الاستقراء الرياضي (Mathematical Induction)

الاستقراء :عملية تقبل القضايا العامة كالقوانين عن طريق تجارب ومشاهدات لحالات خاصة متشابهة ومتعددة وقد يكون الاستقراء خاطئا او صائبا.

مثالا لو اخذنا مجموعة الاعداد الفردية $[1,3,5,9......,2n-1]$ نلاحظ ان مجموع اول n من الاعداد يساوي n^2 وذلك من خلال ملاحظة ما يلي:

$S_1 = 1 ....$ $=1=1^2$

$S_2 = 1+3$ $=4=2^2$

$S_3 = 1+3+5$ $=9=3^2$

$S_4 = 1+3+5+9$ $=16=4^2$

$S_n = 1+3+5+9+...+2n-1 = n^2$

$$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = 1+3+5+9+......+2n-1 = n^2$$

ان هذا الاستقراء صحيح.

مثلا: اذا كان الاستقراء يثبت ان العدد y بالصيغة $y = f(n) = n^2 - n + 17$ هو عدد اولي من خلال ملاحظة الاتي:

عندما n=1 فان $y = f(1) = 1^2 - 1 + 17 = 17$ هو عدد اولي

عندما n=2 فان $y = f(1) = 2^2 - 2 + 17 = 19$ هو عدد اولي

عندما n=3 فان $y = f(1) = 3^2 - 3 + 17 = 23$ هو عدد اولي

وهكذا ....

عندما n=10 فان $y = f(1) = 10^2 - 10 + 17 = 107$ هو عدد اولي

لكن

عندما n=17 فان $y = f(1) = 17^2 - 17 + 17 = 17^2$ هو عدد غير اولي

اذاً فان هذا الاستقراء خاطئ

<u>الاستقراء الرياضي</u>: ان الاستقراء لا يمكن ان يكون طريقة للبرهان كما لاحظنا أعلاه. أما الاستقراء الرياضي فهو يستعمل الرياضيات فقط وهو طرق البرهان الذي يحكمه أسلوب مبني على مبدأ الاستقراء الرياضي وبواسطته تغطي جميع فجوات الاستقراء.

مبداء الاستقراء الرياضي:

اذا استطعنا برهان الاتي (لزعم معين I(n))

1-الزعم صحيح عندما تكون n=1

2- الزعم صحيح عندما تكون n=2

3- اذا كان الزعم صحيح عندما تكون n=k فانه صحيح عندما تكون n=(k+1)

فأننا تستطيع القول بان الزعم صحيح لأي عدد صحيح موجب.

مثال (1): اثبت باستخدام الاستقراء الرياضي صحة الاتي: $1^3+2^3+.....+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

1-نبرهن صحة الاستقراء عندما n=1 :

الطرف الايسر $1^3=1$

الطرف الأيمن $\frac{1^2(1+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$

بما ان الطرف الأيمن يساوي الطرف الايسر إذا الاستقراء صحيح عندما n=1.

2-نبرهن صحة الاستقراء عندما n=2 :

الطرف الايسر $1^3+2^3=1+8=9$

الطرف الأيمن $\frac{2^2(2+1)^2}{4}=\frac{36}{4}=9$

بما ان الطرف الأيمن يساوي الطرف الايسر إذا الاستقراء صحيح عندما n=2.

3-نفرض صحة الاستقراء عندما n=k أي:

$$1^3+2^3+.....+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad ....(1)$$

4-نبرهن صحة الاستقراء عندما n=k+1 أي

$$1^3+2^3+.....+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4} \qquad (2)$$

نعوض (1) في معادلة (2) نحصل على:

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4}$$

الطرف الأيمن= $\frac{(k+1)^2[(k+1)+1]^2}{4}$

الطرف الايسر= $\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$

$$=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4}=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4k+4\right]}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2\left[(k+2)^2\right]}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

بما ان الطرف الأيمن يساوي الايسر

إذا الاستقراء صحيح عندما n=k+1

اذا الاستقراء صحيح لاي عدد صحيح موجب.

نحل المثال أعلاه بطريقة ثانية:

-نبرهن صحة الاستقراء عندما n=1 :

الطرف الايسر $1^3=1$

الطرف الأيمن $\frac{1^2(1+1)^2}{4}=\frac{4}{4}=1$

بما ان الطرف الأيمن يساوي الطرف الايسر إذا الاستقراء صحيح عندما n=1.

2-نبرهن صحة الاستقراء عندما n=2 :

الطرف الايسر $1^3+2^3=1+8=9$

الطرف الأيمن $\frac{2^2(2+1)^2}{4}=\frac{36}{4}=9$

بما ان الطرف الأيمن يساوي الطرف الايسر إذا الاستقراء صحيح عندما n=2.

3-نفرض صحة الاستقراء عندما n=k أي:

$1^3+2^3+.....+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ ....(1)

4-نبرهن صحة الاستقراء عندما n=k+1 أي

إضافة الحد k+1 الى طرفي المعادلة (1)

$1^3+2^3+.....+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^2$ (2)

الان نبسط الطرف الأيمن:

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4}=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4k+4\right]}{4}$$

$$=\frac{(k+1)^2\left[(k+2)^2\right]}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

بما ان الطرف الأيمن يساوي الايسر

إذا الاستقراء صحيح عندما n=k+1

اذا الاستقراء صحيح لاي عدد صحيح موجب.

مثال (2): برهن على ان $3^n \geq 3n-2$ لجميع قيم n باستخدام الاستقراء الرياضي:

1-نبرهن صحة الاستقراء عندما n=1 :

الطرف الايسر $3^1 = 3$

الطرف الأيمن $3*1-2=1$

اي ان $3>1$ أي الطرف الايسر أكبر من الطرف الأيمن اذا الاستقراء صحيح عندما n=1.

2-نبرهن صحة الاستقراء عندما n=2 :

الطرف الايسر $3^2 = 9$

الطرف الأيمن $3*2-2=4$

اي ان $9>4$ أي الطرف الايسر اكبر من الطرف الأيمن اذا الاستقراء صحيح للمتباينة عندما n=2.

3-نفرض صحة المتباينة عندما n=k أي (1) $3^k \geq 3k-2$

4-نبرهن صحة المتباينة عندما n=k+1 أي $3^{(k+1)} \geq 3(k+1)-2$

$$\Rightarrow 3^k 3^1 \geq 3k+3-2 \Rightarrow 3^k(1+2) \geq 3k-2+3 \Rightarrow 3^k + 2*3^k \geq 3k-2+3 \qquad (3)$$

نطرح (1)من (2)نحصل

$2*3^k \geq 3$

أي ان المتباينة صحيحة عندما n=k+1

أي ان المتباينة صحيحة لجميع n الصحيحة الموجبة.

أسئلة: برهن بطريقة الاستقراء الرياضي صحة كل مما يلي.

1) $\sum_{s=1}^{n}(s+2)(3s+1) = n(n+2)(n+3)$	2) $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{n+1}$
3) $\sum_{m=1}^{n} m = \frac{n(n+1)}{2}$	4) $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{n}{2n+1}$???
5) $\sum_{p=1}^{n} a\,r^{p-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$	6) $2^n \geq n+1$
7) $2+4+6+.....2n = n(n+1)$	8) $4+8+12.....+4n = 2n(n+1)$
9) $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$	10) $1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
11) $1^3+2^3+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	12) $1^4+2^4+...+n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

13) $1^5+2^5+...+n^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$	14) $3+6+...+3n=\frac{3n(n+1)}{2}$
15) $0+1+2+...+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$	16) $3+5+7+...+(2n+1)=n^2+2n$
17) $2+6+10+...+(4n-2)=2n^2$	18) $5+25+125...+5^n=\frac{5^{n+1}-5}{4}$
19) $n<2^n$	

س) بالاعتماد على S_k احسب S_{k+1} :

1) $S_k=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$

$S_{k+1}=\frac{(k+1)^2(k+1+1)^2}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

2) $S_k=1+5+9+...+[4(k-1)-3]+(4k-3)$

$S_{k+1}=1+5+9+...+[4((k+1)-1)-3]+(4(k+1)-3)$

$=1+5+9+...+(4k-3)+(4k+1)$

3) $S_k=3^k\geq 2k+1$

$S_{k+1}=$

$=3^{k+1}\geq 2k+3$

س) احسب مجموع كل من

1) $\sum_{n=1}^{7} n^3$

2) $\sum_{n=1}^{5} n^2$

الفصل الثاني:(العبارات المنطقية وجبر القضايا Logic Statements and Proposition Algebra)

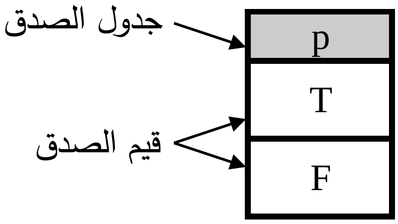
<u>المنطق:</u> هو العلم الذي يبحث عن الاشياء الصحيحة لتفسير الاشياء والظواهر اعتماداً على الحقائق الخارجية، وموضوع المنطق العام يهتم بصور الفكر لا بمادته.

اما المنطق الرياضي Mathematical Logic فيهتم بدراسة التعليلات Reasoning's التي يتعامل بها الرياضيون.

العبارات المنطقية البسيطة: Simple Logic Statements

تعرف العبارة المنطقية Logic Statement بشكل عام، انها جملة خبرية ذات معنى ومدلول، وتكون اما صادقة او كاذبة ولا يجوز ان تكون صادقة وكاذبة في آن واحد.

<u>مثال:</u> العبارة المنطقية p ، تتضمن العبارة p قيم صدق Truth Values توضع في جداول خاصة تدعى جداول الصدق Truth Tables.



- يقال لاية عبارة منطقية بانها عبارة منطقية بسيطة، اذا استحال الحصول على عبارة منطقية اخرى لاي جزء من اجزائها.
- الجمل الاستفهامية والجمل الامرية لا تعد عبارات منطقية.

<u>مثال على:</u>

جملة استفهامية / اين يقع القطر العراقي؟ — لا يمكن الحكم على هذه الجملة.

جملة امرية / اجمع العدد 20 مع العدد 50 — لا يمكن الحكم على هذه الجملة.

جملة خبرية / $8 + 5 = 10$ — يمكن الحكم على هذه الجملة.

<u>مثال توضيحي:</u>

الجملة $x < 16$ ليست عبارة منطقية. لكن اذا قلنا

(لكل عدد حقيقي x ، $x < 16$) هي عبارة منطقية كاذبة.

(يوجد عدد حقيقي x ، $x < 16$) هي عبارة منطقية صادقة.

يطلق على هذا النوع من الجمل بالجمل المفتوحة Open Statements.

العبارات المنطقية المركبة: Compound Logic Statements

يمكن ربط أي عبارتين منطقيتين بسيطتين بأداة ربط معينة لتكوين عبارة منطقية جديدة يطلق عليها بالعبارة المنطقية المركبة.

ان صدق العبارة المنطقية المركبة يعتمد على قيم صدق العبارات المكونة لها وعلى نوع أداة الربط التي تربط بين مركباتها.

فاذا كان لدينا العبارتين البسيطتين p , q وتم استخدام أدوات الربط التالية:

1- أداة الربط (و) Conjunction ويرمز لها بالرمز ($\wedge$).
2- أداة الربط (او) Disjunction ويرمز لها بالرمز ($\vee$).
3- أداة الربط (اذا كان فأن) Conditional St. وهي عبارة شرطية، ويرمز لها بالرمز ($\rightarrow$).
4- أداة النفي Negation ويرمز لها بالرمز ($\rceil$).
5- أداة الربط (اذا وفقط اذا) وهي عبارة ثنائية الشرط، ويرمز لها بالرمز ($\leftrightarrow$).

وادناه جدول الصدق الخاص بكل أداة من الأدوات اعلاه:

P	Q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\rceil p$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

- العبارة المركبة $p \rightarrow q$ تختلف عن العبارة المركبة $q \rightarrow p$ في قيم صدقها.

القضايا المنطقية: Logical Propositions

لتكن لدينا العبارات المنطقية $p, q, r, \ldots$ ولنفرض انها متغيرات Variables، يطلق على العبارة المركبة منها قضية ويرمز لها بالرمز $P(p, q, r,\ldots)$ وتعني القضية المبنية من العبارات $p, q, r, \ldots$.

- ان قيم صدق أي قضية يعتمد على قيم صدق العبارات المنطقية المكونة لها وعلى أدوات الربط المستعملة في تركيبها.
- اذا كان لدينا القضية $P(p, q, r,\ldots)$ مكونة من n من العبارات المنطقية البسيطة فأن قيم صدق القضية تستنتج من 2^n من الحالات.

مثال: ما قيم صدق كل من القضايا التالية:

1) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

2) $p \wedge q \vee r$

3) $(p \wedge q) \vee (p \vee q)$

4) $p \vee (\neg p \wedge q)$

5) $p \vee (\neg q \wedge r)$

6) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

7) $[\, r \wedge (p \vee q)\,] \leftrightarrow [\, q \vee (\neg r \wedge / p)\,]$

التكافؤ المنطقي: Logical Equivalence

لتكن كل من P , Q قضية منطقية، يقال ان القضيتان P , Q متكافئتان اذا وفقط اذا كان جدول صدق P هو نفسه جدول صدق Q ويرمز لذلك بالرمز $P \equiv Q$ وتقرأ P تكافئ Q منطقياً.

