة الأسية $e^{\alpha t}$، وعليه يمكن أن نفرض أن الحل المناسب هو

$$x = De^{\alpha t} \qquad (1)$$

حيث D ثابت اختياري، نعوض هذا الحل في المعادلة (3) في الفقرة السابقة، فينتج

$$\left(\frac{d^2De^{\alpha t}}{dt^2}\right) + 2r\left(\frac{dDe^{\alpha t}}{dt}\right) + w^2De^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2De^{\alpha t} + 2r\alpha De^{\alpha t} + \omega^2De^{\alpha t} = 0 \qquad (2)$$

والمعادلة (2) تصبح

$$De^{\alpha t}\,(\alpha^2 + 2r\alpha + \omega^2) = 0 \qquad (3)$$

وهذا يعني أما $De^{\alpha t}=0$ وهذا غير ممكن لأنه يمثل الحل المفروض ولا يساوي صفرا إلا إذا كانت قيمة المتغير t تساوي مقدارا سالبا لانهائيا في الكبر. أو أن $\alpha^2+2r\alpha+\omega^2=0$ والطريقة المناسبة لحل هذه المعادلة هي باستخدام الدستور

$$\alpha = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (4)$$

وبالتعويض نجد أن

$$\alpha = \frac{-2r \pm \sqrt{(4r^2 - 4\omega^2)}}{2} \qquad (5)$$

أن المعادلة (5) تشير إلى أن هنالك حلين للمعادلة هما

$$\alpha_1 = -r + \sqrt{(r^2 - \omega^2)}$$

$$\alpha_2 = -r - \sqrt{(r^2 - \omega^2)}$$

وبتعويض النتيجتين السابقتين في المعادلة (1) نجد أن الحل العام لمعادلة الحركة هو

$$x = D_1 e^{\alpha_1 t} + D_2 e^{\alpha_2 t} \qquad (6)$$

أي أن

$$x = D_1 e^{-r + \sqrt{(r^2 - \omega^2)} t} + D_2 e^{-r - \sqrt{(r^2 - \omega^2)} t} \qquad (7)$$

حيث أن D_1 و D_2 يمثلان ثابتين اختياريين يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة. ومعلوم أن الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية يجب أن يتضمن ثابتين اختياريين. أن التفسير الفيزيائي للمعادلة (7) يشير إلى وجود أربع حالات للحركة كل منها يعتمد على قيمة r بالنسبة لـω و هذه الحالات هي

1.الحالة الأولى: وهي تمثل حالة انعدام الاضمحلال ($r=0$)

و هذه الحالة تعني أن المقاومة التي يعانيها المهتز خلال حركته معدومة تماما أي أن ($R=0$) و هذه الحالة تقابل الحركة التوافقية البسيطة غير المضمحلة. في هذه الحالة يصبح الحل للمعادلة (7) كالآتي

$$x = D_1 e^{+\sqrt{-\omega^2} t} + D_2 e^{-\sqrt{-\omega^2} t} \qquad (8)$$

$$x = D_1 e^{+i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t} \qquad (9)$$

حيث أن i يمثل عدد خيالي ويساوي $\sqrt{-1}$. ولكن لدينا

$$e^{i\omega t} = coswt + i\ sinwt \qquad (10)$$

$$e^{-i\omega t} = coswt - i\ sinwt \qquad (11)$$

نعوض المعادلتين (10) و (11) في المعادلة (9) فنجد أن

$$x = D_1(cos\omega t + isin\omega t) + D_2(cos\omega t - isin\omega t)$$

$$x = (D_1 + D_2)cos\omega t + i(D_1 + D_2)sin\omega t \qquad (12)$$

فإذا فرضنا أن $A=(D_1+D_2)$ و $B=i(D_1-D_2)$ فبالتعويض في المعادلة (12) نجد أن الحل الأخير يصبح

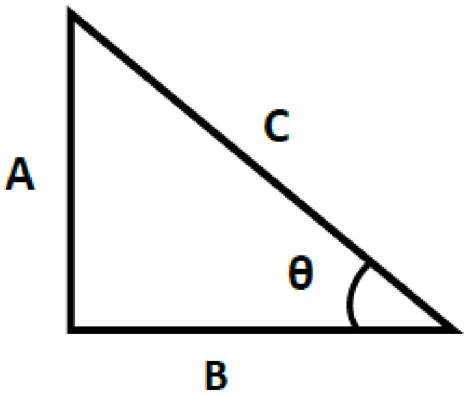
$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (13)$$

وهذا الحل يمكن تبسيطه أكثر إذا ضربنا وقسمنا الطرف الأيمن على المقدار C، حيث $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ وان $\tan\theta = \frac{A}{B}$ فعندئذ يصبح الحل الأخير كالآتي

$$x = C\{(A/C)\cos\omega t + (B/C)\sin\omega t\}$$

$$x = C(\sin\theta\cos\omega t + \cos\theta\sin\omega t)$$

$$x = C\sin(\omega t + \theta) \qquad (14)$$



حيث أن θ تمثل زاوية الطور الابتدائي للحركة وتساوي $arctan(A/B)$. إن هذه المعادلة تمثل الحركة التوافقية البسيطة وتشير إلى أن سعة الحركة خلال الاهتزاز تبقى ثابتة مع مرور الزمن.

2.الحالة الثانية: وهي تمثل حالة الحركة الناقصة الاضمحلال ($r^2<\omega^2$)

هذه الحالة تعني أن المقاومة التي يعانيها المهتز خفيفة أي أن الاضمحلال في الاهتزاز قليل نسبيا فعندما يكون معامل الاضمحلال r صغيرا بالمقارنة مع التردد الزاوي ω فان المقدار تحت الجذر $(r^2-\omega^2)^{1/2}$ يكون سالبا وبالتالي يكون الجذر مقدار خيالي. ونفرض انه في حالة $r<\omega$ أن $(r^2-\omega^2)^{1/2} = i\omega_o$، حيث أن ω_o تمثل التردد الزاوي المضمحل. نعوض في المعادلة (7) فيصبح الحل كالآتي

$$x = D_1 e^{(-r+iw_o)t} + D_2 e^{(-r-iw_o)t}$$

$$x = e^{-rt}(D_1 e^{iw_o t} + D_2 e^{-iw_o t}) \qquad (15)$$

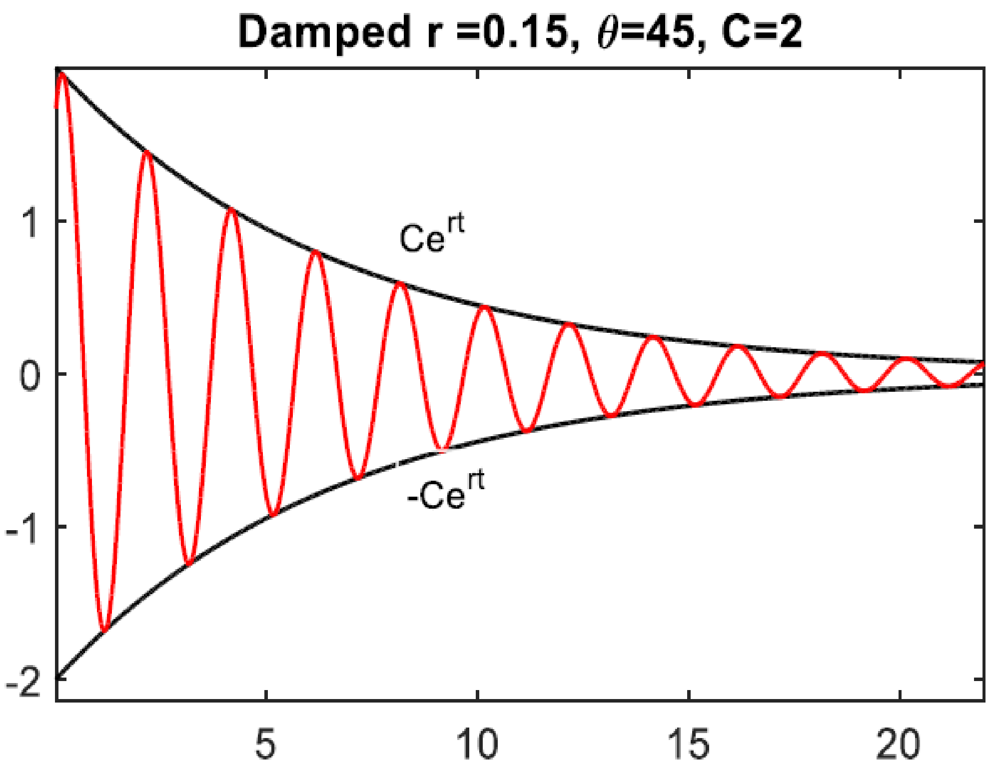
وبنفس الطريقة التي تم إتباعها في الحالة الأولى تماما يمكن إثبات أن

$$D_1 e^{iw_o t} + D_2 e^{-iw_o t} = C sin(w_o t + \theta) \qquad (16)$$

وبذلك يصبح الحل العام في هذه الحالة كالآتي

$$x = Ce^{-rt} sin(w_o t + \theta) \qquad 17)$$

حيث أن C,θثابتان اختياريان يمكن إيجاد قيمتهما من الشروط الابتدائية للحركة. أن هذه المعادلة تمثل الحركة التوافقية البسيطة المضمحلة ويمكن تمثيلها بيانيا كما مبين في الشكل (4).



الشكل (4) يبين منحني الإزاحة والزمن في الاهتزاز المضمحل

في الشكل السابق يتضح أن سعة الحركة تتضاءل مع الزمن. وهذه السعة يمكن تحديدها عندما تكون قيمة $sin(\omega_o t+\theta)$ في أقصى قيمة لها، أي عندما $sin(\omega_o t+\theta)=\pm 1^*$ وبذلك تكون السعة الفعالة للحركة هي $\pm Ce^{-rt}$. ويلاحظ أنها مقدار متغير ويعتمد على عامل الاضمحلال r والزمن t. وهذه تشير إلى أن السعة تتناقص أسيا مع الزمن حتى تنعدم عندما تكون قيمة t مالانهاية. إن هذه الحالة تعني أن المقاومة التي يعانيها المهتز قليلة لدرجة تسمح بحدوث اهتزازات حول موضع التوازن، على الرغم من سعة هذه الاهتزازات تتناقص مع الزمن كما هو مبين في الشكل السابق. أن الفرق في الزمن الذي يفصل بين قمتين (أو قعرين) متتاليين يسمى الزمن الدوري للاهتزاز الحر المضمحل ويرمز له عادة بالرمز T_oويمكن إيجاده من العلاقة

$$\sqrt{(r^2-\omega^2)} = i\omega o$$

التي منها نجد أن

$$\omega_o = \sqrt{(\omega^2-r^2)} \tag{18}$$

وحيث أن $\omega_o=2\pi/T_o$ لذلك فان

$$T_o = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega^2-r^2)}} \tag{19}$$

وبالمقارنة مع الزمن الدوري للاهتزاز الحر غير المضمحل $T=2\pi/\omega$ نجد أن T_o تكون دائما اكبر من T وهذا يعني أن المقاومة التي يعانيها الجسيم المهتز تعمل على إبطاء حركته، وكلما ازدادت المقاومة الاحتكاكية المقاسة بدلالة معامل الاضمحلال r ازداد طول الزمن الدوري T_o، حتى إذا أصبحت قيمة r مساوية لقيمة ω أصبح طول الزمن الدوري T_o مالانهاية من الكبر مما يعني أن الحركة لن تكون اهتزازية على الإطلاق بل أن الجسيم سيعود إلى موضع توازنه الأصلي إذا ترك حرا بعد أي إزاحة ابتدائية. مما تقدم يتضح أن وجود مقاومة قليلة أمام أي مهتز يؤدي إلى اضمحلال الاهتزاز وهذا يظهر على شكل تأثيرين أولهما تناقص تدريجي في السعة وثانيهما زيادة في طول الزمن الدوري وهذان التأثيران مرتبطان بالمعادلتين (17) و (19). إن هذا النوع من الاهتزاز يمثل اغلب حالات الاهتزاز في الطبيعة، وفيه تتبدد الطاقة تدريجيا نتيجة المقاومة التي يعانيها المهتز حتى تنعدم الحركة ويتوقف تماما عن الاهتزاز.

الحالة الثالثة: وهي تمثل حالة الحركة الحرجة ($r^2 = \omega^2$)

أن هذه الحالة الخاصة تمثل الحد الفاصل بين سلوكين مختلفين تماما للمهتز. السلوك الأول هو سلوك اهتزازي ويبدأ عندما تقل قيمة r قليلا عن قيمة ω وهذه الحالة قد تمت دراسته في البند السابق. والسلوك الثاني هو سلوك غير اهتزازي ويحدث عندما تكون قيمة r مساوية أو تزيد عن قيمة ω وفي هذا البند سنحلل الحالة عندما $\omega=r$ وفي البند القادم سنحلل الحالة عندما $\omega<r$. ذا عوضنا $\omega^2=r^2$ في الحل العام المعادلة (7) لمعادلة الحركة نحصل على حدين متماثلين تماما ويكون الحل الناتج كالآتي

$$x = D_1 e^{-rt} + D_2 e^{-rt}$$

$$x = (D_1 + D_2)e^{-rt}$$

$$x = De^{-rt}$$

حيث أن D يساوي (D_1+D_2). أن هذا الحل يحتوي على ثابت اختياري واحد. بينما معادلة الحركة هي من الرتبة الثانية وحلها العام يجب أن يتضمن ثابتين اختياريين لكي يفيا بالشرطين الابتدائيين للحركة. لهذا الغرض سنحاول إيجاد الحل المناسب الذي يحتوي على ثابتين اختياريين لذلك سنلجأ إلى الحالة السابقة (حالة الحركة الناقصة الاضمحلال ونفرض أن معامل الاضمحلال r يزداد تدريجيا حتى يقترب حديا من ω أي أن $(r^2-\omega^2)^{1/2}$ تقترب من الصفر. فإذا فرضنا أن $(r^2-\omega^2)^{1/2}=i\delta\omega_o$.حيث أن $\delta\omega_o\to 0$ فإننا لن نبتعد كثيرا عن شرط هذه الحالة أي أن $(r^2=\omega^2)$ وفي أي زمن محدد t ستكون قيمة $\delta\omega_o t$ صغيرة جدا. نعوض ذلك في المعادلة (7) التي تمثل الحل العام فينتج.

$$x = D_1 e^{(-r+i\delta w_o)t} + D_2 e^{(-r-i\delta w_o)t}$$

$$x = e^{-rt}\left(D_1 e^{\,i\delta w_o t} + D_2 e^{-i\delta w_o t}\right)$$

وبنفس الطريقة التي اتبعناها في الحالة الأولى يمكن إثبات أن

$$D_1 e^{\,i\delta w_o t} + D_2 e^{-i\delta w_o t} = A\cos \delta w_o t + B\sin \delta w_o t$$

حيث أن $A=(D_1+D_2)$ و $B=i(D_1-D_2)$ وبذلك يصبح الحل في هذه الحالة هو

$$x = e^{-rt}(A\cos \delta w_o t + B\sin \delta w_o t) \qquad (20)$$

ولكن $\delta\omega_o t\rightarrow 0$ لذلك يمكن إجراء التقريبات التالية بدرجة عالية من الدقة $\sin\delta\omega_o t\approx\delta\omega_o t,\ \cos\delta\omega_o t\approx 1$ نعوض في المعادلة (20) فنجد أن

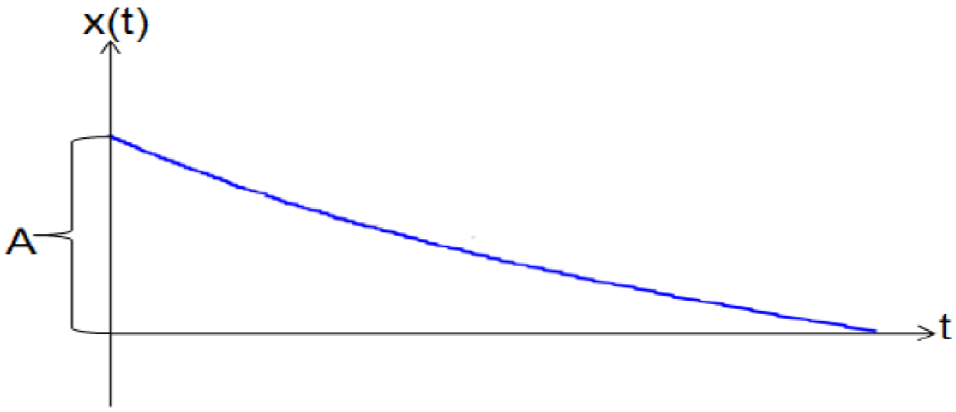
$$x = e^{-rt}(A + B\delta w_o t)$$

فإذا اعتبرنا $\acute{B} = B\delta w_o$ فان الحل العام في هذه الحالة يصبح

$$x = e^{-rt}(A + \acute{B}t) \qquad (21)$$

حيث A, $\acute{B}$ يمثلان ثابتين اختياريين يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة. ويلاحظ من أن هذا الحل يمثل الحالة الحدية للمعادلة (7) عندما يزداد معامل الاضمحلال r مقتربا من قيمة ω أي عندما يقترب الزمن الدوري T_o للاهتزاز المضمحل من المالانهاية أي $T_o\rightarrow\infty$. ويمكن التأكد من صحة هذا الحل التجريبي بتعويضه في معادلة الحركة (3) فنجد أن الطرفين متطابقان.

أن هذا الحل يصف حركة الجسيم في الحالة الحرجة ويمكن تمثيله بيانيا كما مبين في الشكل (5)



الشكل (5) يبين حركة الجسيم في الحالة الحرجة إذا أزيح إزاحة ابتدائية مقدارها A ثم ترك حرا

يلاحظ من هذا الشكل أن الجسيم يعود إلى موضع توازنه الأصلي إذا ترك حرا بعد أزاحته إزاحة ابتدائية مقدارها A وهذا يشير إلى أن الحل لا يصف أي سلوك اهتزازي للجسيم مما يعني أن المقاومة الاحتكاكية كبيرة إلى الحد الذي يمنع حدوث الاهتزاز أي أن $(\omega^2=r^2)$ أما إذا كانت المقاومة الاحتكاكية بدلالة عامل الاضمحلال r اكبر من ذلك أي أن $(\omega^2<r^2)$ فان المقاومة الاحتكاكية تصبح اكبر بالمقدار وتمنع أي سلوك اهتزازي للجسيم وتبطئ حركته بشكل يستغرق زمنا أطول للعودة إلى موضع توازنه إذا ما ترك بعد إزاحته عن موضع توازنه وهذه الحالة سيتم دراستها بتفصيل أكثر في البند القادم، أما إذا كانت المقاومة الاحتكاكية بدلالة عامل الاضمحلال r اقل من ذلك أي أن $(\omega^2>r^2)$ فعندئذ ينتقل المهتز إلى الحالة التي سبق دراستها في البند السابق.

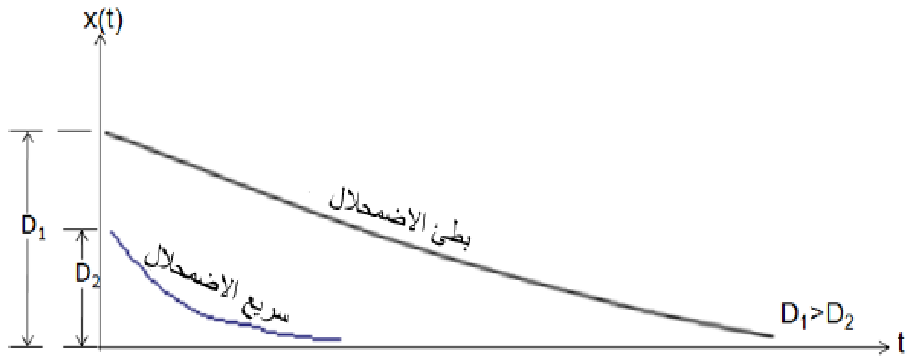
من هذا يتضح أن الحالة الحرجة تعني عودة الجسيم إلى موضع توازنه بأقل فترة زمنية إذا ما أزيح عن موضع توازنه وترك حرا دون أن يصاحب ذلك سلوك اهتزازي. أما إذا أزيح الجسيم عن موضع التوازن فان الجسيم يتجاوز موضع التوازن إلى الجهة الأخرى ثم يعود إلى موضع توازنه بأقل فترة زمنية دون أن يتذبذب. إن لحالة الحركة الحرجة أهمية عملية كبيرة في تصميم أجهزة القياس العملية التي تتضمن أجزاء متحركة كالمؤشرات في أجهزة القياس الكهربائية مثل الكلفانومترات والاميترات والفولتميترات وغيرها. حيث يعاني المؤشر قوة دفع مفاجئة بعد غلق مفتاح الدائرة الكهربائية مباشرة. فإذا لم يكن معامل الاضمحلال مناسبا فان المؤشر أما يهتز حول موضع توازنه إذا كان ($\omega^2>r^2$) أو يتحرك المؤشر ببطء نحو موضع التوازن إذا كانت ($\omega^2<r^2$) وكلا الحالتين غير مرغوب فيها. أما إذا كانت ($\omega^2=r^2$) فان المؤشر يصل نقطة توازنه بسرعة وبدون أن يتذبذب حول تلك النقطة مما يتيح اخذ قراءة صحيحة وسريعة حال ربط جهاز القياس بالدائرة.

الحالة الرابعة: وهي تمثل حالة الحركة الزائدة الاضمحلال ($r^2 > \omega^2$)

في هذه الحالة يعاني المهتز مقاومة احتكاكية شديدة وتكون قيمة معامل الاضمحلال r كبيرة بالمقارنة مع التردد الزاوي الطبيعي للمهتز ω. مما يعني أن المقدار تحت الجذر $(r^2-\omega^2)^{1/2}$ يكون مقدار حقيقي موجب وبذلك يكون الحل العام للمعادلة (7) لهذه الحالة كالآتي

$$x = e^{-rt}\left(D_1 e^{+\sqrt{(r^2-\omega^2)}t} + D_2 e^{-\sqrt{(r^2-\omega^2)}t}\right) \qquad (22)$$

حيث أن D_1 و D_2 يمثلان ثابتين اختياريين يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة. يلاحظ في هذه المعادلة أنها لا تحتوي على عامل تتذبذب قيمته مع الزمن مما يشير إلى أن المهتز لا يسلك سلوك اهتزازي. أن هذا الحل يتكون من جزئين أولهما يتمثل بالحد الأول الذي يمثل الجزء البطئ الاضمحلال والحد الثاني يمثل الجزء السريع الاضمحلال كما مبين في الشكل (6).

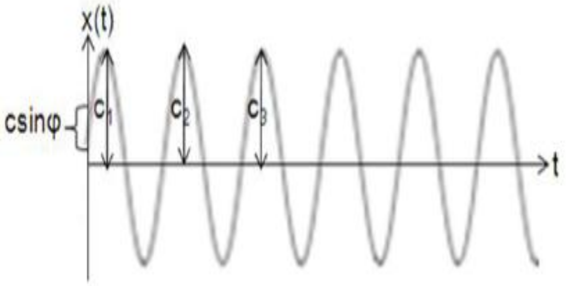


الشكل (6) يبين أن معدل تغير الإزاحة مع الزمن يختلف في الحدين الذي يتكون منهما الحل العام المعادلة (22).

إن الحركة الفعلية للمهتز يمثلها مجموع هذين الجزئين الذي يمكن تمثيله بيانيا كما مبين في الشكل (7). أن هذا الشكل يشير إلى انه لو أزيح الجسيم إزاحة ابتدائية مقدارها (D_1+D_2) في الزمن $t=0$ عن موضع توازنه ثم ترك حرا فان محصلة الإزاحة ستتلاشى بصورة آسية مع مرور الزمن إلى أن يصل الجسيم موضع توازنه في زمن لانهائي الطول أي أن الجسيم سيعود ببطء شديد إلى موضع توازنه بعد فترة زمنية طويلة جدا ويتوقف عن الحركة تماما في ذلك الموضع دون أن يتذبذب. أن هذا يشير إلى أن المقاومة التي يعانيها المهتز كبيرة بحيث لأتسمح بحدوث أي اهتزاز.

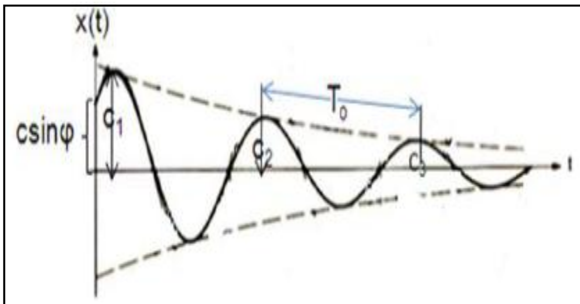
يمكن تلخيص الحالات الأربعة التي تمثل الحالات الخاصة للحل العام لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة كما يلي:

معادلة الحركة (14) الحركة اهتزازية سعة الحركة c ثابت الزمن الدوري T_0 ثابت التردد الطبيعي f.

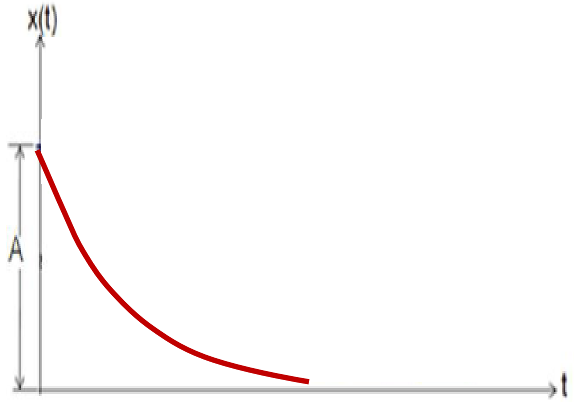


معادلة الحركة (17) الحركة اهتزازية سعة الحركة ce^{-rt} تتناقص مع الزمن.

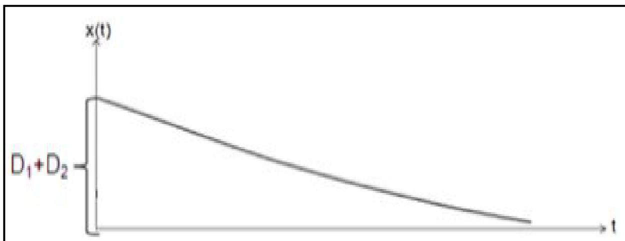
الزمن الدوري $T<T_0$ التردد $f>f_0$.