مثال: بين هل

1) $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

2) $\neg (p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

3) $[\, p \leftrightarrow q\,] \equiv [\, (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\,]$

4) $p \vee p \equiv p$

5) $p \wedge p \equiv p$

عبارة تحصيل حاصل: Tautology Statement

اذا كانت عبارة منطقية مركبة صادقة دائماً بغض النظر عن قيم صدق مكوناتها فتسمى تلك العبارة بالعبارة الصادقة منطقياً او تحصيل حاصل او تتولوجي Tautology ويمكن القول انها قضية صادقة منطقياً.

مثال: بين هل العبارات ادناه تحصيل حاصل ام لا

1) $p \vee \neg p$

2) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

لتكن كل من P , Q قضية فأن $P \equiv Q$ اذا وفقط اذا كانت العبارة $P \leftrightarrow Q$ تحصيل حاصل.

عبارة التناقض: Contradiction

اذا كانت عبارة منطقية مركبة كاذبة دائماً بغض النظر عن قيم صدق مكوناتها فتسمى تلك العبارة بالعبارة الكاذبة منطقياً او التناقض ويمكن القول انها قضية كاذبة منطقياً.

مثال: اثبت ان العبارات ادناه هي عبارات تناقض

1) $p \wedge \urcorner p$		2) $p \leftrightarrow \urcorner p$

🗎 العبارة Q عبارة تناقض اذا وفقط اذا $\urcorner Q$ عبارة تحصيل حاصل.

🗎 ليكن t رمزاً لعبارة تحصيل حاصل، و f رمزاً لعبارة التناقض فاذا كانت p اية عبارة منطقية فأن:

1) $p \wedge t \equiv p$		2) $p \wedge f \equiv f$

3) $p \vee t \equiv t$		4) $p \vee f \equiv p$

الاقتضاء المنطقي: Logical Implication

لتكن كل من P , Q قضية، يقال ان P تؤدي الى Q ، اذا كانت Q صادقة متى كانت P صادقة ويرمز لذلك $P \Rightarrow Q$ وتقرأ P تؤدي الى Q او P تقتضي Q او Q تستنتج منطقياً من P.

بمعنى اخر $P \Rightarrow Q$ اذا وفقط اذا $(p \rightarrow q)$ تحصيل حاصل.

🗎 الرمز $\rightarrow$ هو أداة ربط العبارات المنطقية.

🗎 الرمز $\Rightarrow$ يحدد علاقة بين قضيتين وهو ليس أداة ربط.

مثال: اثبت ان $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \Rightarrow p$

الحل: يمكن اثبات ذلك اذا بينا $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$ عبارة تحصيل حاصل، ويكون ذلك من خلال جدول الصدق.

P	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	$[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

بما ان العمود رقم (5) والذي يمثل العبارة $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$ هو تحصل حاصل.

اذن العبارة $[(p \rightarrow q) \rightarrow p]$ تقتضي العبارة p وبالرموز $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \Rightarrow p$

مبرهنة: لتكن كل من P , Q قضية فأن

1- $P \Rightarrow Q$ اذا وفقط اذا $\urcorner P \vee Q$ هي عبارة تحصيل حاصل.

2- اذا كانت $P \Rightarrow Q$ ، $Q \Rightarrow P$ فأن $P \equiv Q$.

جبر القضايا: **Algebra of Propositions**

ادناه مجموعة من القوانين التي سوف نستخدمها في تبسيط القضايا الجبرية الى ابسط صورة ممكنة.

1	$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$	قانونا اللانمو Idempotent laws
2	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	قانونا التجميع Associative laws
3	$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	قانونا التبادل Commutative laws
4	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	قانونا التوزيع Distributive laws
5	$P \vee t \equiv t$ $P \wedge t \equiv p$	$P \vee f \equiv p$ $P \wedge f \equiv f$	القوانين المحايدة
6	$P \vee \neg p \equiv t$ $P \wedge \neg p \equiv f$	$\neg(\neg p) \equiv p$ $\neg f \equiv t$ $\neg t \equiv f$	قوانين المتممات Complement laws
7	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	قانونا ديمورگن Demorgans laws
8	if $P \equiv Q \rightarrow \neg P \equiv \neg Q$		

<u>مثال:</u> باستخدام القوانين الجبرية بسط كل من العبارات الاتية:-

1- $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$
2- $q \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
3- $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
4- $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
5- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$ error
6- $\neg(p \wedge \neg q)$
7- $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$
8- $\neg(p \wedge q) \wedge (\neg p \vee q)$

العبارات الشرطية والتناقض: Conditional Statements and Variations

اذا كانت p , q عبارة، فيوجد اربعة احتمالات لتكوين عبارات شرطية من $p , q , \neg p , \neg q$:

1- $p \rightarrow q$		
2- $q \rightarrow p$	$p \rightarrow q$ لـ Inverse proposition	قضية عكسية
3- $\neg p \rightarrow \neg q$	$p \rightarrow q$ لـ Converse proposition	قضية نقيضه
4- $\neg q \rightarrow \neg p$	$p \rightarrow q$ لـ Contra positive proposition	قضية نقيضه عكسية

العلاقات بين القضايا اعلاه هي :

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$
$$q \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg q$$

البرهان بطريقة التناقض:

<u>**مثال:**</u> اثبت انه اذا كان n^2 عدداً زوجياً فأن n عدد زوجي ايضاً.

الحل: لتكن P تمثل القضية (n^2 عدد زوجي)

ولتكن Q تمثل القضية (n عدد زوجي)

المطلوب ان نبرهن ان $P \Rightarrow Q$ أي ان $P \rightarrow Q$ تحصيل حاصل (صادقة منطقياً) وهذا يكافئ ان نبرهن ان $\neg Q \rightarrow \neg P$ تحصيل حاصل (صادقة منطقياً)

وهذا يعني (ان نبرهن انه اذا كان n عدداً فردياً فأن n^2 عدداً فردياً) وهذا اسهل من البرهان اعلاه.

حيث يمكن فرض ان

$n = 2m +1$ عدد فردي حيث m عدد صحيح فأن

فأن $n^2 = (2m + 1) = 4m^2 + 4m +1$ عدد فردي وذلك من خلال ملاحظة الاتي

واضح ان $4m^2$ تكون عدداً زوجياً لأي عدد صحيح m.

وكذلك $4m = 2 (2m)$ تكون عدداً زوجياً لأي عدد صحيح m.

$m^2 + 4m$ تكون عدداً زوجياً لأي عدد صحيح m.

$4m^2 + 4m +1$ تكون عدداً فردياً لأي عدد صحيح m.

وهذا يعني ان n^2 عدداً فردياً

أي ان $\neg Q \rightarrow \neg P$

اذن $P \rightarrow Q$

أي انه اذا كان n^2 عدداً زوجياً فأن n عدد زوجي.

المسورات: Quantifiers

لاحظ العبارات الاتية:

1- يوجد طالب في ها الصف يرتدي الزي الموحد الجامعي.

2- كل طالب في هذا الصف يرتدي الزي الموحد الجامعي.

العبارة الاولى مسورة جزئياً، وكلمة يوجد تسمى مسوراً جزئياً.

العبارة الثانية مسورة كلياً، وكلمة كل تسمى مسوراً كلياً.

المسور الجزئي: Existential Quantifier

لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة في x على المجموعة A ، العبارة (يوجد $x \in A$ بحيث $P(x)$ صادقة) تسمى عبارة مسورة جزئياً وبالرموز تكتب: $\exists\, x \in A\,,\ P(x)$

الرمز $\exists$ يقرأ (يوجد There exist) ويسمى مسوراً جزئياً.

🗎 ان العبارة ($\exists\, x \in A\,,\ P(x)$) تكون صادقة اذا كانت مجموعة الصدق T_p غير خالية أي $T_p \neq \phi$

__امثلة:__

1- العبارة ($\exists\, n \in N\,,\ 3n + 1 > 2$) عبارة صادقة لانه مثلاً $n = 1$ يحقق المتراجحة.

2- العبارة ($\exists\, x \in |R\,,\ x^2 + 1 = 0$) عبارة كاذبة لانه لا يوجد عدد حقيقي يحقق المعادلة $x^2 + 1 = 0$

المسور الكلي: Universal Quantifier

لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة في x على المجموعة A ، العبارة (لكل $x \in A$ بحيث $P(x)$ صادقة) تسمى عبارة مسورة كلياً وبالرموز تكتب: $\forall\, x \in A\,,\ P(x)$

الرمز $\forall$ يقرأ (لكل For all) ويسمى مسوراً كلياً.

🗎 ان العبارة ($\forall\, x \in A\,,\ P(x)$) تكون صادقة اذا كانت مجموعة الصدق $T_p = A$

__امثلة:__

1- العبارة ($\forall\, n \in N\,,\ n > -2$) عبارة صادقة لان $T_p = N$.

2- العبارة ($\forall\, x \in Q\,,\ x > 1$) عبارة كاذبة لانه يوجد عدد نسبي $x = 1/2$ يحقق المتراجحة.

🗎 قد يكون في نفس العبارة المطروحة مسور كلي (واحد او اكثر) ومسور جزئي (واحد او اكثر).

<u>مثلاً:</u>

1) $\forall x \in A \;,\; \forall y \in N \;,\; \forall z \in B \;,\; P(x, y, z)$

2) $\forall x \in A \;,\; \exists y \in B \;,\; P(x, y)$

<u>مثال:</u> لتكن $A = \{-1, 0, 1\}$

فأن العبارة $\forall x \in A \;,\; \exists y \in A \;,\; x + y = 0$ تكون عبارة صادقة من خلال ملاحظة الاتي

$\forall x \in A$	$\exists y \in A$	$P(x,y):\quad x + y = 0$
1	-1	$1 + (-1) = 0$
0	0	$0 + 0 = 0$
-1	1	$-1 + 1 = 0$

اما العبارة $\exists y \in A \;,\; \forall x \in A \;,\; x + y = 0$ تكون كاذبة (لماذا).

🗎 وهذا يوضح ان $\forall x \;,\; \exists y \;,\; P(x,y) \qquad \exists y \,,\, \forall x \,,\, P(x,y)$

نفي العبارات المسورة: Negation of Propositions which contain Quantifiers

لناخذ العبارة (كل طالب في هذا الصف معدله ثمانون) ممكن نفيها كاتي:

(ليس صحيح ان كل طالب في هذا الصف معدله ثمانون)

وهذا يعني انه (يوجد على الاقل طالب واحد في هذا الصف معدله لا يساوي ثمانون)

ورمزياً نكتب ذلك

$\rceil(\forall x \in M$, x طالب معدله ثمانون$) \equiv (\exists x \in M$, x طالب معدله لا يساوي ثمانون$)$

<u>مبرهنة:</u>

1) $\rceil(\forall x \in A \;,\; P(x)) \equiv (\exists x \in A \;,\; \rceil P(x))$

2) $\rceil(\exists x \in A \;,\; P(x)) \equiv (\forall x \in A \;,\; \rceil P(x))$

<u>مثال:</u> انف العبارات التالية:

1) $\exists x \in \mathbb{R} \;,\; \forall y \in \mathbb{R} \;,\; x + y = y$

2) ($(2n + 3 > 7)$, لكل $n \in N$)

التعليل المنطقي: Logical Reasoning

لتكن $S_1, S_2, \ldots, S_n$ مجموعة من العبارات، ولتكن S عبارة يمكن استنتاجها من $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ان العبارة (S تستنتج من $S_1 , S_2 , \ldots , S_n$) تسمى مجادلة Argument حيث $S_1 , S_2 , \ldots , S_n$ تسمى بمقدمات او فرضيات المجادلة Premises و S تسمى بنتيجة المجادلة Conclusion.

ونعبر عن المجادلة اعلاه رياضياً كالاتي: $S_1 , S_2 , \ldots , S_n \;\vdash\; S$

وقد تكون المجادلة صائبة Valid او خاطئة (غير صائبة) Invalid .

المجادلة $P_1 , P_2 , \ldots , P_n \;\vdash\; P$ تكون صائبة

اذا وفقط اذا $[\, P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \,] \rightarrow P$ تحصيل حاصل

وهذا يعني ان $[\, P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \,] \Rightarrow P$

<u>**امثلة:**</u> بين هل المجادلات التالية صائبة ام خاطئة:

1) S_1: اذا كان الجو ممطراً فأن احمد سيصاب بالزكام

S_2: احمد لم يصب بالزكام

S : الجو لم يكن ممطراً

2) $p \rightarrow q \;,\; \rceil p \;\vdash\; \rceil q$

3) $p \rightarrow \rceil q \;,\; r \rightarrow q \;,\; r \;\vdash\; \rceil p$

المتجهات

في هذا الفصل سنلقي نظرة مختصرة على المتجهات والمصفوفات وبعض خواصها .سنتناول في هذا الفصل المواضيع الآتية:

1. المتجهات (بعض المبادئ الأولية)
2. بعض العمليات على المتجهات.
3. الضرب العددي(النقطي).
4. المصفوفات
5. أنواع المصفوفات
6. العمليات على المصفوفات

المتجهات (بعض المبادئ الأولية)

دعنا نبدأ الفصل بفائدة المتجهات ولماذا تستخدم .تستخدم المتجهات لتمثيل الكميات التي تمتلك مقدارا واتجاهاً كالسرعة والقوة مثلاً لتعريف القوة نحتاج لان نعرف مقدارها واتجاهها. يمكن أن نمثل المتجه بخط له اتجاه يمثل طول الخط مقداره واتجاه الخط هو اتجاه المتجه.