معادلة الحركة (21) الحركة غير اهتزازية الجسيم يعود إلى موضع توازنه في اقل زمن ممكن.



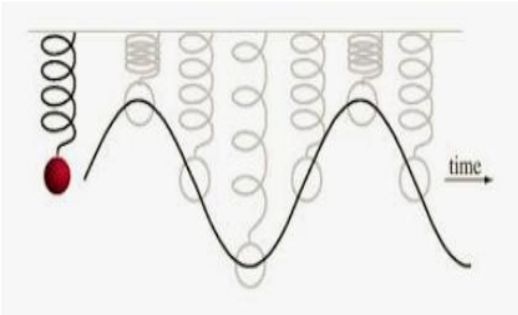
معادلة الحركة (22) الحركة غير اهتزازية الجسيم يعود إلى موضع توازنه ببطء في زمن يزيد عن الزمن الذي يستغرقه في الحالة الحرجة.



ويمكن أيضا إعطاء أمثلة عن الحالات الأربعة السابقة:

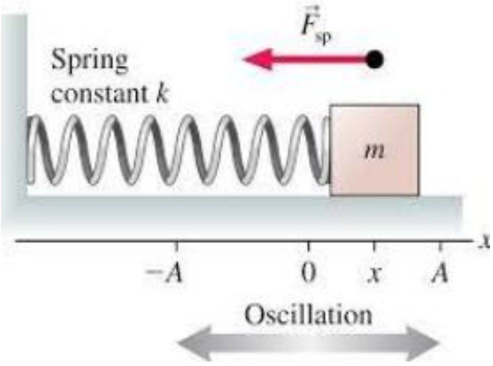
الحالة الأولى

في هذه الحالة المقاومة التي يعانيها الجسم المهتز تكون معدومة تماما.



الحالة الثانية

في هذه الحالة فان المقاومة التي يعانيها الجسم المهتز تكون خفيفة ، أي ان هناك اضمحلال قليل في الاهتزاز .



الحالة الثالثة

الاضمحلال الحرج Critical Damping: وفي هذا النوع من الاضمحلال يعود النظام الى موضع التوازن بأقل زمن ممكن (تقريباً ¼ من الزمن الدوري). من امثلته ممتص الصدمات في السيارة (الدبل)، اجهزة الاميتر والكلفانوميتر القذفي، الموازين الكهربائية.

الحالة الرابعة

ينعدم وجود الذبذبات فالنظام فيه يتراجع ببطيء شديد الى موضع التوازن، لاحظ المنحني الثالث في الشكل. من امثلته الابواب المربوطة بنابض حلزوني (سبرنك) ونظام كبح dashpot .

مقياس الاضمحلال

ان اي مهتز ميكانيكي طبيعي اذ ما تـرك يهتز اهتزازا حرا فانه لايستمر على الاهتزاز الى الابد . لان سعة حركته ستتناقص تدريجيا . وذلك بسبب وجود قوى داخلية وخارجية تقاوم حركته وتستنزف طاقته وتؤدي بالتالي الى تلاشي حركته وتوقفه عن الاهتزاز . فمثلا عندما يهتز البندول في الهواء فان قوى احتكاكية تظهر في نقطة التعليق وبسبب لزوجة الهواء وكنتيجة.لذلك فان طاقة المهتز تتبدد في كل هزة او ذبذبة عـلى شكل حـرارة مفقودة للمحيط. ونتيجة لذلك فان سعة الاهتزاز تتناقص في كل هزة وهكذا يحدث تناقص تدريجـي في سعة الحركة مع مرور الزمن . حتى تنعدم السعة ويتوقف البندول من الاهتزاز ..ان كل المهتزات في الطبيعة تعاني اضمحلال في حركتها ولـكن بدرجات

متفاوتة . وان درجة الاضمحلال لاي مهتز مضمحل يمكن ايجادها من خلال احدى الـكميات الآتية :

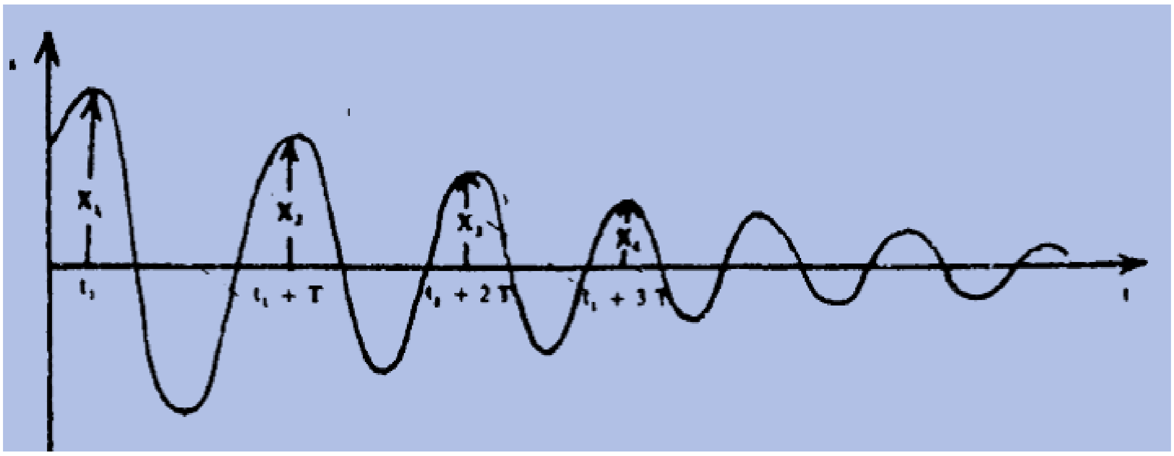
1 التناقص اللوغاريتمي
2 معامل النوعية
3 زمن الاسترخاء

التناقص اللوغاريتمي

يعرف التناقص اللوغاريتمي بانه اللوغاريتم الطبيعي للنسبة بين اي سعتين متتاليتين من سعات الاهتزاز المضمحل . ويرمز للتناقص اللوغاريتمـي بالرمز δ . ويعبر عن ذلك رياضيا كالاتي :

$$\delta = \ln \left(\frac{X_1}{X_2} \right)$$

حيث ان X_1 تمثل سعة الاهتزاز في الزمن t_1
وان X_2 تمثل سعة الاهتزاز في الزمن $t_1 + T$
حيث ان السعتين تقاسان على نفس الجانب من موضع التوازن وكما هو مبين في الشكل رقم 7



الشكل 7

زمن الاسترخاء

يعرف زمن الأسترخاء بأنه الزمن اللازم لهبوط قيمة السعة الى $\frac{1}{e}$ من قيمتها الأصلية. حيث e تمثل أساس اللوغاريتم الطبيعي وتساوي 2.718 .
من المعادلة التي تصف حركة الأهتزاز المضمحل لدينا

$$x = ce^{-rt} \sin(\omega t + \theta)$$

لاحظ أن ce^{-rt} يمثل أقصى قيمة للأزاحة ويدعى بالسعة الفعالة . فاذا رمزنا السعة الفعالة للاهتزاز المضمحل بالرمز C_t فان

$$C_t = Ce^{-rt}$$

وبعد زمن $t = \frac{1}{r}$ تكون

$$C_t = \frac{1}{e} C = 0.368\ C$$

ان الزمن t اللازم لهبوط قيمة السعة من C الى 0.368 C يمثل زمن الأسترخاء ويساوي $\frac{1}{r}$ وبما ان $r = \frac{R}{2m}$ لذلك فان

$$\therefore t = \frac{1}{r} = \frac{2m}{R}$$

وبقياس كتلة الجسيم المهتز ومعرفة ثابت المقاومة R الذي يمثل القوة المقاومة لكل وحدة سرعة يمكن حساب زمن الأسترخاء. ويلاحظ ان زمن الأسترخاء يتناسب عكسياً مع ثابت المقاومة. كما يجدر بنا ان نلاحظ ان زمن الأسترخاء يمكن أن يقاس بصورة مباشرة .

ان قياس الأضمحلال من خلال زمن الأسترخاء بعد اجراءاً مألوفاً في فروع الفيزياء المختلفة

معامل النوعية

يعرف معامل النوعية لأي مهتز مضمحل بأنه حاصل ضرب 2π في النسبة بين متوسط الطاقة المخزونة في المهتز الى الطاقة المفقودة منه خلال دورة واحدة من دورات الأهتزاز. ويرمز لمعامل النوعية عادة بالحرف Q وبصيغة رياضية تعرف Q كالآتي :

$$Q = 2\pi \left(\frac{\text{متوسط الطاقة الكلية المخزونة خلال دورة واحدة}}{\text{متوسط الطاقة المفقودة خلال نفس الدورة}} \right)$$

ان لمعامل النوعية اهمية كبيرة ليس فقط للاهتزازات الميكانيكية بل ايضاً للاهتزازات الكهربائية. في دوائر الرنين التوالي والتوازي.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الفيزياء
المرحلة:الثانية
المادة: الصوت والحركة الموجية

الفصل الرابع

نماذج لبعض المسائل مع الحل

مدرس المادة: د.محسن وليد محمد

السؤال 1

مهتز يتألف من جسيم ونابض حلزوني يعاني أثناء أهتزازه على أمتداد المحور السيني قوتين القوة الأولى هي قوة الأستعادة ومقدارها يتناسب مع الأزاحة الآنية x والقوة الثانية هي قوة أخماد ومقدارها يتناسب مع السرعة الآنية $\dot{x}$.

فاذا كانت قوة الأستعادة تساوي عددياً $40 \times$ داين وقوة الأخماد تساوي 200 داين في اللحظة التي تكون فيها سرعته الأنية 10 سم / ثانية واذا فرضنا أن كتلة الجسيم 5 غم وأنه قد بدأ حركته من السكون عند نقطة تبعد 20 سم عن موضع التوازن . أوجد مايلي

(أ) المعادلة التفاضلية لحركة المهتز والشروط التي تصف حركته .

(ب) الموضع الآني للجسيم في أي لحظة زمنية

(ج) السعة والزمن الدوري والتردد للذبذبات المضمحلة

(د) ارسم الحركة بيانياً .

(هـ) التناقص اللوغاريتمي

(و) التردد الطبيعي والزمن الدوري الطبيعي للأهتزاز

(ز) المدى الذي تتراوح فيه قيم ثابت الأضمحلال بالنسبة للحركة (1) زائدة الأضمحلال (2) الحرجة (3) ناقصة الأضمحلال .

الحـــل

(أ) : لدينا قوة الأستعادة F_k ومقدارها هو

$$F_k = -40\,x$$

وقوة الأخماد او المقاومة F_R ومقدارها هو

$$F_R = -R\,\dot{x}$$

وعندما تكون قيمة السرعة الآنية $\dot{x}$ هي 10 سم / ثانية تكون قوة الأخماد 200 داين وعليه تكون قيمة ثابت المقاومة R هي 20 داين لكل سم / ثا

لذلك فأن

$$F_R = -20\,\dot{x}$$

نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة فينتج ان

$$m\ddot{x} = -R\dot{x} - kx$$

أي أن

$$5\ddot{x} = -20\dot{x} - 40x$$

نقسم على 5 فنحصل على

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0 \qquad \ldots(1)$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لحركة المهتز

(ب) لأيجاد الموضع الآني x للجسيم في أية لحظة زمنية t يجب ايجاد الحل لمعادلة الحركة (1)

لدينا الشروط الأبتدائية للحركة وهي

$x = 20$ في اللحظة الزمنية $t =$ صفر

$\dot{x} = 0$ في اللحظة الزمنية $t =$ صفر

نقارن المعادلة (1) مع المعادلة القياسية للحركة التوافقية المضمحلة

فنجد أن $\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$\omega_0^2 = 8$$
$$2r = 4$$
$$r^2 = 4$$

وهذا يعني أن

وهذا يشير الى أن قيمة ω_0^2 أكبرمن r^2 ($\omega_0^2 > r^2$) أي أن الحركة الأهتزازيــة مضمحلة والحل المناسب هو

$$x = e^{-rt}(A\sin\omega t + B\cos\omega t) \qquad \ldots(2)$$

نعوض القيم المناسبة

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - r^2} = \sqrt{8-4} = 2$$
$$r = 2$$

في المعادلة (2) فتصبح

$$x = e^{-2t}(A\sin 2t + B\cos 2t) \qquad \ldots(3)$$

ولأيجاد قيم B, A نعوض الشروط الأبتدائية

الشرط الأبتدائي الأول هو $x = 20$ عندما $t = 0$ فنجد أن

$$20 = 1(0 + B)$$

وبذلك نجد أن

$B = 20$ سم

ولتعويض الشرط الثاني $x = 0$ عندما $t = 0$ يجب ان نفاضل المعادلة (3) بالنسبة للز،

فنحصل على

$$x = \frac{dx}{dt} = -2e^{-2t}(A \sin 2t + B \cos 2t) +\_ e^{-2t}(2A \cos 2t - 2B \sin 2t)$$

$$0 = -2(B) + (2A)$$

ومنها نجد ان $A = B = 20$ سم

وهكذا نجد أن الموضع الآني x للجسيم في اية لحظة زمنية t هو

$$x = e^{-2t}(20 \sin 2t + 20 \cos 21)$$

ويمكن التعبير عن هذا الحل بطريقة اخرى ، فلدينا العلاقة

$$A \sin 2t + B \cos 2t = C \cos(2t - 0)$$

حيث ان

$$20\sqrt{2} \quad \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{A^2 + B^2} = C$$

وان

$$\frac{\pi}{4} = a \qquad 1 = \frac{A}{B} = \tan\theta$$

وعليه يصبح الحل العام كالآتي

$$x = 20\sqrt{2} \quad e^{-2t} \cos(2t - \frac{\pi}{4}) \qquad .... (4)$$

ان هذه المعادلة تمكننا من ايجاد موضع الجسيم x في اية لحظة زمنية t .