يكتب المتجه بالصيغتين التالية

$$\vec{v}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad or \qquad \vec{v}=\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle$$

تعريف طول المتجه $\vec{v}=\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle$ هو :

$$\|\vec{v}\|=\left(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

مثال: جد طول كل من المتجهات الآتية:

1. $\vec{v}=\langle 3,-5,10\rangle \Rightarrow \|\vec{v}\|=(9+25+100)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{134}$
2. $\vec{w}=\langle 3,0,11\rangle \Rightarrow \|\vec{w}\|=$
3. $\vec{q}=\langle 3,4\rangle \Rightarrow \|\vec{q}\|=$

جبر المتجهات

- الجمع

نبدأ بجمع المتجهات: ليكن لدينا $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ & $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_n\rangle$

فان حاصل الجمع $\vec{a}+\vec{b}=\langle a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3\rangle$

- الطرح يكون $\vec{a}-\vec{b}=\langle a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3\rangle$
- متجه الوحدة للمتجه $\vec{v}$ والذي يكون بنفس اتجاه المتجه الأصلي.

$$\vec{U}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

مثال ذلك نحاول ايجاد متجه الوحدة للمتجه $\vec{v}=\langle -5,2,1\rangle$

$$\vec{U}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\frac{1}{\sqrt{30}}\langle -5,2,1\rangle=\left\langle \frac{-5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{1}{\sqrt{30}}\right\rangle$$

وأن طول المتجه $\vec{U}$ هو واحد ومن هنا جاءت التسمية.

$$\|\vec{U}\|=\left(\frac{25}{\sqrt{30}}+\frac{4}{\sqrt{30}}+\frac{1}{\sqrt{30}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{30}}=1$$

- **الضرب النقطي**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

مثال ذلك الضرب النقطي للمتجهين $\vec{v}=\langle 3,-5,10\rangle \,\&\, \vec{w}=\langle 3,0,11\rangle$ هو

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=3*3+(-5)*0+10*11=9+0+110=119$$

يستفاد من الضرب النقطي في إيجاد الزاوية بين المتجهين

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|},\|\vec{v}\|=\sqrt{134},\|\vec{w}\|=\sqrt{130}$$

$$\cos\theta=\frac{119}{\sqrt{134}*\sqrt{130}}=\frac{119}{131.985}=0.90162$$

$$\theta=\cos^{-1}(0.90162)\Rightarrow\theta=25.6281^{o}$$

Example 1.11

Find the angle between the two vectors

$$\vec{A}=2i+3j+4k\,,\quad \vec{B}=i-2j+3k$$

Solution

$$\cos\theta=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{|A||B|}$$

$$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=(2)(1)+(3)(-2)+(4)(3)=8$$

$$|A|=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$$

$$|B|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$$

$$\cos\theta=\frac{18}{\sqrt{29}\sqrt{14}}0.397\Rightarrow\theta=66.6^{\circ}$$

- **الضرب الاتجاهي:**

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\vec{b}\sin\theta$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & -j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)i-(a_1b_3-a_3b_1)j+(a_1b_2-a_2b_1)$$

$$\vec{v}\times\overrightarrow{w}=\begin{vmatrix} i & -j & k \\ 3 & -5 & 10 \\ 3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

$$=(-5*11-11*0)i-(3*11-10*3)j+(3*0-(-5)*3)k$$

$$=-55i-3j+15k$$

$$=\langle 55,-3,15\rangle$$

مثال: جد $\overrightarrow{a\times b}$ اذا كان $\vec{a}=3i-4j$,$\vec{b}=-2i+3k$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & -j & k \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=(-3*3-0)i-(3*3-0)j+(3*0-(-4)*-2)k$$

$$=-12i-9j-8k$$

$$=\langle -12,-9,-8\rangle$$

مثال : جد حاصل الضرب النقطي والاتجاهي والزاوية لـ

$$\overline{A}=2\bar{i}-7\bar{j}+4\bar{k}$$

$$\overline{B}=5\bar{i}+4\bar{j}-3\bar{k}$$

المصفوفات

تسمّى مجموعة الأعداد المرتّبة على شكل مستطيل والموضوعة بين قوسين والتي تخضع لقواعد معيّنة لعمليّات سنبيّنها [إن شاء الله] فيما بعد: **مصفوفة** مثل:

$$(A)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ ؛ } (B)\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ؛ } (C)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 7 \\ -7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

المصفوفة (A) يمكن اعتبارها كمصفوفة المعاملات لجملة المعادلتين المتجانسة:

$\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ -x-2y+3z=0 \end{cases}$ ، ومن الممكن إعطاء تفسير مشابه للمصفوفة (C) بأنّ صفوفها ممثّلة لإحداثيّات النقاط (1,-1,3)، (-3,5,7)، (-7,1,-5) في الفراغ.

تسمّى الأعداد a_{ij} الواردة في المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & & & & & \\ \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & & & \cdot & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ a_{m1} & & & & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

عناصر المصفوفة، حيث يمثّل الدليل الأوّل رقم الصفّ، والثاني رقم العمود. توصف كلّ مصفوفة ذات m صفًّا و n عمودًا بأنّها من الدرجة $n\times m$، يُستعمل أحيانًا للدلالة على مصفوفة القوسان: ( ) أو زوجا القطع المستقيمة: ‖ ‖.

المصفوفة المربّعة:

تكون المصفوفة مربّعة إذا كان $m=n$، وتسمّى عندئذٍ المصفوفة المربّعة من الدرجة n؛ في المصفوفة المربّعة تسمّى العناصر: a_{11}،a_{22}، a_{33}، a_{44}، ...، a_{nn} عناصر قطريّة، ويُسمّى حاصل جمع العناصر القطريّة لمصفوفة مربّعة: أثر المصفوفة.

المصفوفة الصفريّة:

المصفوفة الصفريّة هي المصفوفة التي كلّ عناصرها أصفار؛ عندما تكون المصفوفة صفرًا ولا يكون هناك التباس في درجتها فإنّها تُكتب $A=0$ بدلاً من الجدول $m\times n$.

مجموع مصفوفتين:

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & -2\end{bmatrix}$ فإنّ: $A\pm B=\begin{bmatrix}1\pm1 & 2\pm5\\ 2\pm3 & -1\pm-2\end{bmatrix}$؛ من الملاحظ أنّه كي تكون المصفوفتان A وB متوافقتين للجمع يجب أن تكونا من نفس الدرجة.

إذا كانت المصفوفات A، B، C متوافقة بالنسبة للجمع فإن:

- $A+B=B+A$ (قانون التبديل).
- $A+(B+C)=(A+B)+C$ (قانون جمع الحدود الجبريّة).
- $k(A+B)=kA+kB=(A+B)k$، حيث: k عدد حقيقيّ.
- توجد مصفوفة D بحيث: $A+D=B$.

الضرب:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ b_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + \dots + a_{1m}b_{m1} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{m} a_{1k}b_{k1}$$

تجب ملاحظة أنّ هذه العمليّة هي (صفّ × عمود): يضرب كلّ عنصر من الصفّ بالعنصر المقابل له من العمود وتجمع حواصل الضرب.

يُقال أنّ حاصل الضرب $B\times A$ معرّف، أو أنّ A موافقة لـــ B بالنسبة للضرب إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة A مساويًا لعدد صفوف B؛ وإذا كانت A موافقة لـــ B بالنسبة للضرب فإنّه ليس من الضروريّ أن تكون B موافقة لـــ A بالنسبة للضرب.

إذا كانت المصفوفات A، B، C متوافقة بالنسبة للجمع والضرب فإن:

- $A(B+C)=AB+AC$ (قانون التوزيع الأوّل).
- $(A+B)C=AC+BC$ (قانون التوزيع الثاني).
- $A(B\ C)=(A\ B)C$ [قانون التنسيق (قانون ترتيب الحدود)].
- $AB\neq BA$ بصفة عامّة.
- $AB=0$ لا يستلزم بالضرورة أن تكون: $A=0$ أو $B=0$.
- $AB=AC$ لا يستلزم أنّ: $B=C$.

بعض أنماط المصفوفات:

مصفوفة الوحدة:

إذا كانت A مصفوفة مربّعة وكان $a_{ij}=0$ لقيم $i>j$ فإنّها تسمّى مصفوفة مثلّثيّة عليا، وإذا كان $a_{ij}=0$ لقيم $i<j$ فإنّها تسمّى مصفوفة مثلّثيّة دنيا؛ أمّا المصفوفة التي تكون مثلّثيّة عليا ودنيا تسمّى مصفوفة قطريّة. وكثيرًا ما تكتب هذه المصفوفة على الشكل: $A=diag(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$.

إذا كان: $a_{11}= a_{22}= a_{33}= \dots = a_{nn}=k$ فإنّ هذه المصفوفة تسمّى مصفوفة عدديّة، وإذا كان $k=1$ فإنّ هذه المصفوفة تدعى **مصفوفة الوحدة** (المصفوفة المحايدة) ويُرمز لها بالرمز 1_n.

مثلاً:

$$1_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ، 1_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ، 1_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معكوس مصفوفة:

إذا كانت A وB مصفوفتين مربّعتين بحيث $AB=BA=1$ فإنّ B تدعى معكوس A وتُكتب: $B=A^{-1}$.

منقول مصفوفة:

تسمّى المصفوفة ذات الدرجة $m\times n$ الناتجة عن المبادلة بين الصفوف والأعمدة للمصفوفة A ذات الدرجة $n\times m$: منقول المصفوفة A ويُرمز لها بالرمز: A^T.

مثال ذلك أنّ منقول المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix}$ هو المصفوفة: $A^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

إذا كان: A^T وB^T منقولي المصفوفتين: A وB على الترتيب، وكان k مقدارًا عدديًّا فإنّ:

- $(A^T)^T = A$.
- $(k\cdot A)^T = k\cdot A^T$.
- $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- $(A\cdot B)^T = A^T\cdot B^T$.

المصفوفة المتماثلة:

يُقال عن مصفوفة A أنّها متماثلة إذا حقّقت العلاقة: $A=A^T$. وتسمّى أيضًا المصفوفة الهيرميتيّة.

مرافقة مصفوفة:

إذا كانت عناصر مصفوفة A عبارة عن أعداد مركّبة، فإنّ المصفوفة التي عناصرها مرافقات عناصر المصفوفة A هي المصفوفة المرافقة للمصفوفة A ويُرمز لها بالرمز $\overline{A}$.

المحددات

1. المحددات الثنائية:

عندما تكتب الكميات الأربع a_1 , b_1 , a_2 , b_2 على الصورة التالية:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

فإنه يقصد بذلك المقدار الجبري $a_1b_2 - a_2b_1$ وتكتب هذه النتيجة على الصورة التالية:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

ويسمى الطرف الأيسر لهذه المتساوية بالمحددة والطرف الأيمن بمفكوك المحددة، وتسمى الكميات a_1 , b_1 , a_2 , b_2 المرتبة كما هو موضح بالطرف الأيسر بعناصر أو مكونات المحددة. ولما كانت هذه المحددة تحتوى على صفين وعمودين فأنها تسمى بالمحددات ذات الرتبة الثانية.

مثال (1) : إوجد قيمة المحددة:

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

الحـــــل

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - (-8 \times 4) = 10 - (-32) = 42$$

مثال (2) : اثبت أن:

1)) $$\begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = 1$$

2)) $$\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = -b^2$$

الحـــــل

1)) $$\begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

2)) $$\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)\times(a+b) - a \times a$$

$$= a^2 - b^2 - a^2 = -b^2$$

2. المحددات الثلاثية (ذات الرتبة الثالثة)

على غرار ما سبق شرحه بالنسبة للمحددات الثنائية فإنه إذا وضعت الكميات التسع على الصورة:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

فإنه يقصد بذلك المقدار

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

أي المقدار الجبري

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

ونظراً لاحتواء هذه المحددة على ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة فإنها تسمى بالمحددة الثلاثية أو ذات الرتبة الثالثة.. وتسمى الكميات التسع $a_1\ a_2\ a_3$, $b_1\ b_2\ b_3$, $c_1\ c_2\ c_3$ بعناصر المحددة أو مكوناتها. ويلاحظ أنه يمكن فك المحددة باستخدام عناصر أو مكونات أي صف أو أي عمود مع مراعاة القاعدة التالية للإشارات:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ومن الجدير بالذكر ملاحظة أن الإشارة المصاحبة للعنصر تتبع القاعدة $(-1)^m$ حيث m هي مجموع رقمي الصف والعمود الموجود به العنصر.

مثال (3): إوجد مفكوك المحددة الثلاثية التالية:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

الحــــــل

يمكن فك هذه المحددة باستعمال أي صف أو أي عمود كما يأتى:

أولاً:باستعمال الصـــف الأول:

$$D = 3(7\times 9 - 2\times 2) - 4(5\times 9 - 2\times 1) + 1(5\times 2 - 7\times 1)$$
$$= 3(63-4) - 4(45-2) + 1(10-7) = 8$$

ثانياً:باستعمال الصــف الثاني:

$$D = -5(4\times 9 - 1\times 2) + 7(3\times 9 - 1\times 1) - 2(3\times 2 - 4\times 1)$$
$$= -5(36 - 2) + 7(27 - 1) - 2(6 - 4) = 8$$

ثالثاً:باستعمال الصــف الثالث:

$$D = 1(4\times 2 - 1\times 7) - 2(3\times 2 - 1\times 5) + 9(3\times 7 - 4\times 5)$$
$$= 1(8 - 7) - 2(6 - 5) + 9(21 - 20) = 8$$

رابعاً:باستعمال العمـود الأول:

$$D = 3(7\times 9 - 2\times 2) - 5(4\times 9 - 1\times 2) + 1(4\times 2 - 1\times 7)$$
$$= 3(63 - 4) - 4(36 - 2) + 1(8 - 7) = 8$$

خامساً:باستعمال العمود الثانى:

$$D = -4(5\times 9 - 2\times 1) + 7(3\times 9 - 1\times 1) - 2(3\times 2 - 1\times 5)$$
$$= -4(45 - 2) + 7(27 - 1) - 2(6 - 5) = 8$$

سادساً:باستعمال العمود الثالث:

$$D = 1(5\times 2 - 7\times 1) - 2(3\times 2 - 4\times 1) + 9(3\times 7 - 4\times 5)$$
$$= 1(10 - 7) - 2(6 - 4) + 9(21 - 20) = 8$$

3. <u>المحددات الصغرى (مرافق العنصر):</u>

بملاحظة مفكوك أي محددة ثلاثية نجد أنها تحتوى على محددات أخرى من المرتبة الثانية ويطلق على هذه المحددات بالمحددات الصغرى (المصغرات) للمحددة الأصلية.