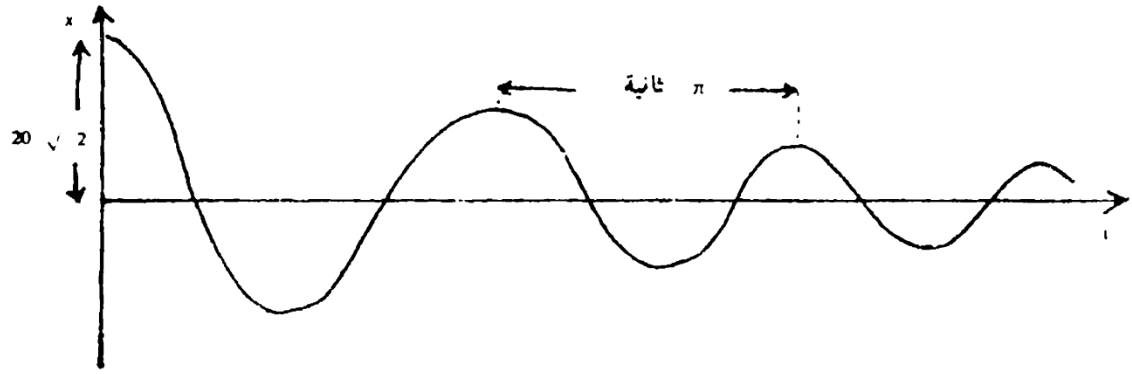
(جـ) من المعادلة (4) نجد ان

السعة $\sqrt{2}\, e\text{-}2t$ 20 سم

الزمن الدوري $= T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ثانية

التردد $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{2}{2\pi} = \dfrac{1}{\pi}$ هيرتز

(د) ان حركة الجسيم يمكن تمثيلها بيانياً من خلال المعادلة (4) وذلك برسم الازاحة الآنية x مع الزمن t فنجد ان



يلاحظ من هذا الشكل ان سعة الاهتزاز تتناقص تدريجياً مع الزمن.
(هـ) ان قيمة التناقص اللوغاريتمي يمكن ايجادها من العلاقة :

$$\sigma = r\,T$$

ولدينا

$$r = \frac{R}{2m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega t^2_o - r^2}}$$

و

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ومن هذه العلاقات نجد

$$\delta = \frac{2\pi R}{\sqrt{4km - R^2}}$$

$$\delta = \frac{2\pi \times 20}{\sqrt{4 \times 40 \times 5 - (20)^2}} = 2\pi$$

(و) لايجاد التردد الطبيعي والزمن الدوري في حالة انعدام الاخماد (أو المقاومة)
نعوض $r = 0$ في الحل (2) ونضع $\omega = \omega_0$ فنحصل على $x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$

حيث ان

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

ومنها نجد ان

$$8 = \frac{40}{5} = \omega_0^2$$

$$2\sqrt{2} = \omega_0$$

لكن

$$\frac{2\pi}{T_o} = \omega_0$$

ومنها نجد الزمن الدوري الطبيعي T_0

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ ثانية}$$

وبذلك نحصل على التردد الطبيعي f_0

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \text{ هيرتز}$$

(ز) ان قيمة ثابت الاضمحلال r بالنسبة لقيمة ω_0 هي التي تحدد طبيعة حركة المهتز .

(1) فعندما تكون قيمة r اكبر من قيمة ω_0 لايحدث اهتزاز واذا ماازيح المهتز عن موضع توازنه وترك حراً فانه يعود ببطوء الى موضع توازنه .

(2) واذا كانت قيمة $r = \omega_0$ تكون الحركة حرجة اي ان هذه القيمة تفصل بين سلوكين هما اما سلوك اهتزازي أو سلوك غير اهتزازي ، وفي حالة $r = \omega_0$ اذا ماازيح المهتز عن موضع توازنه وترك حراً فانه يعود الى موضع توازنه بأقل زمن ممكن (دون ان يصاحبه اهتزاز) .

(3) وعندما تكون قيمة r أقل من قيمة ω_0 فعندئذ يمكن للمهتز ان يهتز ولكن اهتزازه يكون مضمحل أي أن سعته تقل بالتدريج . وسرعة تناقص السعة يعتمد على قيمة r . وفي حالة متطرفة عندما r تنعدم ($r = 0$) فان المهتز يستمر بالاهتزاز وتبقى سعة حركته ثابتة .

السؤال 2

في بعض اجهزة القياس التي يلاقي فيها المؤشر دفع مفاجيء ، كالكالفانومتر القذفي مثلا عندما تمر خلاله شحنة كهربائية ، يستلزم عودة المؤشر الى موضع توازنه في أقل زمن ممكن .
ناقش كيف يتحقق ذلك ؟

كلفانومتر قذفي مؤشره يشير الى ازاحة مقدارها صفر عند بدأ تشغيله في اللحظة الزمنية $t = 0$ وامرر خلاله كمية من الشحنة الكهربائية مما ادى الى اكساب البقعة الضوئية الموجهة الى مقياس متسي سرعة ابتدائية مقدارها v جد كيف تتغير الازاحة مع الزمن ووضح ذلك بيانياً ؟

الحــل

ان عودة المؤشر الى موضع توازنه (بعد ازاحته عنه) في أقل زمن ممكن يتحقق عندما $r = \omega_0$ وفي هذه الحالة يكون الحل المناسب لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة هو :

$$x = (A + Bt)\, e^{-rt} \qquad \dots (1)$$

ان الشروط الابتدائية للحركة هي

اولاً $x = 0$ عندما $t = 0$

ثانيا $\dot{x} = v$ عندما $t = 0$

من الشروط الأول نجد ان قيمة A = صفر
ولتعويض الشرط الثاني يجب ان نفاضل المعادلة (1) بالنسبة للزمن فنجد ان

$$x = Be^{-rt} - r(A + Bt)e^{-rt}$$

نعوض القيم المناسبة

$$t = 0 \; \dot{x} = V , A = 0$$

فنجد أن

$$V = B$$

وعليه يكون الحل الكامل الذي يصف حركة المؤشر هو

$$x = Vte^{-rt} \quad ..(2)$$

وعند امرار شحنة كهربائية في الجهاز فان المؤشر ينحرف ويؤدي الى تحريك البقعة الضوئية على المقياس المتري الى اقصى انحراف . بعدها تعود البقعة الى موضع التوازن . وعليه فان النهاية العظمى لقيمة الازاحة x تحدث عندما تصل البقعة الضوئية الى أقصى انحراف على المقياس وتتوقف لحظيا قبل شروعها بالعودة الى موضع التوازن($\dot{x} = 0$) وعند النهاية العظمى للازاحة يتحقق الشرط $\dot{x} = 0$ نفاضل المعادلة (2) بالنسبة للزمن فنجد أن

$$\dot{x} = Ve^{-rt}(1 - rt) = 0$$

ولما كانت $V \neq 0$

وان المقدار $e^{-rt} \neq 0$ الا عندما $t \to \infty$

لذلك فان

$$(1 - rt) = 0$$

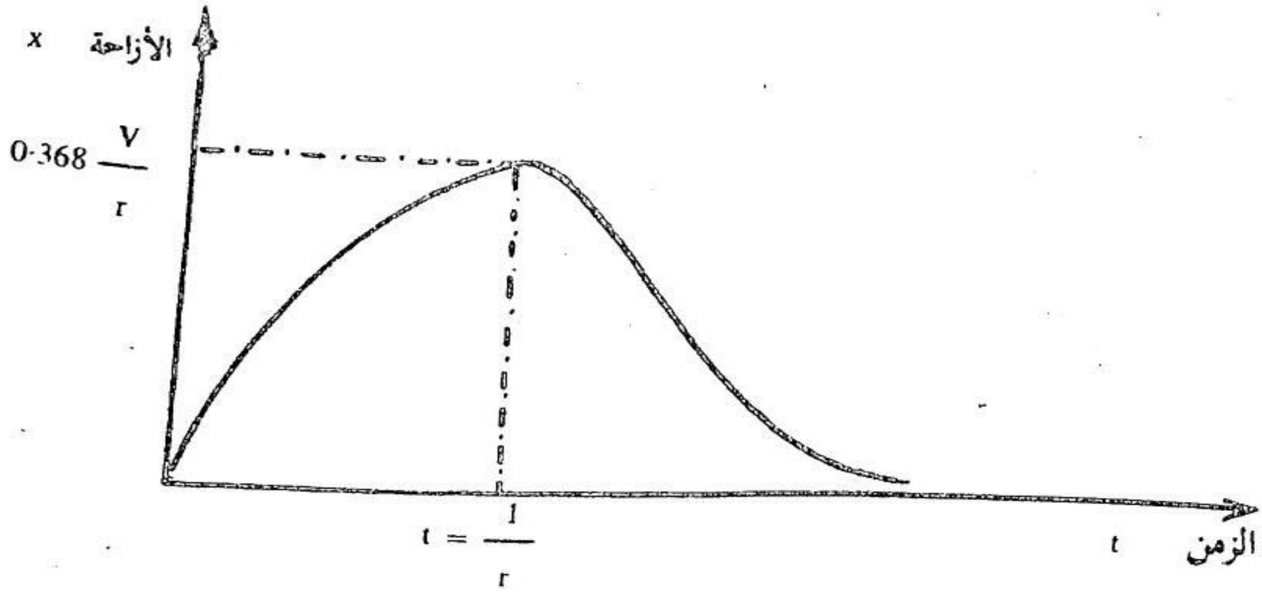
ومن هذه المعادلة نجد أن

$$t = \frac{1}{r}$$

وهذه العلاقة تعطى اللحظة الزمنية التي عندها تكون الازاحة في أقصى قيمة لها . والازاحة في هذه الحالة هي

$$x = Vte^{-rt} = \frac{V}{r}e^{-1} = 0.368 \frac{V}{r} = 0.368 \frac{2mV}{R}$$

والعلاقة البيانية بين الازاحة x والزمن t يمكن ان نحصل عليها من المعادلة (2)



وفي هذه الحالة يعود المؤشر الى موضع التوازن (x = 0) في أقل زمن ممكن دون ان يرافق ذلك أي سلوك اهتزازي ومن هنا تتجلى الاهمية العملية للحركة الحرجة في تصميم اجهزة القياس من هذا النوع .

السؤال 3

اذا كان التردد الطبيعي لمهتز هو 20 هيرتز بدون اضمحلال . ويصبح تردده بوجود الاضمحلال 16 هيرتز فما هو التناقص اللوغاريتمي.

الحـــل

لدينا

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - r^2} \quad ...(1)$$

$$\omega_o = 2\pi f_o$$
$$\omega = 2\pi f$$

نعوض القيم المناسبة فنجد أن

$40\pi = 2\pi \times 20 = \omega_o$ زاوية نصف قطرية لكل ثانية

$32\pi = 2\pi \times 16 = \omega$ زاوية نصف قطرية لكل ثانية

نعوض في المعادلة (1) فنحصل على

$$(32\pi)^2 = (40\pi)^2 - r^2$$

ومنها نجد أن

$$r^2 = 576\pi^2$$
$$r = 24\pi$$

والتناقص اللوغاريتمي δ يمكن ايجاده من العلاقة

$$\delta = r\,T$$

حيث T هو الزمن الدوري المضمحل $= \frac{1}{f} = \frac{1}{16}$ ثانية

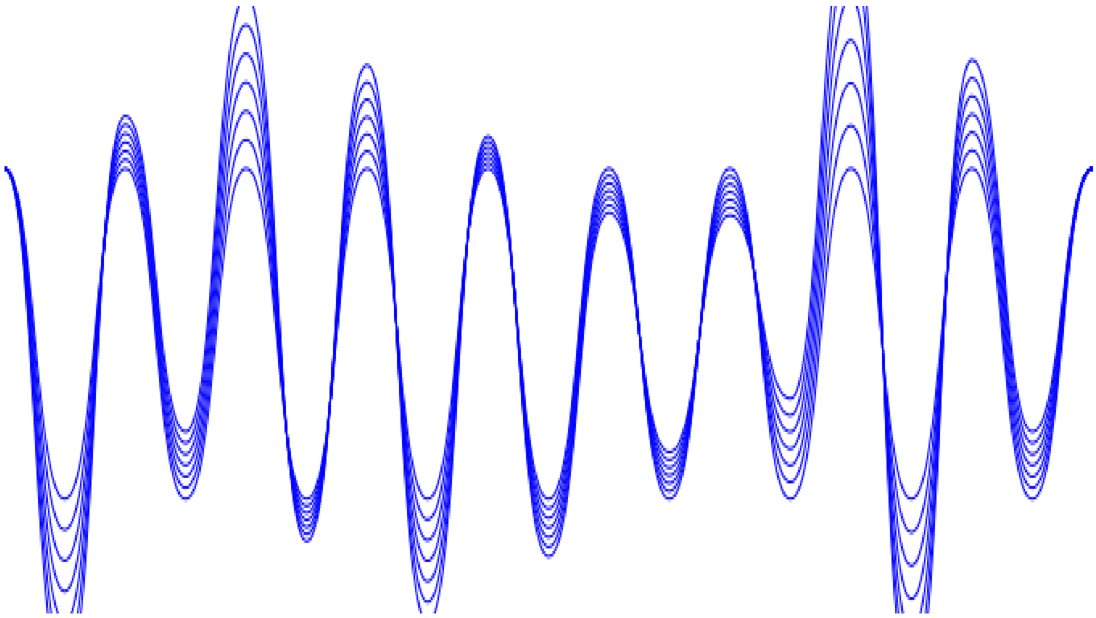
لذلك فان

$$\frac{3\pi}{2} = 24\pi \times \frac{1}{16} = \delta$$

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الفيزياء
المرحلة:الثانية
المادة: الصوت والحركة الموجية