فإذا كانت المحددة الأصلية هي:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

فان المحددة الصغرى الناتجة عن حذف العمود الأول والصف الأول (أى العمود والصف اللذان يلتقيان عند العنصر a_1) تسمى المحددة الصغرى المناظرة للعنصر a_1 ويرمز لها بالرمز A_1 أي أن:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وبالمثل فالمحددة الصغرى للعنصر b_2 والتي يرمز لها بالرمز B_2 هي:

$$B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

والمحددة الصغرى للعنصر c_3 والتي يرمز لها بالرمز C_3 هي:

$$C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ وهكذا.......

وباستخدام المحددات الصغرى يمكن كتابة مفكوك المحددة (D) بإحدى الصور الآتية:

باستخدام الصف الأول: $D = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1$

باستخدام الصف الثاني: $D = a_2A_2 + b_2B_2 - c_2C_2$

باستخدام الصف الثالث: $D = a_3A_3 - b_3B_3 + c_3C_3$

باستخدام العمود الأول: $D = a_1A_1 - a_1A_1 + a_3A_3$

باستخدام العمود الثاني: $D = b_1B_1 + b_2B_2 - b_3B_3$

باستخدام العمود الثالث: $D = c_1C_1 - c_2C_2 + c_3C_3$

ويتضح من ذلك أنه يمكن إيجاد مفكوك المحددة باستخدام عناصر أي صف أو أي عمود ويكون معامل كل عنصر هو المحددة الصغرى المناظرة لهذا العنصر مسبوقة بإشارة + أو - حسب قاعدة الإشارات السابق شرحها والتي ترتبط بوضع العنصر في المحددة حسب القاعدة $(-1)^m$ حيث m هي مجموع رتبتي الصف والعمود اللذان يلتقيان عند هذا العنصر.

مثال (4): إوجد مفكوك المحددة:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

<u>الحـــــل</u>

باستخدام العمود الأول:

$$D = 3\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 3(63-30) - 0(36-5) + 2(24-7) = 133$$

باستخدام الصف الأول:

$$D = 3\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 3(63-30) - 4(0-12) + 1(0-14) = 133$$

وهكذا باستخدام أي صف أو أي عمود يمكن الوصول إلى نفس النتيجة.

ويمكن الحصول على مفكوك محددة الرتبة الثالثة كما هو موضح في الشكل التالي، وفيه تكرر كتابة العمودين الأول والثاني إلى يمين العمود الثالث ثم نضرب الأعداد فى اتجاه الأسهم الموضحة ونأخذ الناتج بإشارته إن كان السهم متجهاً من اليسار إلى اليمين أ بإشارة مخالفة إن كان السهم متجهاً من اليمين إلى اليسار وتجمع هذه النواتج.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال (5):إوجد حل المحددة الآتية:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

<u>الحـــل</u>

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 9 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \left((3\times7\times9)+(4\times6\times2)+(1\times0\times5)\right)$$
$$-\left((1\times7\times2)+(3\times6\times5)+4\times0\times9\right)$$
$$= (189+48+0)-(14+90+0) = 237-104 = 133$$

<u>اهم الخواص الأساسية للمحددات.</u>

<u>أولاً:</u> إذا بدلت الصفوف بالأعمدة في أي محددة فإن قيمة المحددة لا تتغير.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

لما كانت مكونات محددة الطرف الأيسر هي نفس مكونات محددة الطرف الأيمن، وبناءً على القاعدة القائلة بإمكان فك أي محددة باستخدام أي صف أو أي عمود فيها فإنه يمكن فك محددة الطرف الأيسر باستخدام الصف الأول ومحددة الطرف الأيمن باستخدام العمود الأول وبهذا نصل إلى المطلوب وهو تساوى قيمة المحددتين.

ثانياً: إذا أستبدل صف مكان صف أو عمود مكان عمود فإن إشارة هذه المحددة تتغير ولا تتغير   قيمتها:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ونصل للمطلوب إثباته إذا تم فك محددة الطرف الأيسر باستخدام الصف الأول ومحددة الطرف الأيمن باستخدام الصف الثاني.

ثالثاً: تنعدم المحددة إذا تتطابق صفين أو عمودين فيها:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

فلو فرضنا أن قيمة المحددة تساوى (D) باستخدام الخاصية السابقة واستبدال الصفين المتساويين (أو العمودين المتساويين) بعضهما ببعض فإن إشارة المحددة تتغير ولا تتغير قيمتها.

$$\therefore\ D = -D$$

$$\therefore 2D = 0$$

$$\therefore\ D = 0$$

رابعاً: إذا ضربت عناصر أي صف أو عمود في مقدار ثابت (معامل ما) فإن هذا يعنى أن قيمة المحددة قد ضربت في نفس المقدار أو نفس المعامل كما يلي:

$$\begin{vmatrix} fa_1 & fb_1 & fc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = f\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

المصفوفة المساعدة:

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربّعة من الدرجة n وكان a_{ij} المعامل المرافق للعنصر a_{ij}

فإنّنا نسمّي المصفوفة:

$$adjoint\ A = adjA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ المصفوفة المساعدة.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow adj(A)=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \Leftrightarrow adj(B)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

. إيجاد مقلوب (أو معكوس) مصفوفة

إن مقلوب المصفوفة المربعة A هو مصفوفة نرمز له بالرمز A^{-1} إذا ضربت بالمصفوفة A من يمينها أو من يسارها كان الناتج مصفوفة واحدية I: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

من هنا نلاحظ أنه لا يمكن الحديث عن مقلوب مصفوفة إلا إذا كانت المصفوفة مربعة.

سندرس إيجاد مقلوب مصفوفة من المرتبة الثانية ثم مقلوب مصفوفة من المرتبة الثالثة. أما المصفوفات من مراتب أعلى فلا تختلف طرق حساب مقلوباتها عن حالة المصفوفة من المرتبة الثالثة.

– مقلوب مصفوفة من المرتبة الثانية

لتكن لدينا المصفوفة من المرتبة الثانية الآتية:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

لإيجاد مقلوب هذه المصفوفة A^{-1} يمكن اتباع الخطوات التالية:

1 . نحسب محدد المصفوفة A. وهذا المحدد هو:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

2 . نوجد المصفوفة المساعدة وذلك بتبديل عنصري القطر الرئيس في المصفوفة A ببعضهما وضرب عنصري القطر الثانوي بـ (-1). سنرمز للمصفوفة المساعدة بالرمز A^h فتكون كما يلي:

$$A^h = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

3 . نحسب مقلوب (معكوس) المصفوفة A بتقسيم كل عنصر من عناصر المصفوفة المساعدة A^h على المحدد Δ . أي أن:

$$A^{-1} = \frac{A^h}{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta} & \frac{-a_{12}}{\Delta} \\ \frac{-a_{21}}{\Delta} & \frac{a_{11}}{\Delta} \end{bmatrix}$$

مثال:

لنوجد مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

إن محدد هذه المصفوفة يساوي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 1(-1) = 11$$

أما المصفوفة المساعدة فهي:

$$A^h = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ومقلوب (معكوس) المصفوفة هو:

$$A^{-1} = \frac{A^h}{\Delta} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{-1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

ويمكننا أن نتأكد من نتيجة الحساب بضرب المصفوفتين A و A^{-1} ببعضهما:

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{11} & \frac{1}{11}\\ \frac{-1}{11} & \frac{2}{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ملاحظة: من الواضح أنه إذا كان محدد المصفوفة مساويًا الصفر فلا يكون لها مقلوب. من هنا فإن شرط وجود مقلوب للمصفوفة أن يكون محددها غير مساو للصفر. نقول عن المصفوفة التي محدد يساوي الصفر إنها شاذة (غير نظامية). ونعلم الآن أن المصفوفة الشاذة ليس لها مقلوب.

ب- مقلوب مصفوفة من المرتبة الثالثة:

لتكن لدينا المصفوفة من المرتبة الثالثة الآتية:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

لإيجاد مقلوب هذه المصفوفة A^{-1} نتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: نوجد قيمة المحدد Δ للمصفوفة A. فإذا تبين أن $\Delta=0$ فعندها نقول إن المصفوفة A شاذة وليس لها مقلوب. أما إذا كان $\Delta\neq 0$ فننتقل إلى الخطوة الثانية.

الخطوة الثانية: نوجد مرافق كل عنصر من عناصر المصفوفة A ونضع هذه المرافقات بصورة مصفوفة نطلق عليها اسم مصفوفة المرافقات. وسوف نرمز لمصفوفة المرافقات بالرمز A^c ولكل عنصر مرافق بالرمز a_{ij}^c (ولقد شرحنا كيفية إيجاد مصفوفة المرافقات في إيجاد قيمة المحدد من المرتبة الثالثة):

$$A^c=\begin{bmatrix}a_{11}^c & a_{12}^c & a_{13}^c\\ a_{21}^c & a_{22}^c & a_{23}^c\\ a_{31}^c & a_{32}^c & a_{33}^c\end{bmatrix}$$

الخطوة الثالثة:

نوجد المصفوفة المساعدة (والتي نرمز لها بـ A^h) وهي عبارة عن مدور مصفوفة المرافقات، أي أن:

$$A^h = \begin{bmatrix} a_{11}^c & a_{21}^c & a_{31}^c \\ a_{12}^c & a_{22}^c & a_{32}^c \\ a_{13}^c & a_{23}^c & a_{33}^c \end{bmatrix}$$

الخطوة الرابعة:

نقسم كل عنصر من عناصر المصفوفة المساعدة A^h على قيمة المحدد (حيث فرضنا $\Delta \neq 0$)، فنحصل بذلك على مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{A^h}{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}^c}{\Delta} & \frac{a_{21}^c}{\Delta} & \frac{a_{31}^c}{\Delta} \\ \frac{a_{12}^c}{\Delta} & \frac{a_{22}^c}{\Delta} & \frac{a_{32}^c}{\Delta} \\ \frac{a_{13}^c}{\Delta} & \frac{a_{23}^c}{\Delta} & \frac{a_{33}^c}{\Delta} \end{bmatrix}$$

مثال1:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لإيجاد مقلوبها A^{-1} نتبع المراحل السابقة:

1 . نحسب المحددة Δ عن طريق نشرها وفق عناصر السطر الأول فنجد أن:

$$\Delta = 3(4-0) - 0 + 1(-1-6) = 5$$

$$\Delta = 5 \neq 0$$

2 . نوجد مصفوفة المرافقات فنجد:

$$A^c = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

3 . نوجد المصفوفة المساعدة A^h والتي هي مدور مصفوفة المرافقات، فنجد أن:

$$A^h = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -7 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

4 . نقسم عناصر المصفوفة المساعدة على المحدد، فنحصل على مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 3/5 & -1/5 \\ -7/5 & -3/5 & 6/5 \end{bmatrix}$$

ونستطيع أن نتأكد من صحة عملنا وذلك بالتحقق من صحة العلاقة التالية:

$$A^{-1}A = I$$

مثال 2:

أوجد مقلوب المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1 . نوجد قيمة المحدد Δ وذلك بنشر المحدد وفق عناصر السطر الأول:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 3(1-12) + 0 = 31$$

إذن $\Delta = 31 \neq 0$

2 . نوجد مصفوفة المرافقات:

$$A^c = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 4 \\ -3 & 2 & 12 \\ 9 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

3 . نوجد الآن المصفوفة المساعدة (وهي مدور مصفوفة المرافقات):

$$A^h = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 11 & 2 & -6 \\ 4 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

4 . وأخيراً يكون مقلوب المصفوفة هو:

$$A^{-1} = \frac{A^h}{\Delta} = \begin{bmatrix} -1/31 & -3/31 & 9/31 \\ 11/31 & 2/31 & -6/31 \\ +4/31 & +12/31 & -5/31 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: لا تختلف طريقة إيجاد مقلوب مصفوفة من مرتبة رابعة أو خامسة ...، عما رأيناه في حالة المصفوفة من المرتبة الثالثة.

يتمتع مقلوب المصفوفة بالخواص التالية:

1 . توجد بين المصفوفة $A_{(n,n)}$ ومقلوبها $A^{-1}{}_{(n,n)}$ العلاقة التالية المحققة دوماً.

$$A_{(n,n)}.A^{-1}{}_{(n,n)} = A^{-1}{}_{(n,n)}.A_{(n,n)} = I_{(n,n)}$$

2 . مقلوب المصفوفة القطرية هو مصفوفة قطرية عناصرها مقلوب عناصر المصفوفة الأصلية. أي أن:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & & \\ & 1/a_{22} & \\ & & 1/a_{33} \end{bmatrix}$$

3− مقلوب المصفوفة المقلوبة هو المصفوفة الأصلية، أي أن:

$$\left[A^{-1}{}_{(n,n)}\right]^{-1} = A$$

4 . مقلوب جداء مصفوفتين يساوي جداء المقلوبين بعد تبديل مواضعهما، أي أن:

$$\left[A_{(n,n)}.B_{(n,n)}\right]^{-1} = B^{-1}{}_{(n,n)}.A^{-1}{}_{(n,n)}$$

5 . مقلوب مدور المصفوفة يساوي مدور مقلوب المصفوفة، أي أن:

$$\left[A^{t}{}_{(n,n)}\right]^{-1} = \left[A^{-1}{}_{(n,n)}\right]^{t}$$

ونستطيع التأكد من صحة هذه الخواص بوساطة تطبيقات عددية.