الفصل الخامس

الاهتزاز القســري



مدرس المادة: د.محسن وليد محمد

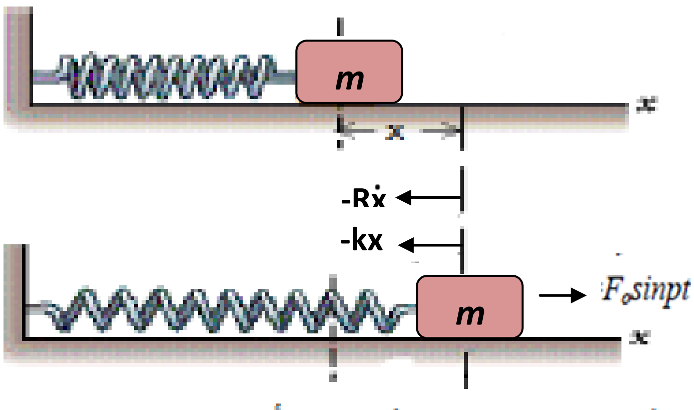
الاهتزاز القسري

مقدمة

لقد اقتصرت دراستنا حتى الآن على دراسة الاهتزاز الحر المضمحل وغير المضمحل حيث وجدنا انه عندما يزاح المهتز غير المضمحل عن موضع توازنه ويترك حرا فانه سوف يهتز بتردد يعتمد على ثوابت المرونة والقصور الذاتي، ومثل هذا التردد يدعى بالتردد الحر أو التردد الطبيعي. إن ما يساعد على استمرار الاهتزاز الحر هو الطاقة المخزونة في المهتز في بداية الحركة الاهتزازية ولكن بسبب المقاومة الاحتكاكية التي يتحتم وجودها دائما مهما كانت صغيرة فان سعة الاهتزاز سوف تتضاءل بالتدريج مع الزمن حتى يتوقف المهتز عن الاهتزاز. ولكي نحافظ على استمرار الاهتزاز يجب أن يزود المهتز بالطاقة باستمرار للتغلب على تأثير المقاومة الاحتكاكية. "وإذا كانت الوسيلة لتزويد المهتز بالطاقة على شكل قوة خارجية دورية فعندئذ يقال للمهتز انه في حالة اهتزاز قسري أو اهتزاز مجبر". ولعل من ابسط الأمثلة المألوفة على الاهتزاز القسري هو حركة الأرجوحة فالأرجوحة المهتزة إذا ما تركت وشانها فإنها سوف تتوقف عن الاهتزاز بعد فترة لن تطول كثيرا وذلك بسبب الفقدان المستمر للطاقة نتيجة الاحتكاك، ولكن إذا ما أعطيت دفعات صغيرة متعاقبة وعلى فترات زمنية مناسبة فإنها سوف تستمر على الاهتزاز نتيجة التعويض المستمر للطاقة المفقودة. وبالحقيقة إذا ما أحسن توقيت الدفعات بحيث تكون مؤثرة بنفس اتجاه الحركة وليس عكسها فان سعة الاهتزاز تكون كبيرة. وهناك أمثلة عملية كثيرة على الاهتزاز القسري، منها اهتزاز الجسر تحت ضربات أقدام طابور عسكري عند العبور واهتزاز هيكل المحرك نتيجة الضربات الدورية للمكابس داخل اسطوانات الاحتراق، واهتزاز الآلات الموسيقية بأنواعها الوترية والهوائية وذات الأغشية الرقيقة عند الإثارة الميكانيكية أو الكهربائية. إن مسألة الاهتزاز القسري هي مسألة عامة في الفيزياء. إذ أن حل هذه المسألة لا يقتصر فائدته على الحركات الاهتزازية والموجية فقط بل يتعداها إلى مجالات أخرى مختلفة في الصوتيات ودوائر التيار المتناوب والفيزياء الذرية.

معادلة الحركة للمهتز المضمحل تحت تأثير قوة خارجية دورية

سنعتبر هنا المهتز المؤلف من جسيم كتلته m متصل بطرف نابض حلزوني ثابت مرونته k ومثبت طرفه الأخر بأحكام كما في الشكل (1).



الشكل (1) مهتز مضمحل تحت تأثير قوة خارجية دورية

نفرض أن الجسيم يهتز في الهواء (أو أي وسط لزج) بسرعة غير عالية بحيث تكون المقاومة الاحتكاكية التي يعانيها الجسيم متناسبة طرديا مع سرعته. ونفرض أن الجسيم يخضع لقوة خارجية دورية F_p مقدارها $F_o sinpt$ حيث p يمثل التردد الزاوي لهذه القوة. وهذا التردد مستقل تماما عن التردد الزاوي الطبيعي ω أو التردد الزاوي المضمحل ω_o. إن هذه القوة الدورية تعمل على تغذية المهتز بالطاقة لتعوض عن الطاقة التي يخسرها خلال الحركة. إن الجسيم المهتز في هذه الحالة يكون خاضعا آنيا لثلاث قوى مختلفة هي قوة الاستعادة F_k=- kx وقوة الاحتكاك $F_R=-R\dot{x}$ والقوة الخارجية الدورية $F_p=F_o sinpt$ ومحصلة هذه القوة المؤثرة في امتداد المحور السيني x هي

$$\sum F = F_p + F_R + F_k \qquad (1)$$

والآن نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة وتعويض قيم القوى المؤثرة على الجسيم المهتز في المعادلة (1)، فينتج أن

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = F_o sinpt - R\left(\frac{dx}{dt}\right) - kx \qquad (2)$$

نقسم طرفي المعادلة (2) على m ونرتبها فتصبح

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{R}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{k}{m}\right)x = \left(\frac{F_o}{m}\right)sinpt \qquad (3)$$

ونفرض أن $(f_o=F_o/m)$، ولما كانت $(\omega_o^2=k/m)$ و $(2r=R/m)$ لذلك تصبح المعادلة (3) كالآتي

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + 2r\left(\frac{dx}{dt}\right) + \omega_o^2 x = f_o sinpt \qquad (4)$$

حل معادلة الحركة الاهتزازية القسرية

لحل هذه المعادلة يجب أن نتذكر إن القوة الخارجية المسلطة بتردد زاوي p ستجبر الجسيم على الاهتزاز بهذا التردد، وبذلك فان كل حد من حدود هذه المعادلة في الطرف الأيسر يجب أن يتضمن دالة تتغير توافقيا مع الزمن بتردد زاوي p لهذا الغرض سنفرض الحل التجريبي باعتبار الإزاحة الآنية x تتغير توافقيا مع الزمن وفق المعادلة التالية

$$x = Asinpt + Bcospt \qquad (5)$$

لاختبار صحة هذا الحل نجد dx/dt و d^2x/dt^2 للمعادلة (5) ونعوضه في المعادله (4)

$$\frac{dx}{dt} = pAcospt - pBsinpt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -p^2Asinpt - p^2Bcospt$$

$$-p^2Asinpt - p^2Bcospt + 2rpAcospt - 2rpBsinpt + \omega_o^2Asinpt + \omega_o^2Bcospt = f_osinpt$$

نرتب هذه المعادلة فتصبح

$$(-p^2A - 2rpB + \omega_o^2A)sinpt + (-p^2B + 2rpA + \omega_o^2B)cospt = f_osinpt \qquad (6)$$

فإذا كان الحل المفروض صحيحا فان الطرف الأيمن في هذه المعادلة يجب أن يساوي الطرف الأيسر عند أي لحظة زمنية t. وهذا يعني أن معامل $sinpt$ في الطرف الأيسر يجب أن يساوي معامل $sinpt$ في الطرف الأيمن في أية لحظة زمنية t، وكذلك بالنسبة لتساوي معاملي $cospt$ في الطرفين. فبالنسبة لمعاملي $sinpt$ و $cospt$ نجد أن

$$-p^2A - 2rpB + \omega_o^2A = f_o$$

$$-p^2B - 2rpA + \omega^2B = 0$$

نحل هاتين المعادلتين الآنيتين فنحصل على قيم A و B كالآتي

$$A = \frac{(\omega^2 - p^2)f_o}{(\omega^2 - p^2)^2 + (2rp)^2} \qquad (7)$$

$$B = \frac{-2rpf_o}{(\omega^2 - p^2)^2 + (2rp)^2} \qquad (8)$$

نعوض A و B في الحل المعادلة (5) فنجد أن

$$x = \left[\frac{(\omega_o^2 - p^2)f_o}{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}\right] sinpt - \left[\frac{-2rpf_o}{(\omega_o^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}\right] cospt \qquad (9)$$

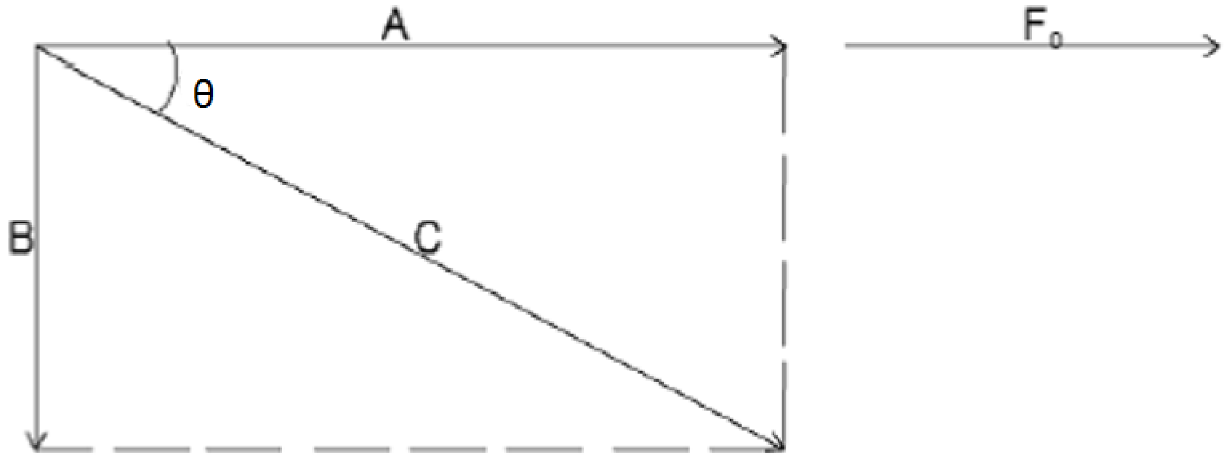
ولأجل التعبير عن هذا الحل بشكل رياضي ابسط وبصورة يسهل التفسير الفيزيائي لسلوك الجسيم المهتز، يفضل استخدام الطريقة الاتجاهية لاختزال الحل. لهذا الغرض لدينا معادلة الإزاحة الآنية x وهي

$$x = Asinpt + Bcospt$$

ولدينا معادلة القوة الخارجية الدورية F_o وهي

$$F = F_o sinpt$$

ومن مقارنة المعادلتين نلاحظ إن متجه القوة F_o بنفس اتجاه مركبة الإزاحة A لان كليهما موجب ومضروب في $sinpt$، لذلك يقال إن كليهما بنفس الطور. ويعبر عن ذلك في الشكل (2)



الشكل (2) يبين زاوية الطور بين متجه القوة المحركة للمهتز ومتجه الإزاحة.

أما مركبة الإزاحة B فهي مضروبة في $cospt$ لذلك فأنها حتما خارج الطور بزاوية 90^o عن القوة F_o. ولكن إشارة B سالبة في المعادلة (8) لذلك فأنها يجب أن تكون متخلفة عن طور F_o بزاوية 90^o. من الشكل (2) يمكن إيجاد محصلة C وزاوية الطور θ. حيث

$$C = \sqrt{(A^2 + B^2)} \tag{10}$$

$$\tan\theta = \frac{B}{A} \tag{11}$$

وبذلك تأخذ المعادلة (5) الشكل الآتي

$$x = Csin(pt + \theta) \tag{12}$$

نعوض قيم A و B من المعادلتين (7) و (8) في المعادلات (10) و (11) فنحصل على

$$C = \frac{f_\circ}{\sqrt{(\omega_\circ^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \qquad (13)$$

$$\tan\theta = \frac{-2rp}{(\omega_\circ^2 - p^2)} = 2rp/(p2 + \omega2) \qquad (14)$$

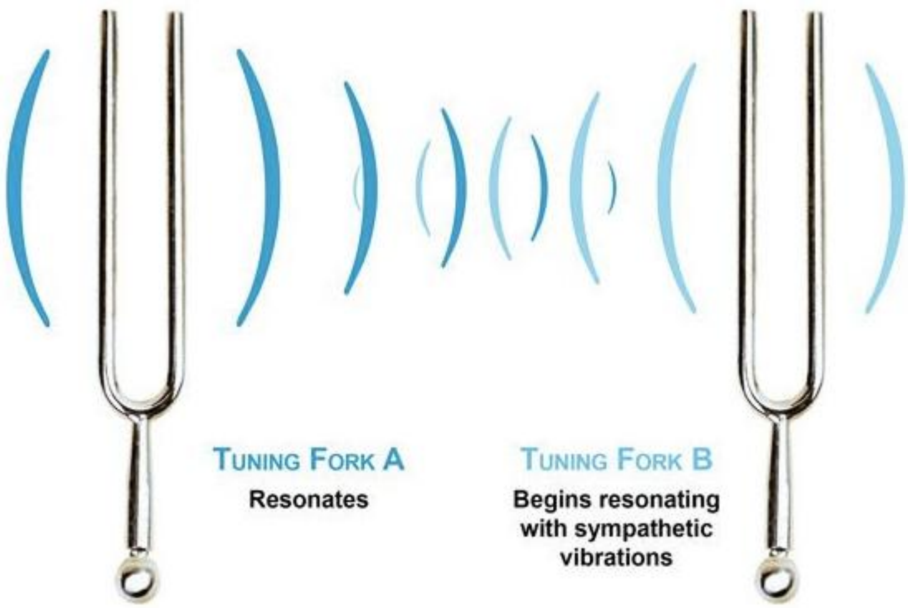
$$x = \frac{f_\circ sin(pt+\theta)}{\sqrt{(\omega_\circ^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \qquad (15)$$

إن المعادلة الأخيرة (15) تمثل حلا صحيحا لمعادلة الحركة (4) طالما أنها تتفق معها بدون تناقص، وهذا الحل يمثل حل الحالة المستقرة لأنه يستمر على نمط واحد ولا يتغير خلال الزمن. انه يمثل استجابة الجسيم للاهتزاز القسري بتردد زاوي p (تردد القوة الخارجية المثيرة للاهتزاز) من دون اعتبار للشروط الابتدائية للحركة أو للتردد الطبيعي للمهتز. ولذلك فان هذا الحل لا يمثل حلا عاما لمعادلة الحركة لأنه لا يحتوي على ثوابت اختيارية تحددها الشروط الابتدائية لحركة المهتز وهذا الحل يدعى بالحل الخاص.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الفيزياء
المرحلة:الثانية
المادة: الصوت والحركة الموجية

الفصل السادس

الرنين



مدرس المادة: د.محسن وليد محمد

الرنين

عندما تؤثر قوة خارجية ترددها الزاوي p على مهتز تردده الزاوي الطبيعي غير المضمحل ω فان الرنين يحدث: عندما يتساوى تردد القوة المثيرة p مع التردد الطبيعي للمهتز ω. وتوخيا للدقة فان هذا التعريف للرنين غير دقيق تماما إلا تحت شروط نظرية بحتة لكون المهتز يعاني دائما قوى احتكاكية وبذلك يجب اخذ عامل الاضمحلال بالاعتبار. ومن اجل دراسة مفصلة للرنين سنحلل الحل الخاص للمعادلة (4) بطريقة وصفية للوصول إلى التعريف العلمي المناسب للرنين. إن الحل الخاص الذي يمثل الحالة المستقرة للاهتزاز القسري هو

$$x = \frac{f_o sin(pt+\theta)}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2}} \qquad (23)$$

حيث أن $f_o/\{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2\}^{1/2}$ يمثل سعة الاهتزاز القسري وسنرمز له بالحرف A لذلك فان

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2}} \qquad (24)$$

وعليه تصبح المعادلة (23) كالآتي

$$x = Asin(pt+\theta) \qquad (25)$$

يلاحظ من المعادلة (25) أن المهتز يهتز بتردد قسري p (وهو تردد القوة الخارجية الدورية) وليس بتردده الطبيعي ω. كما أن الحركة الناتجة هي حركة توافقية غير مضمحلة.

كما نلاحظ من المعادلة (24) أن سعة الاهتزاز A تعتمد عل قيمة كل من التردد الطبيعي غير المضمحل ω والتردد القسري للقوة المؤثرة p في اعتبار إن f_o و r ثوابت. فإذا اختلف التردد القسري p اختلافا كبيرا عن التردد الطبيعي ω فان سعة الحركة الناتجة A تكون صغيرة وكلما اقترب تردد القوة الخارجية المؤثرة p من التردد الطبيعي غير المضمحل ω فان سعة الحركة الناتجة A تزداد. وتصل السعة A إلى ذروتها عندما تتساوى قيمة التردد القسري P مع التردد الطبيعي ω. وتعرف هذه الظاهرة باسم الرنين. كما يعرف التردد القسري P الذي يقابل الذروة في سعة الاهتزاز القسري للمهتز باسم تردد الرنين. وتتوقف قيمة السعة A على معامل الاضمحلال r الذي يقيس مقدار قوة الاحتكاك التي يعانيها المهتز. فإذا عوضنا في المعادلة (24) بقيمة $p=\omega$ عندما $r=0$ فان قيمة السعة A تصبح لانهائية في الكبر. وهذه الحالة تقابل انعدام الاضمحلال تماما أي عدم وجود قوة احتكاكية. وهذه الحالة لا تتحقق عمليا إذ لابد أن يكون دائما هناك قوى احتكاكية، وبالتالي فان السعة تصل إلى قيمة كبيرة ولكن محدودة. ولإيجاد قيمة التردد الذي عنده تصبح قيمة السعة في ذروتها يجب أن

نفاضل السعة A بالنسبة لـp ثم نساوي النتيجة 2 ىا نحسب قيمة p التي عندها نحصل على أقصى قيمة للسعة A فلدينا من المعادلة (24) بفرض أ

$$y = (\omega^2 - p^2)^2 + (2rp)^2$$

نعوض هذه النتيجة في المعادلة (24) فنحصل على

$$A = \frac{fo}{\sqrt{y}} \qquad (26)$$

أن أقصى قيمة لـA تحدث عندما تكون قيمة y في نهايتها الصغرى. إن قيمة y تكون في نهايتها الصغرى أو الكبرى عندما

$$\frac{dy}{dp} = -4p(\omega^2 - p^2) + 8r^2p = 0 \qquad (27)$$

أو

$$p(p^2 - \omega^2 + 2r^2) = 0 \qquad (28)$$

من المعادلة (28) نجد قيم p أما تكون $p=0$ أو تكون $p=(\omega^2-2r^2)^{1/2}$، الآن نفاضل ثانية فنجد أن

$$\frac{d^2y}{dp^2} = -4\omega^2 + 12p^2 + 8r^2 \qquad (29)$$

فعندما نعوض $p=0$ نحصل على

$$\frac{d^2y}{dp^2} = -4(\omega^2 - 2r^2) < 0 \qquad (30)$$

وعندما نعوض $p=(\omega^2-2r^2)^{1/2}$ نحصل على

$$\frac{d^2y}{dp^2} = 8(\omega^2 - 2r^2) > 0 \qquad (31)$$

وعليه فان $p=(\omega^2-2r^2)^{1/2}$ تعطي قيمة النهاية الصغرى لـy. وعندما تكون قيمة y في نهايتها الصغرى فان قيمة السعة A يجب أن تكون في نهايتها العظمى، وعليه فان قيمة التردد القسري p الذي يقود إلى أقصى قيمة لسعة الاهتزاز A هو

$$p = p_r = \sqrt{\omega^2 - 2r^2} \qquad (32)$$

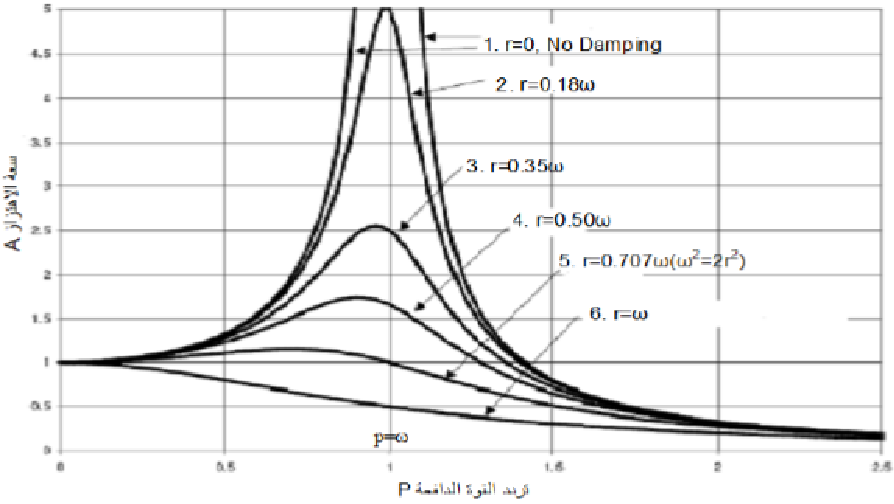
بتربيع طرفي المعادلة (32) نحصل على

$$p^2 = p_r^2 = (\omega^2 - 2r^2) \qquad (33)$$

هذه المعادلة (33) تعطي قيمة تردد الرنين p_r ويلاحظ أن هذا التردد يكون دائما اقل من قيمة التردد الطبيعي ω ويلاحظ انه إذا كانت قيمة معامل الاضمحلال $\omega>r$ وقيمة r اقل من 1 فان قيمة r^2 تزداد صغرا وبذلك فان $\omega^2>>r^2$ وعندئذ يكون شرط حدوث الرنين هو $p=\omega$ مقبولا بدرجة عالية من الدقة. أما إذا كانت قيمة r كبيرة فان قيمة $2r^2$ لا يمكن إهمالها إطلاقا في المعادلة (33). وباستخدام المعادلة (24) يمكن رسم العلاقة البيانية بين السعة A والتردد القسري p لمختلف القيم لمعامل الاضمحلال r وكما هو مبين في الشكل (4). المنحني (1) يوضح أن السعة تصبح مالانهاية في الكبر عندما $r=0$ أي في حالة انعدام الاضمحلال وهذا يحدث عندما p تساوي تماما ω وهذه الحالة النظرية لا تتحقق عمليا لان المهتز سيتحطم تماما. إذا ما انعدم الاضمحلال وأصبحت السعة مالانهاية. ولو فرضنا جدلا أن المهتز لم يتحطم فان سعته الهائلة تعني حتما تجاوزه لحدود المرونة وبالتالي عدم خضوع المهتز لقانون هوك. ولهذا السبب ذكرنا في بداية الفصل أن التعريف الدقيق للرنين يجب أن يأخذ بالاعتبار عامل الاضمحلال.

توضح المنحنيات الثلاثة (2) و (3) و (4) اختلاف سعة الاهتزاز مع اختلاف قيم معامل الاضمحلال r فعندما تكون قيمة r واطئة فان الرنين يحدث بالقرب من ω وعندما تزداد قيمة r فان موقع الذروة (القمة) يزحف إلى اليسار. وهذا يشير إلى أن تردد الرنين لنفس المهتز يختلف باختلاف قيمة r. ويتحكم بقيمة تردد الرنين p المعادلة (33). وهكذا نرى أن الرنين يحدث عمليا عندما يقترب التردد القسري من التردد الطبيعي غير المضمحل للمهتز ω وتصل سعة الاهتزاز إلى ذروتها. حيث في هذه الحالة تصل فعالية القوة المثيرة في إمداد المهتز بالطاقة إلى أقصاها. وفي هذه الحالة يقال أن القوة المؤثرة في حالة رنين مع المهتز. وللأغراض العملية يمكن اعتبار أن الرنين يحدث عند أو بالقرب من ω. أن المنحني (5) في الشكل (4) الذي يقابل معامل الاضمحلال $r=0.707\omega$ (أو $\omega^2=2r^2$)، يمثل خط الانتقال بين حالتين: فوق هذا الخط عندما تكون قيمة r اصغر من 0.707ω فان المنحنيات الناتجة يكون لها نهايات عظمى وتحت هذا الخط عندما تكون قيمة r اكبر من 0.707ω فان المنحنيات الناتجة لا يوجد فيها نهايات عظمى حقيقية. وعلية فان المنحنيات التي تقع فوق المنحني (5) يقابل كل منها حالة رنين ماعدا الحالة عندما $r=0$ والمنحنيات التي تقع تحت المنحني (5) لا يمكن ملاحظة أي اثر للرنين فيها. وهذا متوقع لأنه عند تعويض $\omega^2=2r^2$ في المعادلة (33) فان تردد الرنين الناتج يساوي صفرا. المنحني (6) في الشكل (4) الذي يقابل معامل الاضمحلال $r=\omega$ يقع تحت خط الانتقال (5) لذلك فلا يلاحظ أي ذروة مما يشير إلى عدم حدوث رنين يذكر ومن هذا المنحني يمكن إيجاد سعة الاهتزاز القسري في حالة الاضمحلال الزائد. ويكون التردد الطبيعي المضمحل ω_o اقل من التردد الطبيعي غير المضمحل ω للمهتز. ويلاحظ أن تردد الرنين p لا يتساوى مع كل من التردد الطبيعي غير المضمحل ω

والتردد الطبيعي المضمحل ω_o. ولكنه يكون اصغر من كليهما. وإذا كانت القوى الاحتكاكية التي يعانيها المهتز صغيرة فان الفروق تكون صغيرة. بحيث يمكن اعتبار تردد الرنين p مساويا للتردد الطبيعي ω ويكون الخطأ من الصغر بحيث يمكن إهماله.