استخدام المحددات في حل المعادلات

أ- حل معادلتين خطيتين في مجهولين

نعلم أنه لحل المعادلتين

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

نقوم بحذف y من المعادلتين للحصول على قيمة x ثم تحذف x بينهما للحصول على y ، ويكون حل المعادلتين هو:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

وباستخدام المحددات يمكن كتابة الحل العام للمعادلتين الخطيتين على الصورة التالية:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

هذا بشرط أن محدد المقام لا يساوي صفر، أي أن المقدار الجبري $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ وهذا الحل العام يمكن كتابته أيضاً على الصورة:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$or \ \frac{x}{D_x} = \frac{y}{D_y} = \frac{1}{D}$$

وتسمى هذه الطريقة في حل المعادلات الخطية بقاعدة كرامر وتحصل على المحددة Dx من المحددة D (محددة المعاملات) بوضع الحدود المطلقة مكان عناصر العمود الأول (معاملات x) وبالمثل نحصل على المحددة Dy بوضع الحدود المطلقة مكان عناصر العمود الثاني (معاملاتy).

مثال (6): جد باستخدام المحددات حل للمعادلتين:

$$3x - 2y = 8$$
$$-5x + 4y = -3$$

الحـــــل
المطلوب نحصل عليه من العلاقتين:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{x}{((8\times 4)-(-3\times -2))} = \frac{y}{((3\times -3)-(-5\times 8))}$$
$$= \frac{1}{((3\times 4)-(-5\times -2))}$$

$$\frac{x}{26} = \frac{y}{31} = \frac{1}{2}$$
$$\therefore\ x = 13 \leftrightarrow y = 15\,½$$

ب- حل ثلاث معادلات خطية في ثلاث مجاهيل:
نفرض أن لدينا المعادلات الآتية:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

فإذا رمزنا لمحددة المعادلات بالرمز D وهي الناتجة عن كتابة معاملات x,y,z في المعادلات الثلاث على صورة محددة فتكون A_1, A_2, A_3 هي المحددات الصغرى لعناصر العمود الأول فى المحددة D.

$$7\,D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وبضرب المعادلة الأولى في A_1 والثانية فى $-A_2$ والثالثة فى A_3 والجمع ينتج أن:

$$(a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3)x + (b_1A_1 - b_2A_2 + b_3A_3)y$$
$$+ (c_1A_1 - c_2A_2 + c_3A_3)z = d_1A_1 - d_2A_2 + d_3A_3$$

ومن السهل إثبات أن معاملي y , z عبارة عن محددات تساوى الصفر وأن معامل x هو المحددة D.

$$\therefore x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = d_1A_1 - d_2A_2 + d_3A_3 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ومن السهل ملاحظة أن المحددة الأخيرة هى نفس المحددة D بعد استبدال معاملات x فى المعدلات الثلاثة بمقادير الطرف الأيمن وهى d_1,d_2,d_3 ويمكن أن نرمز لهذه المحددة بالرمز Dx وبذلك يكون:

$$x.D = Dx \qquad \therefore x = \frac{Dx}{D}$$

وبالمثل فإن:

$$y = \frac{Dy}{D}, z = \frac{Dz}{D}$$

$$\therefore \frac{x}{Dx} = \frac{y}{Dy} = \frac{z}{Dz} = \frac{1}{D}$$

أي أن:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

ويلاحظ أن المحددة الأولى المكتوبة في مقام x ناتجة عن محددة المعاملات باستبدال معاملات x في المعاملات الثلاث بمقادير الطرف الأيمن وهى d_1 , d_2 , d_3 كذلك المحددة الثانية المكتوبة في مقام y فإنها تنتج من استبدال معاملات y في المعادلات الثلاث بالمقادير d_1 , d_2 , d_3 وبالمثل في المحددة الثالثة المكتوبة في مقام z فإنها تنتج من استبدال معاملات z في المعادلات الثلاث بالمقادير d_1 ,d_2 d_3 ويمكن تعميم هذه الطريقة في حل المعادلات الخطية لأي عدد من المجاهيل بشرط وجود حل مشترك لهما أي أن محددة المعاملات لا تساوى صفراً.

مثال (7): إوجد الحل المشترك للمعادلات الآتية:

$$2x + 3y + z = 12$$
$$4x + 6y - z = 9$$
$$x + 2y - 3z = -3$$

الحـــل

نحسب محددة المعاملات D كالآتى:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2(-18+2) - 3(-12+1) + 1(8-6) = 3$$

اى أن محددة المعاملات لا تساوى صفراً وبذلك يكون للمعاملات الثلاثة حل مشترك.

$$\therefore \frac{x}{Dx} = \frac{y}{Dy} = \frac{z}{Dz} = \frac{1}{D}$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 \\ 4 & 9 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}$$

$$\therefore \frac{x}{-66} = \frac{y}{51} = \frac{z}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore x = \frac{-66}{3} = -22 \quad y = \frac{51}{3} = 17 \quad z = \frac{15}{3} = 5$$

نظرية المجموعات Sets Theory

- أول من استعمل كلمة مجموعة هو العالم الرياضي كانتور (G. Cantor) عام ١٨٨٠م.
- **المجموعة**: عبارة عن تجمع من الأشياء معرف تعريفا تاما من أشياء متمايزة.

مثال:

فيما يلي عدد من المترادفات التي تعني "تجمع من الأشياء"

أ- فريق كرة القدم لأحد الأندية الرياضية.

ب- الأسرة التعليمية لإحدى المدارس.

ت- مجموعة حروف كلمة العراق.

ملاحظة:

ليس كل تجمع يعني مجموعة (المجموعة تحدد بصفة ثابتة)، حيث اذا كان تقدير الصفة يعتمد على الشخصية فأن هذا يؤدي إلى تغيرات مختلفة باختلاف الزمان والمكان.

مثال:

هل يمكن إطلاق مفهوم المجموعة "بالمعنى الرياضي الدقيق" عند كل من التجمعات التالية:-

أ- الشجعان في بلد معين.

ب- الجميلات في مدينة معينة.

- تستخدم الحروف الكبيرة مثل A, B, X, Y, ... للدلالة على المجموعات، بينما تستخدم الحروف الصغيرة a, b, x, y ... للدلالة على عناصر تلك المجموعات.

طرق التعبير عن المجموعات:

يمكن التعبير عن المجموعات أو تدوينها بإحدى الطريقتين التاليتين:

أولاً: الطريقة الجدولية Tabulation Method:

في هذه الطريقة يعبر عن المجموعة بذكر جميع عناصرها بين قوسين متوسطين مع وضع فارزة بين كل عنصرين متتاليين.

أمثلة:

١. لو رمزنا لمجموعة حروف كلمة method بالرمز A ، لامكن التعبير عن هذه المجموعة باستخدام الطريقة الجدولية كالأتي:

$A = \{ m , e , t , h , o , d \}$

٢. لو رمزنا لمجموعة أيام الأسبوع بالرمز W ، لامكن التعبير عن المجموعة W كالأتي:

W = { السبت ، الأحد ، الاثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة }

٣. لو رمزنا لمجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن 8 بالرمز X ، لامكن التعبير عن المجموعة X باستخدام الطريقة الجدولية كالأتي:

$X = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 \}$

ثانياً: طريقة القاعدة (الصفة المميزة):

في هذه الطريقة تعين المجموعة بذكر الخاصية (الصفة) التي تميز عناصرها عن عناصر أية مجموعة أخرى.

أمثلة:

يمكن التعبير عن المجموعات الواردة في المثال أعلاه باستخدام طريقة القاعدة وكما يلي:

❖ $A = \{ a /$ method حرف من حروف كلمة $(a) \}$ وتقرأ: A مجموعة العناصر، اذ أن حرف من حروف كلمة (method)

❖ $W = \{ w /$ يوم من أيام الأسبوع $(w) \}$

❖ $X = \{ x / x < 8$ ، عدد صحيح موجب $(x) \}$

❖ يجب عند التعبير عن المجموعات ملاحظة ما يلي:

١- أن تكون عناصر المجموعة متمايزة فلا داعي لتكرار أي عنصر من عناصرها (مثل كلمة فلفل).

٢- ليس لترتيب عناصر المجموعة أي أثر عليها.

٣- يجب تعيين عناصر المجموعة بشكل واضح، حيث نستطيع القول عن أي شيء انه عنصر في تلك المجموعة، أو انه ليس عنصراً فيها.

٤- نستخدم الطريقة الجدولية غالباً في تعيين المجموعات عندما يكون بالإمكان سرد كل عناصرها، وهذا يعني استخدام الطريقة الجدولية في حالة المجموعات القليلة العناصر.

مفاهيم أساسية في المجموعات Principle Concepts of Sets:

❖ **الانتماء:**

❖ أذا كان b عنصراً في المجموعة B ، نقول إن (b ينتمي للمجموعة B)، ونكتب ذلك بالشكل ($\mathbf{b \in B}$) ويقرأ b ينتمي إلى B.

❖ أذا كان b عنصراً في المجموعة B ، يمكن القول (B تحتوي b)، ونكتب ذلك بالشكل ($\mathbf{b \ni B}$) وتقرأ b محتوى في B.

❖ أذا كان b ليس عنصراً من عناصر المجموعة B ، فعندئذ نقول إن (b لا ينتمي إلى المجموعة B)، ونكتب ذلك بالشكل ($\mathbf{b \notin B}$).

<u>يعطى أمثلة:</u>

❖ **المجموعة الخالية Empty (or Null) Set:**

تعرف المجموعة الخالية بأنها المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر. ويرمز لها بالرمز $\varnothing$.

❖ **<u>أمثلة:</u>**

١- $\{ \} = \varnothing$ ، حيث نلاحظ عدم وجود أي عنصر في المجموعة $\varnothing$.

٢- $\{ \mathbf{x}$ عدد ، $\mathbf{x / x \neq x} \} = \varnothing$ ، المجموعة خالية لأنه ليس من المعقول أن لا يساوي أي عدد نفسه.

❖ **المجموعة الجزئية Subset:**

أذا كان كل من A , B مجموعة، يقال ان المجموعة A هي مجموعة جزئية من المجموعة B ، اذا كان كل عنصر من A ينتمي إلى B . ونعبر عن ذلك بالشكل ($\mathbf{A \subseteq B}$).

كما يمكن أن يقال ان B حاوية للمجموعة A أو أن المجموعة A محتواة في المجموعة B ويعبر عن ذلك بالشكل ($B \supseteq A$). ويمكن كتابة تعريف المجموعة الجزئية كالآتي:

$$\mathbf{A \subseteq B \leftrightarrow [\, \forall x \in A \rightarrow x \in B \,]}$$

<u>مثال:</u> نفرض ان لدينا المجموعات التالية:

$\mathbf{A_1 = \{ 7 , 18 , 19 \}}$ $\mathbf{A_2 = \{ 20 , 19 , 18 , 7 , 80 \}}$ $\mathbf{A_3 = \{ 19 , 20 \}}$

ماذا نستنتج؟

<u>ملاحظة:</u>

لو وجد عنصر واحد في الأقل ينتمي إلى المجموعة A ولا ينتمي إلى المجموعة B ويعبر عن ذلك بالشكل $A \not\subset B$. ويمكن التعبير عن التعريف أعلاه رياضياً كالآتي:

$$\mathbf{A \not\subset B \leftrightarrow [\, \exists x \in A \ni x \notin B \,]}$$

❖ المجموعة الجزئية الفعلية **Proper subset**

لتكن كل من A , B مجموعة، يقال إن A مجموعة جزئية فعلية من المجموعة B اذا وفقط اذا:

١- A مجموعة جزئية من **B** . ٢- يوجد على الاقل عنصراً في B غير موجود في A .

ويعبر عن ذلك رمزياً بالشكل $\mathbf{A \subset B}$.

ملاحظة:

في كتابنا سوف نستخدم الصيغة التالية $\mathbf{A \subset B}$ بغض النظر اذا كانت A هي مجموعة جزئية فعلية أم لا فيما يخص المجموعة B . ويمكن استنتاج ما يلي من ذلك:

١- المجموعة الخالية تكون مجموعة جزئية لأية مجموعة معطاة [**اذا كانت A مجموعة فأن** $\mathbf{\varnothing \subset A}$].

٢- كل مجموعة تكون مجموعة جزئية لنفسها [**اذا كانت A مجموعة فأن** $\mathbf{A \subset A}$].

مبرهنة (p 212): إذا كانت $A \subset B$ وكانت $B \subset C$ فأن $A \subset C$.

❖ **المجموعة الشاملة Universal Set:**

إذا كانت جميع المجموعات قيد الدراسة مجموعات جزئية من مجموعة معينة وثابتة، فأن هذه المجموعة تسمى بالمجموعة الشاملة. ويرمز لها بالرمز **U** .

مثال:

❖ إذا كانت A مجموعة حروف العلة $A = \{a, e, i, o, u\}$ ، وكانت B مجموعة الحروف التي تلي الحرف w حيث $B = \{x, y, z\}$. إن المجموعة الشاملة فيما يخص المجموعتين A , B هي مجموعة حروف اللغة الانكليزية.

❖ **المجموعات المتساوية Equal Sets**

يقال لمجموعتين مثل A , B انهما متساويتان إذا وفقط إذا إحتوتا على العناصر نفسها، وبعبارة أخرى عندما يكون كل عنصر في A موجوداً في المجموعة B وبالعكس. ويرمز لتساوي المجموعتين A , B بالشكل (A = B) ويمكن التعبير عن تساوي المجموعتين A , B كالآتي:

$$\mathbf{A = B \leftrightarrow [\, A \subset B \wedge B \subset A \,]}$$

أمثلة:

١- إذا كانت $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ وكانت $Y = \{\, y \,/\, 1 \le y \le 8 \;,\;$ y عدد صحيح $\}$ فأن $X = Y$.

٢- إذا كانت $A = \{a \,/\, a^2 - 3a + 2 = 0$ a عدد صحيح$\}$ و $B = \{1, 2\}$ و $C = \{2, 2, 1, 1\}$ فأن $A = B = C$.

ومن تعريف تساوي المجموعات يتضح لنا إن المجموعتان A , B تكونان غير متساويتين إذا وجد في الاقل عنصر واحد في إحدى المجموعتين لا ينتمي إلى المجموعة الأخرى. وعندئذ نكتب ذلك بالشكل:

$$\mathbf{A \neq B \leftrightarrow [\, \exists\, x \in A \to x \notin B \,] \vee [\, \exists\, x \in B \to x \notin A \,]}$$

❖ **المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية Finite and Infinite Sets:**

يقال لمجموعة مثل A أنها مجموعة منتهية Finite Set إذا كانت مجموعة خالية او كانت تحتوي على عدد من العناصر يمكن عدها (ولو نظرياً)، وفي غير هذه الحالات يقال للمجموعة A أنها مجموعة غير منتهية Infinite Set.

أمثلة:

١- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن ١٠٠ هي مجموعة منتهية.

٢- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي تزيد عن ١٠٠ هي مجموعة غير منتهية.

ملاحظة:

يقال للمجموعة التي تحتوي على عنصر واحد فقط انها مجموعة أحادية Singleton Set.

❖ **مجموعة المجموعات Set of Sets:**

يقال لمجموعة مثل S أنها مجموعة مجموعات إذا كان كل عنصر من عناصرها على شكل مجموعة.

مثال:

نفرض إن لدينا المجموعات التالية:- $A_1 = \{1 , 2\}$, $A_2 = \{3 , 4 , 5\}$, $A_3 = \{7 , 10\}$, $\varnothing = \{ \}$

فأن $S = \{ \varnothing , A_1 , A_2 , A_3 \}$ تمثل مجموعة مجموعات حيث كل عنصر من عناصرها هو مجموعة بحد ذاته.

❖ **مجموعة القوى Power Set:** مجموعة أجزاء المجموعة

تعرف مجموعة القوى بأنها مجموعة جميع المجموعات الجزئية المشتقة من مجموعة معينة. فلو فرضنا A أية مجموعة، فيرمز لمجموعة القوى للمجموعة A بالرمز P(A). ويمكن التعبير عنها بالشكل: $P(A) = \{ X / X \subset A \}$

مثال:

لتكن $A = \{ a , b , c \}$ ، إن المجموعات الجزئية التي يمكن اشتقاقها من المجموعة A هي:

$\varnothing , \{ a \} , \{ b \} , \{ c \} , \{ a , b \} , \{ a , c \} , \{ b , c \} , \{ a , b , c \} = A$

وهذا يعني أن $P(A) = \{ \varnothing , \{ a \} , \{ b \} , \{ c \} , \{ a , b \} , \{ a , c \} , \{ b , c \} , \{ a , b , c \} \}$

ملاحظات:

١- إن مجموعة القوى لأية مجموعة هي مجموعة مجموعات.

٢- إذا كان (n) هو عدد عناصر مجموعة معينة فأن (2^n) هو عدد عناصر مجموعة القوى فيما يخص المجموعة المعطاة.

❖ **المجموعات القابلة للمقارنة Comparable Sets:**

لتكن A , B مجموعتان. يقال بأن المجموعتين A , B قابلتان للمقارنة إذا كانت $A \subset B$ أو $B \subset A$.

وإلا فإنهما غير قابلتان للمقارنة أي عندما $A \not\subset B$ و $B \not\subset A$.

مثال:

١- لتكن $A = \{ x /$ مدينة عربية $x \}$ و $B = \{ y /$ مدينة عراقية $y \}$ ، فإنهما قابلتان للمقارنة.

٢- لتكن $A = \{ a , b \}$ و $B = \{ b , c , d \}$ ، فإنهما غير قابلتان للمقارنة.

المجموعة المنفصلة :

لتكن A , B مجموعتان. يقال بأن المجموعتين A , B مجموعتان منفصلتان إذا استحال الحصول على عناصر مشتركة فيما بينهما.

مثال:

لتكن { x عدد صحيح زوجي / x } = E (Even) و { x عدد صحيح فردي / x } = O (Odd)، فإنهما مجموعتان منفصلتان.

❖ **مخططات فين Venn Graph:**

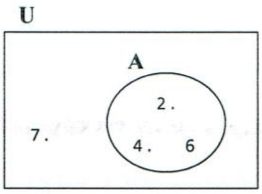
أي منحني مغلق منتظم أو غير منتظم. سميت بهذا ألاسم نسبة إلى أول من استخدمها وهو فين اويلر.

❖ سنستخدم المستطيل أو المربع للدلالة على المجموعة الشاملة في مجال معين.

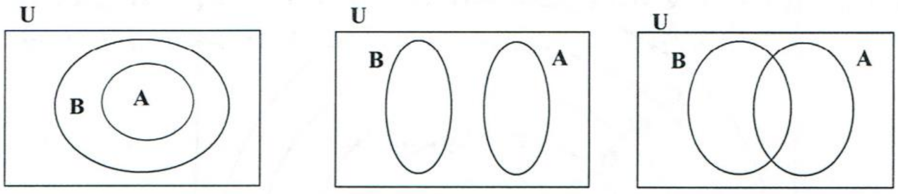
❖ ونستخدم الدوائر للدلالة على أية مجموعة من مجموعات المجموعات الشاملة.

مثال:

لتكن { 2 , 4 , 6 } = A وليكن x = 7 لا ينتمي لهذه المجموعة. فأن مخطط فين للمثال تكون بالشكل:



❖ تمثيل المجموعات القابلة للمقارنة والمجموعات المنفصلة باستخدام مخططات فين.



استنتج من الأشكال أعلاه المجموعات القابلة للمقارنة والمجموعات المنفصلة.

❖ **مجموعة الأعداد Set of Numbers:**

❖ **مجموعة الأعداد الحقيقة Set of Real Numbers:**

يمكن تمثيلها كنقاط على خط مستقيم يسمى بالخط الحقيقي، ويرمز لها بالرمز R/ ويعبر عنها كالأتي:

/R = { x / عدد حقيقي x }

❖ **مجموعة الأعداد الصحيحة Integer Set:**

هي الأعداد الحقيقية التي يزيد كل منها على العدد الذي قبله بواحد، وكل عدد فيها لا يحتوي على أي جزء كسري ويرمز لها بالرمز **Z**.

$Z = \{ \ldots\ldots , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots \}$

الأعداد الصحيحة الموجبة $Z^+ = \{ 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots \}$ و الأعداد الصحيحة السالبة $Z^- = \{ \ldots\ldots , -3 , -2 , -1 \}$ ، والصفر هو الحد الفاصل بين الأعداد الصحيحة الموجبة و الأعداد الصحيحة السالبة.

- ❖ $E = \{ x / x = 2y$, y عدد صحيح $\}$ — مجموعة الأعداد الزوجية (Even)
- ❖ $E = \{ \ldots\ldots , -4 , -2 , 0 , 2 , 4 , \ldots\ldots \}$
- ❖ $O = \{ x / x = 2y + 1$, y عدد صحيح $\}$ — مجموعة الأعداد الفردية (Odd)
- ❖ $O = \{ \ldots\ldots , -3 , -1 , 1 , 3 , \ldots\ldots \}$
- ❖ $P = \{ 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , \ldots\ldots \}$ (Prime) مجموعة الأعداد الأولية

❖ مجموعة الأعداد الطبيعية Natural Number Set:

يرمز لها بالرمز **N** ويعبر عنها كالآتي: $N = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , \ldots\ldots \}$ و $N^* = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , \ldots\ldots \}$

❖ مجموعة الأعداد النسبية Q Number Set:

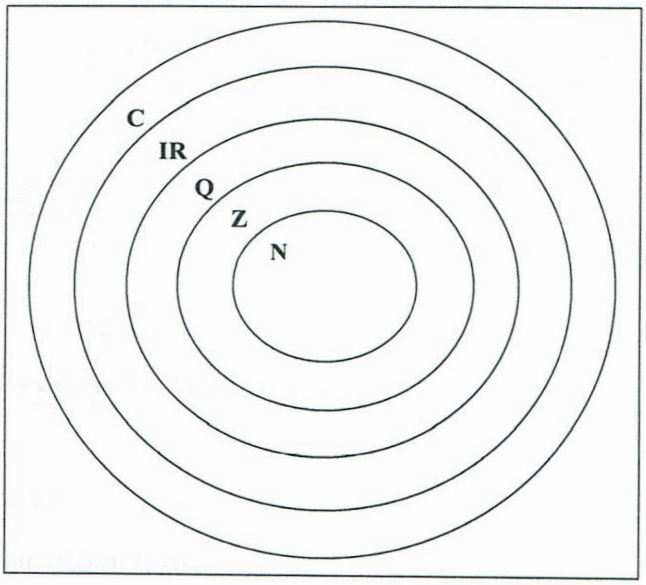
يرمز لها بالرمز **Q** ويعبر عنها كالآتي: $Q = \{ \frac{a}{b}$: a , b **عددان صحيحان** , $b \neq 0 \}$

❖ مجموعة الأعداد العقدية Complex Number Set:

العدد العقدي هو العدد الذي يكتب بالصيغة التالية [$C = x + i y$, x , y عددان صحيحان , $i = \sqrt{-1}$]

يرمز لها بالرمز C ويعبر عنها رياضياً بالشكل: $C = \{ c = x + i y \;/\; i = \sqrt{-1} , x \in /R , y \in /R \}$

وباستخدام مخطط فين نلاحظ العلاقة بين مجموعات الأعداد أعلاه:



جبر المجموعات Algebra of Sets:

❖ اتحاد المجموعات Union of Sets:

لتكن A , B مجموعة، فأن اتحاد A مع B هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A أو المجموعة B أو إلى كليهما. ويرمز للاتحاد بالرمز **A ∪ B** ورياضياً:

$$A \cup B = \{ x / x \in A \vee x \in B \}$$

وهذا يعني:

$$x \in A \cup B \leftrightarrow [x \in A \vee x \in B]$$

$A \cap B = B \cap A$

❺ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Associative Law قانون التجميع

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

❻ $A \cup \varnothing = A$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup U = U$

$A \cap U = A$

❼ $A \subset B \leftrightarrow P(A) \subset P(B)$

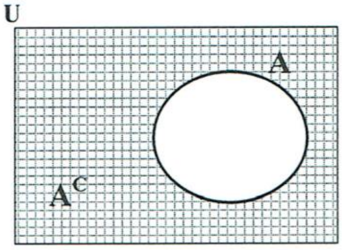
$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

❖ المجموعة المتممة لمجموعة   :Complement of Sets

لتكن $A \subset U$ مجموعة، فأن متممة المجموعة A يرمز لها بالرمز A^C ، ويعبر عنها رياضياً كالأتي:

$$A^C = \{x / x \in U \wedge x \notin A\}$$

وحسب مخطط فين يمكن التعبير عن المتممة بالشكل التالي:



مبرهنات:

لتكن كل من A , B مجموعة، فإذا كانت $A \subset B$ فأن :

❶ $B^C \subset A^C$

❷ $A \cap B^C = \varnothing$

❸ $B \cup A^C = U$

❹ $(A^C)^C = A$

❺ $U^C = \varnothing$

❻ $\varnothing^C = U$

❼ $A \cup A^C = U$

❽ $A \cap A^C = \varnothing$

❾ $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ Demorgan's Laws

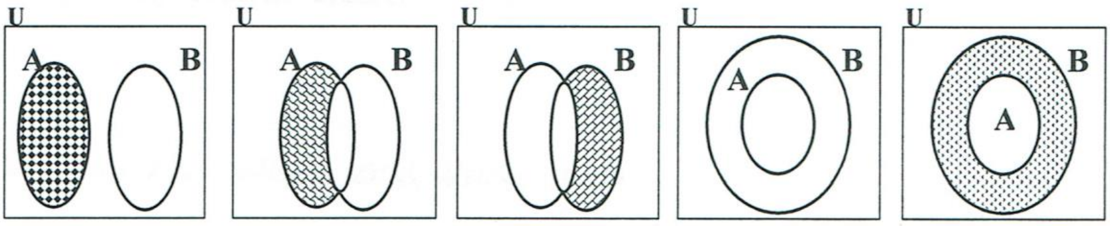
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ قانونا ديموكن

❖ مجموعة الفضلة (الفرق)   :Difference Sets

لتكن كل من A , B مجموعة، فأن مجموعة الفضلة يرمز لها A / B أو $A - B$ ، ويعبر عنها رياضياً كالأتي:

$$A / B = \{x / x \in A \ , \ x \notin B\}$$

وحسب مخطط فين يمكن التعبير عن الفضلة بالأشكال التالية:



$A / B = A$ A / B B / A $A / B = \varnothing$ B / A

مبرهنات:

لتكن كل من A , B مجموعة فأن :

❶ $A / \varnothing = A$

❷ $\varnothing / A = \varnothing$

❸ $A / A = \varnothing$

❹ $[A \subset B] \leftrightarrow [A / B = \varnothing]$

❺ $A / B \subset A$

❻ $B / A = B \ , \ A / B = A$ إذا كانت A , B منفصلتان فأن:

إذا كانت $A \neq B$ فأن:

❼ $A / B \neq B / A$
❽ $A / B = A \cap B^C$
❾ $A / B = B^C / A^C$

❖ **مجموعة الفضلة المتناظرة (الفرق التناظري) Symmetric Difference Sets:**

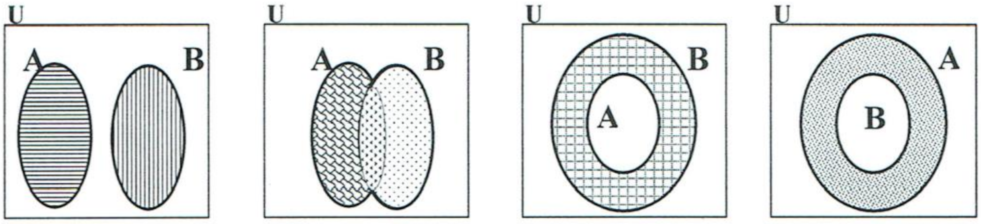
لتكن كل من A , B مجموعة، اتحاد المجموعتين A / B , B/A يسمى بمجموعة الفضلة المتناظرة (الفرق التناظري) بين A , B، ويرمز لها بالرمز $A \Delta B$ ، ويعبر عنها رياضياً كالأتي:

$$A \Delta B = (A / B) \cup (B / A)$$

أي إن:

$$A \Delta B = \{ x / \; x \in A \cup B \;\; \wedge \;\; x \notin A \cap B \}$$

وحسب مخطط فين يمكن التعبير عن الفضلة المتناظرة بالأشكال التالية:



$A \Delta B$ $A \Delta B$ $A \Delta B$ $A \Delta B$

مبرهنات:

لتكن كل من A , B , C مجموعة فأن :

❶ $A \Delta B = B \Delta A$
❷ $A \Delta \varnothing = A$
❸ $A \Delta A = \varnothing$
❹ $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
❺ $(A \Delta B) = \varnothing \leftrightarrow A = B$
❻ $(A \Delta B) = (A \cup B) / (A \cap B)$

❖ **أسرة المجموعات المفهرسة Index Family of Sets:**

لتكن W أسرة مجموعة، ولتكن I مجموعة تحتوي على أعداد، فإذا كان لكل عنصر $i \in I$ يوجد عنصر وحيد A_i في W. تسمى I بالمجموعة الدالة Indexed set والعنصر (i) يسمى بالدليل للمجموعة A_i وإن W تسمى أسرة المجموعات المفهرسة أو أسرة المجموعات المرتبطة بالمجموعة الدالة I ، ويرمز لها بالرمز $\{ A_i \}_{i \in I}$.

<u>**ملاحظة:**</u>

إذا كانت I مجموعة منتهية نحصل على أسرة مجموعات منتهية Finite family of sets وبالعكس.

<u>**مثال:**</u>

$I = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$

$W = \{ A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 \}$ **or** $W = \{ A_i \}_{i \in I}$

<u>**ملاحظة:**</u>

إذا كانت $\{ A_i \}_{i \in I}$ أسرة مجموعات مفهرسة لكان اتحاد المجموعات A_i هي مجموعة تتألف من جميع العناصر التي تنتمي في الأقل إلى أحدى المجموعات

عليه يكون:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \left\{ x \, \frac{\square}{\square} (j (I \; , \quad x (Aj \right\}$$

مبرهنات:-

إذا كانت $\{ A_i \}_{i \in I}$ أسرة مجموعات مفهرسة معينة فأن:

❶ إذا كانت $A_i \subset B \quad , \quad \forall_{i \in I}$ فأن:

❷ إذا كانت $B \subset A_i \quad , \quad \forall_{i \in I}$ فأن:

❸ $$\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right]^C = \bigcap_{i \in I} A_i^C$$

❹ $$\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right]^C = \bigcup_{i \in I} A_i^C$$

❖ **التجزئة The Partition:**

لتكن W مجموعة غير خالية يقال لأسرة المجموعات المفهرسة $\{A_i\}_{i \in I}$ بأنها تجزئة للمجموعة W إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية:

$1- \quad W = \bigcup_{i \in I} A_i$

$2- \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad , \quad \forall i, j \in I \; , \; i \neq j$

مثال:

لتكن لدينا المجموعات التالية:

❶ $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A_1 = \{3, 6\} \quad , \quad A_2 = \{1, 2, 4\} \quad , \quad A_3 = \{5\}$

$I = \{1, 2, 3\}$

بين هل أسرة المجموعات تمثل تجزئة لـ **W**.

❷ $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A_1 = \{1, 4\} \quad , \quad A_2 = \{2, 5, 7\} \quad , \quad A_3 = \{3, 4, 6\} \quad , \quad A_4 = \{1, 3, 4, 6\} \quad , \quad A_5 = \varnothing$

كون أسرة مجموعات مفهرسة بحيث تمثل تجزئة لـ **W**.

❖ **الأزواج المرتبة وضرب المجموعات Ordered Pairs and Product Sets:**

- **الزوج المرتب**

مثل (a , b) حيث:

a تسمى العنصر الأول أو المركبة الأولى أو المسقط الأول للزوج المرتب (a , b) .

b تسمى العنصر الثاني أو المركبة الثانية أو المسقط الثاني للزوج المرتب (a , b) .

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

$$(a, b) \neq (c, d) \leftrightarrow a \neq c \vee b \neq d$$

- **ضرب المجموعات Product Sets:**

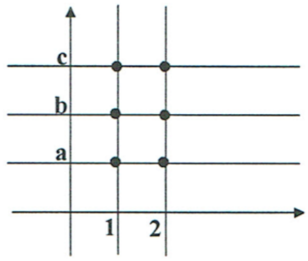
لتكن A , B مجموعة فأن :

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \quad , \quad b \in B\}$$

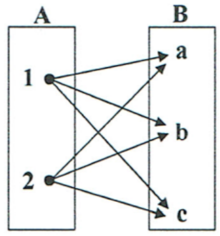
- يطلق على ضرب المجموعات بالضرب الديكارتي Cartesian Product
- يرمز لـ $A \times A$ بالرمز A^2 وهكذا.
- يمكن تمثيل $A \times B$ بإحدى الطرق الثلاث التالية:

○ لتكن $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b,c\}$ مجموعة فأن :

$$A \times B = \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b),(1,c),(2,c)\}$$



الطريقة البيانية



الطريقة السهمية

B / A	a	b	c
1	(1 , a)	(1 , b)	(1 , c)
2	(2 , a)	(2 , b)	(2 , c)

الطريقة الجدولية

العلاقات: Relations

<u>مثال:</u> لتكن $A = \{2 , 5 , 8\}$ ، $B = \{3 , 6 , 7 , 10 , 12\}$ مجموعة فأن

$$A \times B = \{ (2,3) , (2,6) , (2,7) , (2,10) , (2,12) , (5,3) , (5,6) , (5,7) , (5,10) , (5,12) , (8,3) , (8,6) , (8,7) , (8,10) , (8,12) \}$$

وليكن هناك علاقة من A الى B معرفة كالاتي: a اكبر من b حيث $a \in A$ ، $b \in B$

العلاقات الثنائية: Binary Relations

ليكن كل A , B مجموعة وليكن P(a,b) تعبيراً مفتوحاً فيما يخص المتغيرين a , b حيث $a \in A$ ، $b \in B$.

فأن العلاقة من A الى B يرمز لها بالرمز R حيث $R = (A , B , P(a,b))$

P(a,b) اذا كان صادقاً فأن العلاقة بين a , b يرمز لها بالرمز $a\,R\,b$.

P(a,b) اذا كان كـــاذباً فأن عدم وجود العلاقة بين a , b يرمز لها بالرمز $a\,\not R\,b$.

بيان العلاقة: Graph of the relation

اذا كانت $R = (A , B , P(a,b))$ فأن بيان العلاقة يرمز له بالرمز R^* حيث

$$R^* = \{ (a,b) / a \in A , b \in B \ \wedge \ a\,R\,b \}$$

وحسب المثال اعلاه فأن بيان العلاقة هو $R^* = \{ (5,3) , (8,3) , (8,6) , (8,7) \}$

ومن خلاله نلاحظ ان $R^* \subset A \times B$

<u>مثال:</u> لتكن لدينا المجموعة التالية $A = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$ ولتكن R علاقة من A الى A معرفة كالاتي:

a يقسم b حيث ان $a \in A , b \in A$.

اكتب بيان العلاقة R المعرف بالصيغة اعلاه.

<u>ملاحظة:</u> اذا كانت R علاقة معرفة من A الى نفسها فيقال ان R علاقة على المجموعة A.

طرق كتابة عناصر بيان العلاقة:

1- الطريقة الجدولية.

2- طريقة الصفة المميزة.

امثلة: لتكن $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6, 7, 10, 12, 15\}$ ولتكن R علاقة معرفة من A الى B كالاتي:

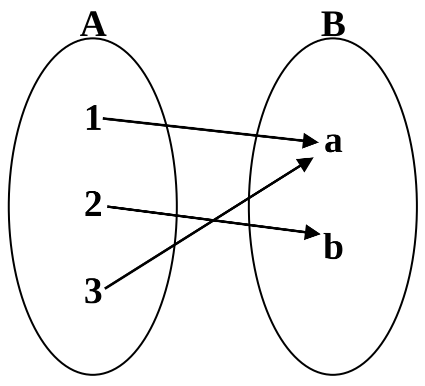
$a\,R\,b = \{(a,b) / a \in A , b \in B \wedge b$ يقسم $a \}$

$a\,R\,b = \{(a,b) / a \in A , b \in B \wedge b = a + 1 \}$

التمثيل المصور للعلاقات:

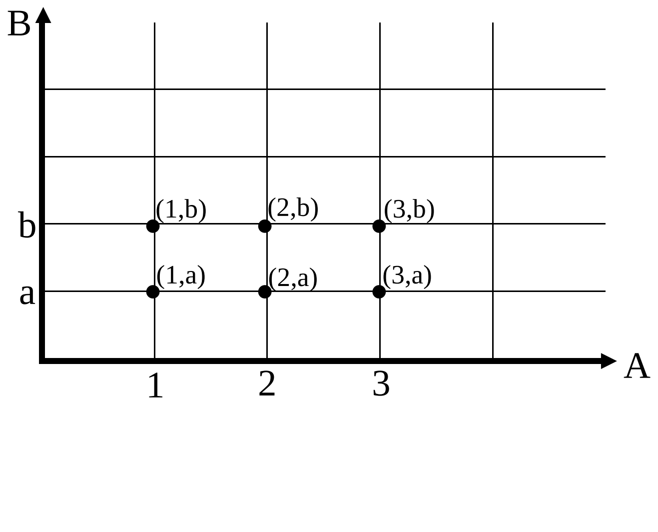
مثال: لتكن $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ فأن

1- التمثيل السهمي:



$R^* = \{ (1,a) , (1,b) , (2,a) , (2,b) , (3,a) , (3,b) \}$

2- التمثيل البياني (الديكارتي):



3- التمثيل الجدولي (المصفوفي):

حيث يشير رقم 1 الى وجود علاقة و 0 الى عدم وجود علاقة.

ويدعى التمثيل المصفوفي ايضاً ويرمز له بـ M_R

A \ B	a	b
1	(1,a)	(1,b)
2	(2,a)	(2,b)
3	(3,a)	(3,b)

ملاحظات:

- يمكن ان تذكر العلاقة ببيانها فقط.
- ليكن كل من R_1 و R_2 علاقة من A الى B فأن $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, R_1 / R_2 هو ايضاً علاقة من A الى B ويمكن التعبير عن كل منها كما يلي:

$$R_1 \cup R_2 = \{ (a,b) / a \in A , b \in B, \quad (a,b) \in R_1 \ \vee \ (a,b) \in R_2 \}$$
$$= \{ (a,b) / a \in A , b \in B, \quad a\ R_1\ b \ \vee \ a\ R_2\ b \}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{ (a,b) / a \in A , b \in B, \quad (a,b) \in R_1 \ \wedge \ (a,b) \in R_2 \}$$
$$= \{ (a,b) / a \in A , b \in B, \quad a\ R_1\ b \ \wedge \ a\ R_2\ b \}$$

$$R_1 / R_2 = \{ (a,b) / a \in A , b \in B, \quad (a,b) \in R_1 \ \wedge \ (a,b) \notin R_2 \}$$
$$= \{ (a,b) / a \in A , b \in B, \quad a\ R_1\ b \ \wedge \ a \not{R_2}\ b \}$$

مثال: لتكن كل من R , Q علاقة معرفة كالاتي:

$$R = \{ (x,y) / (x,y) \in N \times N \ , x + y = 5 \}$$
$$Q = \{ (x,y) / (x,y) \in N \times N \ , 2x - y = 4 \}$$

احسب $R \cap Q$ ، $R \cup Q$ ، Q / R ، R / Q و $R \Delta Q$

المنطلق والمدى للعلاقة: The domain and the range of relation

لتكن R علاقة معرفة من المجموعة A الى المجموعة B فأن:

1- $\text{dom } R = \{ x / x \in A , \exists\, y \in B \ , \ (x,y) \in R \}$

2- $\text{ran } R = \{ y / y \in B , \exists\, x \in A \ , \ (x,y) \in R \}$

مجموعة العناصر الاولى من الازواج المرتبة في R تسمى منطلق العلاقة R.