الشكل (4) يوضح ستة منحنيات لست درجات من الاضمحلال 1.انعدام الاضمحلال. 2.ناقص الاضمحلال. 6.حرج الاضمحلال.

أمثلة عملية على الرنين

لقد وجدنا فيما سبق أن استجابة أي مهتز لتأثير قوة خارجية دورية يتوقف على العلاقة بين تردد القوة المؤثرة والتردد الطبيعي للمهتز. والمهتز قد يكون بسيطا جدا فيكون له تردد طبيعي واحد أو قد يكون معقدا فيكون له ترددات طبيعية كثيرة. وإذا ما أثرت قوة دورية لها تردد محدد على مهتز فأنها تسبب اهتزازه بنفس ترددها، ومتى ما اقترب أو انطبق تردد هذه القوة على احد الترددات الطبيعية للمهتز فان الرنين يحدث ويصبح الاهتزاز عنيفا. وقد ينتج من دفعات صغيرة متوالية قد أحسن توقيتها على مهتز، اهتزازا رنينيا خطيرا، بينما الأمر قد لا يكون كذلك إذا ما استخدمت دفعات كبيرة متعاقبة لم يحسن توقيتها، ومن هذا يتضح انه لكي يكون الرنين فعالا يجب أن يتوفر شرطان أساسيان: أولا يجب أن يكون تردد القوة المثيرة للاهتزاز مساويا لتردد المهتز، وثانيا، يجب أن يكون طور القوة المؤثرة متفقا مع طور الحركة للمهتز. إن أهمية الاهتزاز القسري تظهر عندما يحدث الرنين، وعلى الرغم من الفوائد العملية العديدة لظاهرة الرنين إلا أن هذه الظاهرة لا تخلو من الجوانب غير المرغوبة التي قد تؤدي إلى كوارث. ولتجنب التأثيرات غير المرغوبة للرنين، يجب معرفة التردد الطبيعي للمهتز واتخاذ الإجراءات المناسبة لتجنب الرنين. وبالنظر لأهمية ظاهرة الرنين سنأتي على ذكر بعض الأمثلة العملية البسيطة والمتباينة لنقف على مدى اثر هذه الظاهرة:

1.رنين عمود الهواء

نسك شوكة رنانة مهتزة فوق فوهة أنبوبة زجاجية مملوء جزئيا بالماء. ويحدث هذا اهتزازا قسريا في عمود الهواء فوق سطح الماء. ويمكن عن طريق ضبط مستوى سطح الماء أن نجعل التردد الطبيعي لعمود الهواء داخل الأنبوبة مساويا لتردد القوة المثيرة للاهتزاز(أي تردد الشوكة الرنانة) وعندما يحدث هذا فان فاعلية الشوكة المهتزة في إمداد الهواء بالطاقة الاهتزازية تصل إلى أقصاها. وعندئذ سنسمع رنينا قويا في الهواء الموجود بالأنبوبة استجابة للصوت الصادر من الشوكة الرنانة. إن ما يحدث فعلا في هذه الحالة هو أن الموجة الصوتية المنبعثة من الشوكة المهتزة تتحرك في العمود الهوائي داخل الأنبوبة وعندما تصل نهاية العمود تنعكس لتعود إلى موضع الشوكة المهتزة حيث تنعكس مرة أخرى بعد تقويتها إلى الأسفل وهكذا فان الشوكة المهتزة سوف تقوي الموجة الصوتية المنعكسة باستمرار وبذلك يستمر الرنين. ولا يقتصر حدوث الرنين في هذه الحالة على ارتفاع معين لعمود الهواء بل يحدث أيضا عند ارتفاعات مختلفة تساوي مضاعفات طول عمود الهواء الذي حصل فيه الرنين الأول.

2.رنين الأرجوحة

عندما يسلط طفل دفعات دورية متتالية على أرجوحة ليهزها، فانه يعلم أيضا انه يجب أن يعطي الدفعات على فترات زمنية ، وبذلك فان سعة الاهتزاز تزداد تدريجيا وعندما يتطابق تردد الدفعات التي يسلطها الطفل على الأرجوحة مع التردد الطبيعي للأرجوحة فان الرنين يحدث وبذلك تكون سعة التأرجح كبيرة نسبيا. ويجب أن نتذكر انه ليس المهم فقط أن يتساوى الترددين ليحدث الرنين بل يجب أيضا أن تتفق الحركتان الاهتزازيتان بالطور ليكون كفاءة انتقال الطاقة من احد المهتزين إلى الآخر في أعلى مداه.

3- الجسور المعلقة

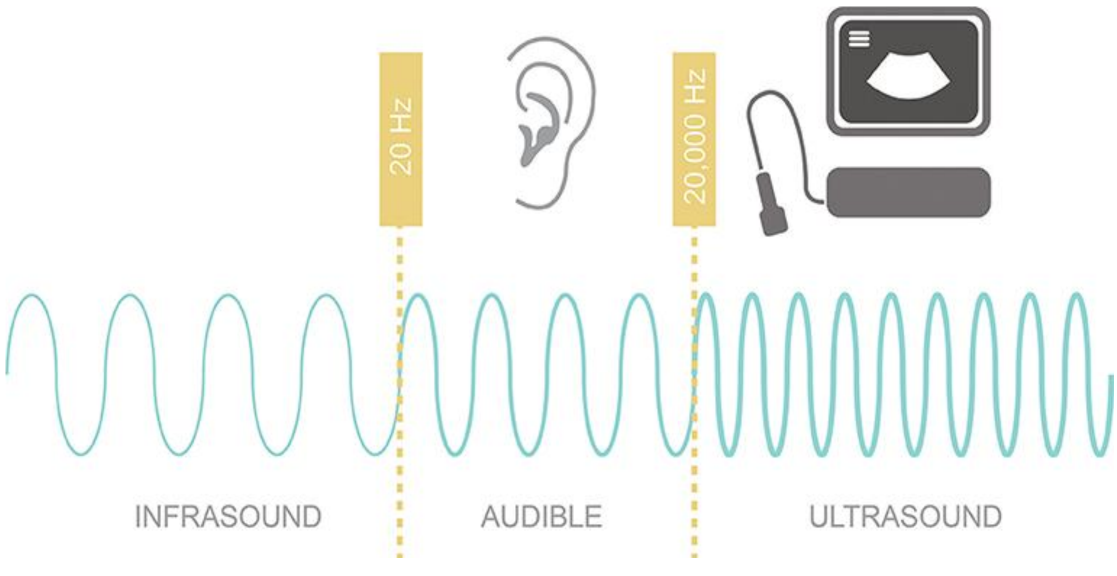
الجسر المعلق هو عبارة عن مهتز معقد من السهل هزه بسبب صغر عوامل الاضمحلال فيه نوعا ما. فإذا سار طابور من الجند على جسر معلق بخطوات منتظمة، فان ضربات الأقدام المتتالية التي تدك الجسر بنفس الطور وعلى فترات زمنية منتظمة تعمل عمل قوة دورية مؤثرة على الجسر. فإذا ما انطبق وقع سير الجند مع احد الترددات الطبيعية للجسر فان رنينا عنيفا يحدث وقد تكون سعة الاهتزاز في هذه الحالة من الكبر مما يؤدي إلى انهيار الجسر. وقد حدث فعلا إن كان الرنين سببا في تحطيم جسور عديدة. ولهذا السبب يؤمر الجند حتى وان كانوا جماعة صغيرة بالتخلي عن نظام سيرهم العسكري عند عبورهم الجسر تلافيا للكوارث. وهناك أمثلة عديدة على الماسي التي أحدثها الرنين في الجسور المعلقة. لقد تحطم جسر برتون المعلق فوق نهر ايرويل بمدينة مانجستر البريطانية تحت وقع أقدام طابور عسكري مؤلف من ستين رجلا فقط.

إلا أن اكبر مأساة وقعت عام 1850 حين دمرت كتيبة من المشاة الفرنسيين قوامها حوالي خمسمائة رجل جسر أنجير المعلق. ولقد هوى الجنود في واد سحيق وقتل منهم 226. وقبل سنين قليلة فقط انهار جسر معلق في حدائق القناطر الخيرية في مصر بسبب تأرجح بعض الأفراد فوقه بتردد انطبق على احد تردداته الطبيعية مما أدى إلى تحطيمه تماما. ولعل من اشهر الاهتزازات الرنينية هو ما حدث لجسر مضايق تاكوما بولاية واشنطن الأمريكية الذي يعد الجسر الثالث في ترتيبه العالمي من حيث الطول. هذا الاهتزاز أدى إلى انهياره ولم يمض على افتتاحه سوى أربعة اشهر فقط. ولم يكن سبب الانهيار مفهوما في حينه (1940). لان الاهتزازات التي تسببها الرياح على الجسور المعلقة لم تكن محط اهتمام المصممين. لقد تعرض جسر تاكوما لرياح مطردة جعلته يتذبذب قسريا، وعندما تطابق تردد القوة المتذبذبة التي أحدثتها الرياح المنتظمة مع احد الترددات الطبيعية لهذا الجسر، تسبب ذلك في زيادة سعة اهتزازه فتحطم. لقد جذبت كارثة جسر تاكوما قدرا كبيرا من الاهتمام لتجنب تكرر وقوعها. وبعد دراسات وبحوث مستفيضة أعيد بناء الجسر كما أعيد تصميم كثير من الجسور حتى تكون مستقرة من وجهة نظر ديناميك الهواء.

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية التربية للعلوم الصرفة
قسم الفيزياء
المرحلة:الثانية
المادة: الصوت والحركة الموجية

الفصل السابع

الموجات الصوتية والموجات فوق السمعية



مدرس المادة: د.محسن وليد محمد

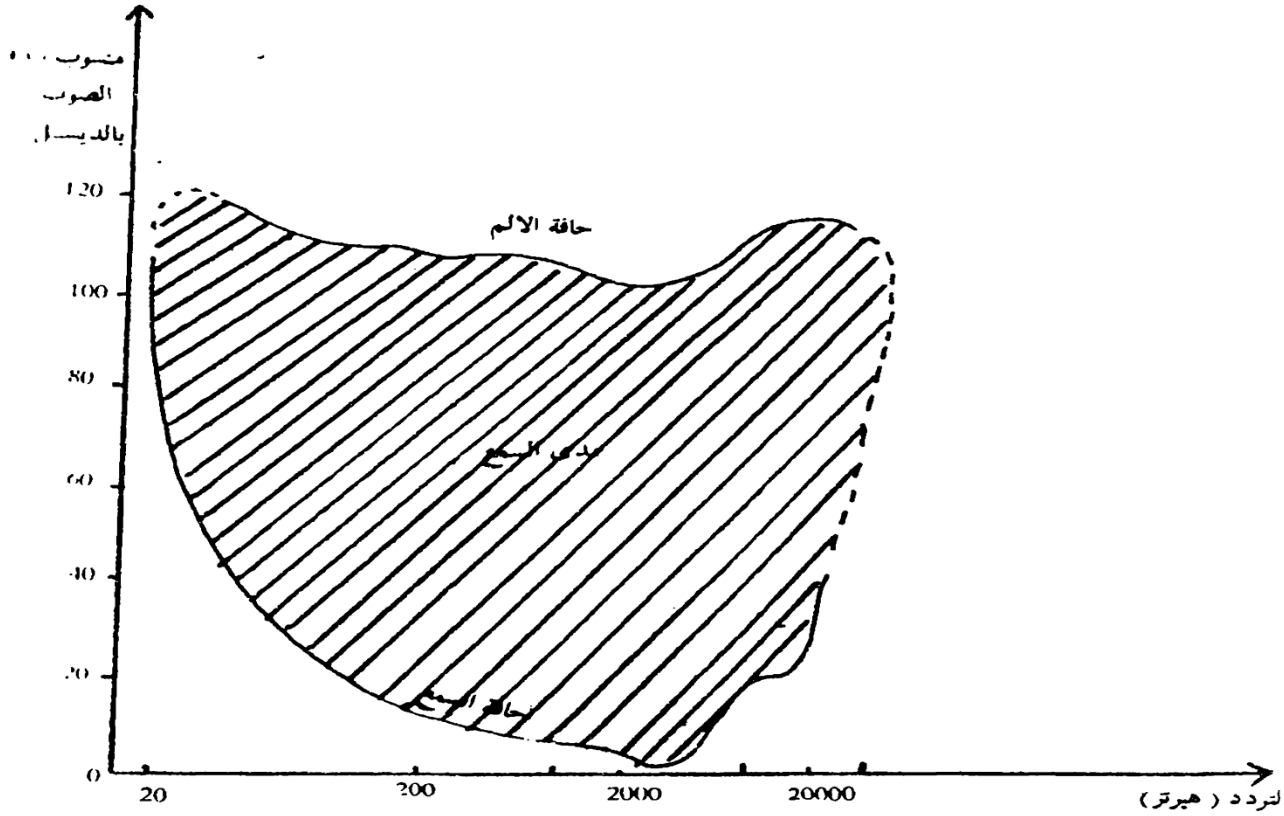
استجابة الإذن البشرية للصوت

ان الاذن البشرية العادية جهاز فائق الحساسية للصوت يفوق في تحسسه أدق الاجهزة المصنوعة لهذا الغرض. وهناك حدود لحساسية الاذن للصوت من حيث الشدة والتردد. فالحد الادنى لشدة الصوت المسموع هو 10^{-12} واط لكل متر مربع وهذا يقابل أضعف صوت تحسه الاذن البشرية ويعادل ضغط صوتي مقداره 20×10^{-6} باسكال (20×10^{-6} نيوتن/م^{2}) وهذا الحد من الضغط يدعى بحافة السمع (او عتبة السمع). ان هذا التغير الضئيل في مقدار الضغط الجوي 20×10^{-6} باسكال (ويعادل جزء واحد من 5000 000 000 جزء من الضغط الجوي الاعتيادي) يسبب ازاحة لغشاء الطبلة بمسافة تقل عن قطر جزيء الهيدروجين. ومع هذه الحساسية المفرطة فإن الاذن البشرية تتحمل ضغطاً صوتياً يفوق قيمة أدنى ضغط صوتي مسموع بأكثر من مليون مرة ، وهذا الحد من الضغط يدعى بحافة الالم وهكذا يتضح ان الاذن البشرية العادية تحس بالموجات التضاغطية كصوت إذا كان ضغطها الصوتي

استجابة الاذن البشرية للصوت

يتراوح بين الحدين 20×10^{-6} باسكال الى 20 باسكال واذا كان ضغط الصوت أقل من 20×10^{-6} باسكال فانه لم يعد مسموعا واذا زاد عن 20 باسكال يسبب الالم للاذن . اما من ناحية التردد فان الاذن البشرية العادية تسمع الاصوات التي تقع تردداتها ضمن المدى المحصور بين حوالي 20 هيرتز الى حوالي 20000 هيرتز أما الموجات التي تقع تردداتها خارج هذا النطاق فلايمكن للاذن البشرية ان تحسسها كصوت . وتسمى الموجات التي يقل ترددها عن 20 هيرتز بالموجات تحت السمعية وتسمى الموجات التي يزيد ترددها عن 20000 هيرتز بالموجات فوق السمعية

ان الشكل رقم 2 أدناه يوضح مديات الشدة والتردد للموجات التضاغطية التي يمكن للاذن العادية ان تحسها كصوت :



الشكل رقم 2 يوضح ان الاذن العادية السليمة تسمع الاصوات التي تقع شدتها بين حافتي السمع والالم والمحصوره تردداتها بين 20 هيرتز و 20000 هيرتز

في هذا الشكل نلاحظ ان ادنى شدة للصوت المسموع التي تمثل حافة السمع ليست ثابتة مع التردد ، اذ يلاحظ ان الاذن العادية تكون حساسيتها اعظم مايمكن للاصوات التي تقع تردداتها ضمن المدى المحصور بين حوالي 700 هيرتز الى حوالي 6000 هيرتز وفي هذا المدى تكون قيمة اقل ضغط صوتي مسموع هي 20×40^{-6} باسكال ولهذا السبب تم اعتبار هذه القيمة مرجعية في الصوتيات . وتضعف حساسية الاذن للصوت كلما ابتعد التردد عن هذا المدى سواء بالزيادة او بالنقصان . وعند الترددات الواطئة التي تقل عن حوالي 30 هيرتز او الترددات العالية التي تزيد عن حوالي 12000 هيرتز تكون الاذن العادية غير حساسة الى حد بعيد ، مما يقتضي ان ترتفع شدة الصوت كثيراً لكي يمكن سماعه . ويلاحظ من الشكل ايضاً ان شدة الصوت التي تسبب الالم للاذن (حافة الالم) تكاد تكون ثابتة مع التردد . مما تقدم يتبين ان استجابة الاذن السليمة للصوت ليست خطية بل معقدة وتختلف باختلاف تردد الصوت وشدته . وهذه الصفة المميزة للاذن البشرية تفيد كثيراً في تمييز الاصوات المختلفة . واهم الخصائص التي يعتمدها السامع لتمييز الاصوات المختلفة هي العلو والدرجة والنوعية .

علو الصوت

يرتبط العلو بشدة الصوت. فبينما تعرف الشدة بانها المعدل الزمني لتدفق الطاقة الصوتية خلال وحدة المساحة وهي كمية فيزياوية يمكن قياسها وحسابها بدقة الا ان العلو يتوقف على تأثير شدة الصوت على الآذان (اي على حكم السامع). وعليه يعرف العلو بانه ذلك الاحساس الذي يتوقف على شدة الصوت المسموع. ومع ان علو الصوت يزداد مع ازدياد شدته الا ان الاذن ليست بنفس الحساسية للاصوات ذات الترددات المختلفة ونتيجة لذلك فالاذن لاتستطيع سماع الصوت ذي التردد العالي بنفس العلو الذي تسمع به صوتاً تردده اقل وشدته مساوية لشدة الصوت الاول.

ان استجابة الاذن البشرية للاصوات التي لها نفي التردد ولكنها تختلف بالشدة تتغير لوغاريتمياً وليس خطياً. وهذه النتيجة تتفق مع علاقة فسلجية اكثر شمولاً تدعى قانون ويبر- فيخنر (Weber — Fechner Law) وطبقاً لهذا القانون:

مقدار الاحساس يتناسب طردياً مع لوغاريتم الشدة

فاذا فرضنا ان مقدار الاحساس (لعلو الصوت) هو L وان شدة الصوت هي I فان

$$L \propto \log I$$

ويجب ان نلاحظ ان هذا القانون لاينطبق بدقة عند حدود السمع الدنيا والعيا (اي قرب حافتي السمع والالم) اما في المديات الاخرى فان القانون يعطي نتائج جيدة.

ومن العلاقة الاخيرة نحصل على

$$L = K \log I$$

حيث ان K مقدار ثابت

وبمفاضلة (10.2) نجد ان

$$\frac{dL}{dI} = \frac{K}{I}$$

ان المقدار $\frac{dL}{dI}$ يدعى بحساسية الاذن. ويلاحظ من هذه العلاقة ان حساسية الاذن تقل مع زيادة شدة الصوت. وهذا يعني ان الاذن تحس التغيرات في شدة الصوت بصورة افضل كلما قلت شدة الصوت المسموع. أي بعبارة اخرى ان شدة الصوت يجب ان تصبح عشرة امثالها لكي تحسها الاذن وكأنها اصبحت اعلى مرتين، وان الشدة يجب ان تتضاعف مئة مرة لتبدو للاذن انها اعلى بثلاث مرات وهكذا...

ولما كان العلو هو احساس سمعي يتوقف على حكم السامع ذاته، اي انه ظاهرة فسلجية وليست فيزياوية لذلك فانه يتعذر قياسه بدقة باي جهاز.

ان علو الصوت يعتمد على شدة الصوت وحساسية الاذن بينما شدة الصوت تعتمد على عدة عوامل اهمها :

1 – سعة الاهتزاز للمصدر

حيث ان شدة الصوت الناتج من اي مصدر صوتي تتناسب طردياً مع مربع سعة الاهتزاز.

2 – المساحة السطحية للسطح المهتز

حيث ان شدة الصوت الناتج من مصدر مهتز تتناسب طردياً مع مساحة السطح المهتز.

3 - المسافة بين المصدر والمستلم

حيث أن شدة الصوت تتناسب عكسياً مع مربع المسافة الفاصلة بين المصدر ونقطة الاستلام. (حسب قانون التربيع العكسي).

الجدول أدناه يبين القيم التقريبية لمنسوب شدة بعض الأصوات

نوع مصدر الصوت	منسوب شدة الصوت بالديسيبل
طنين الذبابة (ادنى صوت مسموع)	0
حفيف الشجر – غرفة النوم	10
الهمس المتوسط العلو	15 - 20
في مكتبة عامة	30
الموسيقى الخفيفة	40
في غرفة الطعام	50
التخاطب العادي	60 - 65
رنين الهاتف	60 - 70
طريق كثيف المرور	70 - 85
ساعة توقيت	80
زئير الاسد (على بعد 6 متر) والشلال	90
ثقابة الصخور تعمل بالهواء المضغوط	100
الرعد	100 - 110
مطار الطائرات النفاثة (عند التحليق)	115 - 120
المدفع الرشاش	130
منطقة هبوط حاملة الطائرات (على بعد 20 متر)	150 - 155
الصاروخ الفضائي	175

الأصوات الصامتة (غير المسموعة)

لقد وجدنا ان الموجات الصوتية المسموعة هي تلك التي لايقل ضغطها الصوتي عن 20×10^{-6} باسكال ويتراوح ترددها بين 20 هيرتز و 20000 هيرتز. اما الموجات التي تقع تردداتها خارج هذا المدى من التردد فانها غير مسموعة ، وتسمى الموجات التي يقل ترددها عن 20 هيرتز بالموجات تحت السمعية ومثل هذه الموجات تتولد عادة عن المصادر الضخمة كما عند الهزات الارضية او العواصف او الاعاصير. وتسمى الموجات التي يزيد ترددها عن 20000 هيرتز بالموجات فوق السمعية ويمكن توليدها بوساطة الاهتزازات المرنة لبلورة الكوارتز التي تتجاوب مع مجال كهربائي متناوب (التأثير الكهروضغطي) وقد امكن بهذه الطريقة توليد موجات فوق سمعية تزيد تردداتها عن 6×10^{8} هيرتز وفي هذه الحالة يكون الطول الموجي المقابل في الهواء حوالي 5×10^{-5} سم وهو مايتساوى مع طول الموجات الضوئية .ولهذه الموجات تطبيقات عملية واسعة في عالم اليوم وسيكون لها شأن كبير في عالم المستقبل.

تطبيقات تقنية الموجات فوق الصوتية

الموجات فوق الصوتية اوالالتراساوند هي تكنولوجيا تستخدم الأمواج فوق الصوتية في التصوير الطبي وتستخدم أمواج صوتية ذات ترددات اكبر 20 كيلو هرتز أي اكبر من الترددات التي تسمعها إذن الإنسان وتعتمد فكرة عمل تلك الأجهزة الطبية على الأمواج الفوق صوتية التي تسقط على الجسم وتنعكس عنه مثل ما يقوم الخفاش الذي يطير في الليل مستعينا بالأمواج الفوق صوتية التي يحدثها لتسقط على الأجسام امامه وتنعكس عنها ويسمعها فيحدد مساره دون الحاجة إلى حاسة الإبصار ليستدل على الطريق ولذلك يستطيع الطيران في الليل. كما تستخدم الحيتان في البحر الأمواج فوق الصوتية وتستخدمها الغواصات البحرية كجهاز رادار يعمل في أعماق المحيطات لكشف الغواصات المعادية.

طريقة عمل أجهزة التصوير بالموجات الفوق الصوتية

يرسل جهاز الأمواج فوق الصوتية أمواج صوتية بترددات صوتية عالية تتراوح بين 1 إلى 5 ميجاهيرتز على صورة نبضات توجه إلى جسم الإنسان من خلال مجس خاص حيث تخترق الأمواج فوق الصوتية جسم الإنسان لتصطدم بالفواصل

والحدود الموجودة بين مكونات الجسم المختلفة مثل السوائل الموجودة بين طبقات الجلد الحد بين طبقة الجلد والعظم.

جزء من الأمواج فوق الصوتية تنعكس عن الحدود الفاصلة بين مكونات جسم الإنسان وتعود إلى المجس بينما تستمر باقي الأمواج فوق الصوتية لتخترق طبقات أعمق في جسم الإنسان لتصل إلى حدود فاصلة أخرى وتنعكس عنها وترتد إلى المجس. يلتقط المجس الأمواج فوق الصوتية المنعكسة تباعاً عن طبقات جسم الإنسان التي اخترقها ويغذي فيها جهاز الأمواج فوق الصوتية.

يقوم جهاز الأمواج فوق الصوتية بحساب المسافة بين المجس وطبقة الجلد أو العضو الذي انعكست عنه الأمواج الفوق صوتية مستخدما سرعة تلك الأمواج في جسم الإنسان والتي تبلغ 1540 متر في الثانية ومستخدماً الزمن اللازم لعودة الموجات فوق الصوتية، حيث يظهر جهاز الأمواج فوق الصوتية العلاقة بين المسافة وشدة الإشارة المنعكسة من جسم الإنسان لتكون توزيع ثنائي الأبعاد للمسافة والشدة والتي تعبر عن الصورة التي نشاهدها على جهاز الأمواج فوق الصوتية.

بقي ان نشير الى حقيقة ان أي جلسة للتصوير باستخدام جهاز الأمواج فوق الصوتية يتضمن ملايين النبضات الصوتية التي ترسل للجسم وتستقبل مرة أخرى لتحلل وتحسب المسافة القادمة منها تلك الأمواج لتعطي الصورة التي نراها، كما ان تحريك المجس من مكان لأخر يمكن أن يعطي صور من منظور مختلف.

المصادر :

1.فيزياء الصوت والحركة الموجية، امجد عبد الرزاق كرجية، جامعة الموصل، الطبعة الثانية،2000

2. THE PHYSICS OF VIBRATIONS AND WAVES, H. J. Pan, Sixth Edition, John Wiley & Sons, 2005.

3. Acoustics, Heinrich Kuttruff, Taylor & Francis, 2007.

4. Vibrations and Waves, George C. King, WILEY, 2009.