مجموعة العناصر الثانية من الازواج المرتبة في R تسمى مدى العلاقة R.

من 1 و 2 نستنتج:

$\text{dom } R \subset A \quad , \quad \text{ran } R \subset B$

<u>مثال:</u> لتكن R علاقة على N حيث $R = \{ (a,b) / a \in N , b \in N \ , \ b = a^2 \}$ فأن:

$$\text{dom } R = \{ a / a \in N , \exists b \in N \ , \ (a,b) \in R \}$$
$$= \{ a / a \in N , \exists b \in N \ , \ b = a^2 \}$$
$$= N$$

$$\text{ran } R = \{ b / b \in N , \exists a \in N \ , \ b = a^2 \}$$
$$= \{ 1, 4, 9, 16, 25, \dots \}$$

وهكذا........... (يعطى مجموعة من الامثلة وحسب نوع الصيغة المستخدمة)

العلاقة الذاتية: Identity relation

لتكن A مجموعة فأن العلاقة الذاتية هي علاقة على المجموعة A يرمز لها بالرمز I_A وتعرف كالاتي:

$$I_A = \{ (x,y) / (x,y) \in A \times A \ \wedge \ x = y \}$$

العلاقة العكسية: Inverse relation

لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B فأن العلاقة العكسية هي علاقة من المجموعة B الى المجموعة A يرمز لها بالمز R^{-1} حيث

$$R^{-1} = \{ (b,a) / a \in A , b \in B \ \wedge \ (a,b) \in R \}$$

<u>مثال:</u> لتكن $B = \{ 3, 4, 15 \}$, $A = \{ 3, 5, 7 \}$ ولتكن R من A الى B حيث

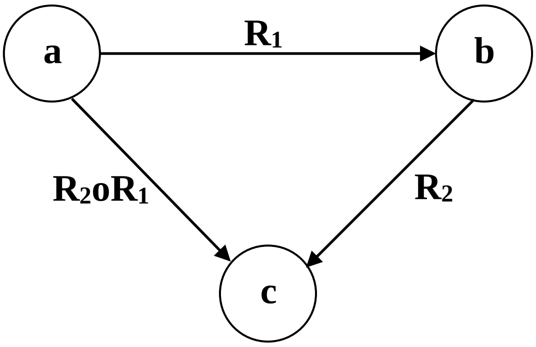
$R = \{ (3,3), (5,3), (5,15) \}$ فأن $R^{-1} = \{ (3,3), (3,5), (15,5) \}$

تركيب العلاقة: Composition of relation

لتكن A , B , C ثلاثة مجموعات وكانت $R_2 : B \to C$, $R_1 : A \to B$ فأنه توجد علاقة من A الى C تسمى العلاقة المركبة (تركيب R_1 مع R_2) ويرمز لها بالرمز $R_2 o R_1$ وتقرأ (R_1 تركيب R_2) حيث

$$R_2 o R_1 = \{ (a,c) / a \in A , c \in C \ , \ \exists b \in B \ , \ a R_1 b \ \wedge \ b R_2 c \}$$

$R_2 o R_1 = \{ (a,c) / a \in A , c \in C \quad , \quad \exists b \in B \quad , \quad (a,b) \in R_1 \ \wedge \ (b,c) \in R_2 \}$



مثال: لتكن $C = \{ 4, 9 \}$, $B = \{ 1, 2, 3 \}$, $A = \{ a, b, c, d \}$ ولتكن R_1 علاقة من A الى B
ولتكن R_2 علاقة من B الى C حيث $R_2 = \{ (1,4), (2,9) \}$, $R_1 = \{ (a,1), (b,2), (c,3) \}$
فأن:

$R_2 o R_1 = \{ (a,4), (b,9) \}$

مبرهنات:

1- لتكن R علاقة على المجموعة A فأن... $(R^{-1})^{-1} = R$

2- لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B فأن...

$\text{dom } R = \text{ran } R^{-1} \quad , \quad \text{ran } R = \text{dom } R^{-1}$

3- لتكن R علاقة على المجموعة A ولتكن I_A علاقة ذاتية على A فأن...

$I_A \, o \, R = R \, o \, I_A = R$

4- لتكن كل من R , S , T علاقة على المجموعة A فأن...

1) $(T o S) o R = T o (S o R)$
2) $(S \cup T) o R = (S o R) \cup (T o R)$
3) $(S \cap T) o R \subset (S o R) \cap (T o R)$
4) $T o R \subset T o S$ ... فأن $R \subset S$ اذا كانت
5) $(S o R) \cap T = \varnothing \leftrightarrow (T o R^{-1}) \cap S = \varnothing$
6) $(S o R)^{-1} = R^{-1} \, o \, S^{-1}$

انواع العلاقات: Type of relations

1- العلاقة الانعكاسية: Reflexive relation

لتكن R علاقة على المجموعة A ، يقال ان R علاقة انعكاسية على A اذا حققت:

$\forall \ a \in A \ \rightarrow \ (a , a) \in R$

<u>مثال:</u> لتكن $A = \{ 1, 2, 3, a \}$ ولتكن R_1 علاقة على A معرفة كالاتي:

$R_1 = \{ (1,1) , (1,2) , (2,2) , (3,3) , (a,a) , (a,2) \}$

فأن العلاقة R_1 علاقة انعكاسية لان الازواج المرتبة (a,a) , $(3,3)$, $(2,2)$, $(1,1)$ تنتمي الى R_1 وتنتمي الى I_A (؟؟؟ لماذا) وهذا يبين ان $I_A \subset R_1$ اذا كانت R_1 انعكاسية.

2- العلاقة المتناظرة: Symmetric relation

لتكن R علاقة على المجموعة A ، يقال ان R علاقة متناظرة على A اذا حققت:

اما $\forall \ (a , b) \in A\times A , \ (a , b) \in R \rightarrow (b , a) \in R$

او $R = R^{-1}$

3- العلاقة المتعدية: Transitive relation

لتكن R علاقة على المجموعة A ، يقال ان R علاقة متعدية على A اذا حققت:

$\forall \ a, b, c \in A , [(a , b) \in R \wedge (b , c) \in R \ \rightarrow \ (a , c) \in R$

4- العلاقة غير انعكاسية: ir reflexive relation

لتكن R علاقة على المجموعة A ، يقال ان R علاقة غير انعكاسية على A اذا حققت:

$\forall \ x \in A \ \rightarrow \ (x , x) \notin R$

<u>ملاحظة:</u> لاي علاقة R تكون ليست انعكاسية Not reflexive ليس بالضرورة ان تكون غير انعكاسية (والعكس صحيح).

5- العلاقة التخالفية: (ضد متناظرة) Anti symmetric relation

لتكن R علاقة على المجموعة A، يقال ان R علاقة تخالفية (ضد متناظرة) على A اذا حققت:

$$\forall\ a, b \in A\ ,\ [\ (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R\ ] \rightarrow\ a = b$$

بعبارة اخرى

اذا كانت R تخالفية وكان $a \neq b$ فأن اما $(a,b) \notin R$ او $(b,a) \notin R$

<u>مثال:</u> (يعطى مثال يوضح كل ذلك ولكل فقرة من الفقرات اعلاه)

لتكن $A = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ وكانت كل من R_1 و R_2 علاقة على A معرفة كالاتي:

$$R_1 = \{(a,b) / (a,b) \in A\times A\ \ ,\ b \geq a\ \}\ ,\quad R_2 = \{(a,b) / (a,b) \in A\times A\ ,\ \ a = 2b - 2\ \}$$

جد كل من R_1 و R_2 ثم بين هل كل من العلاقتين اعلاه يمثل علاقة انعكاسية، متناظرة، متعدية، غير انعكاسية، تخالفية. ثم جد R_1^{-1} و R_2^{-1}.

<u>مبرهنة:</u> لتكن R علاقة على المجموعة A فأن:

علاقة تخالفية (ضد متناظرة) اذا وفقط اذا $R \cap R^{-1} \subset I_A$

6- علاقة التكافؤ: Equivalence relation

لتكن R علاقة على المجموعة A ، يقال ان R علاقة تكافؤ على A اذا حققت:

- R علاقة انعكاسية أي $\forall\ a \in A\ \rightarrow\ (a , a) \in R$
- R علاقة متناظرة أي $\forall\ (a , b) \in A\times A\ ,\ (a , b) \in R \rightarrow (b , a) \in R$
- R علاقة متعدية أي $\forall\ a, b, c \in A\ , [\ (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$

<u>مثال:</u> لتكن كل من $R_1(=)$ و $R_2(<)$ علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية كالاتي:

$$R_1 = \{(x,y) / (x,y) \in |R\times|R\ \ \wedge\ \ x = y\ \}$$
$$R_2 = \{(x,y) / (x,y) \in |R\times|R\ \ \wedge\ \ x < y\ \}$$

فأن R_1 تمثل علاقة تكافؤ على A بينما R_2 ليست علاقة تكافؤ لانها ليست انعكاسية وغير متناظرة.

مبرهنة: اذا كانت كل من R_1 و R_2 علاقة تكافؤ على المجموعة A فأن:

1. $R_1 \cap R_2$ تكون علاقة تكافؤ على المجموعة A ايضاً.
2. $R_1 \circ R_1 = R_1$

(يعطى مثال توضيحي على ذلك)

علاقات التكافؤ والقسمة (التجزئة) Equivalence relation and portions

لتكن R علاقة تكافؤ على المجموعة A ، وكان $a \in A$ وليكن [a] او A_a رمزاً يمثل مجموعة العناصر المرتبطة بالعنصر a وفق العلاقة R. (ويسمى الرمز [a] او A_a بمجموعة الصف المكافئ للعنصر a (Equivalent class). ويعرف رياضياً كالاتي:

$$A_a = [a] = \{ x : x \in A , \quad (a , x) \in R \}$$

a ممثل لصف التكافؤ [a].

مثال: لتكن $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ولتكن R معرفة على A كالاتي:

$R = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,3), (3,1), (1,5), (5,5), (5,1), (6,6), (5,3), (3,5), (6,2), (2,6) \}$

ان العلاقة R هي علاقة تكافؤ. (لماذا...)

اما صفوف التكافؤ وفق العلاقة R على المجموعة A فهي:

$[1] = A_1 = \{ 1, 3, 5 \}$
$[2] = A_2 = \{ 2, 6 \}$
$[3] = A_3 = \{ 3, 1, 5 \}$
$[4] = A_4 = \{ 4 \}$
$[5] = A_5 = \{ 5, 1, 3 \}$
$[6] = A_6 = \{ 6, 2 \}$

- يلاحظ من المثال اعلاه ان المجموعات $\{1, 3, 5\} = \{3, 1, 5\} = \{5, 1, 3\}$ وعليه فأن صفوف التكافؤ المقابلة لها تكون متساوية ايضاً أي $[1] = [3] = [5]$.
- يلاحظ من المثال اعلاه ان المجموعات $\{2, 6\} = \{6, 2\}$ وعليه فأن صفوف التكافؤ المقابلة لها تكون متساوية ايضاً أي $[2] = [6]$.
- على الاقل مجموعة صف التكافؤ تضم عنصراً واحداً فيها الا وهو العنصر الذي يمثل صف التكافؤ. (أي صف التكافؤ لا يكون مجموعة خالية)

ان مجموعة الصفوف المكافئة لـ A يرمز لها بالرمز R / A وتدعى بقسمة A على R (مجموعة القسمة) quotient relation أي

$$\{ A_a \}_{a\in A} = A / R = \{ [a] / \quad \forall \; a \in A \}$$

وحسب المثال اعلاه فأن

$$A / R = \{ [1] , [2] , [4] \}$$

مبرهنة: لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة غير خالية مثل A ولتكن (A/R مجموعة القسمة للمجموعة A وفق العلاقة R فأن A/R تمثل تجزئة للمجموعة A) اذا حققت:

1. $\bigcup_{a\in A} A_a = A$
2. $[a] \cap [b] = \varnothing \qquad \forall\, [a] , [b] \in \{A_a\}$
3. $[a] \neq \varnothing \qquad \forall\, a \in A$

مثال: لتكن R علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية N كالاتي:

$R = \{ (x,y) / (x,y) \in N\times N ,$ 3 يقبل القسمة على $x - y \}$

جد N / R ان وجدت.

7- علاقة الترتيب الجزئي: Partial order relation

لتكن R علاقة على المجموعة A ، يقال ان R علاقة ترتيب جزئي على A اذا حققت:

- R علاقة انعكاسية
- R علاقة ضد متناظرة
- Rعلاقة متعدية

مثال:

$R = \{ (x,y) / (x,y) \in Z\times Z ,$ 3 يقبل القسمة على $x - y \}$

$L = \{ (x,y) / (x,y) \in Z\times Z , \; x \leq y \}$

مثال 1: لتكن $A=[1,2,3,4]$ ولتكن

$R_1=\{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3),(4,4)\}$

$R_2=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$R_3=\{(1,3),(2,1)\}$

$R_4=\phi$

$R_5=A\times A$ حاصل الضرب الديكارتي

<u>العلاقة الانعكاسية:</u>

R_2,R_5 انعكاسية باقي العلاقات غير انعكاسية

<u>العلاقة المتناظرة :</u>

R_1 ليست متناظرة وذلك $(2,1)\notin R_1$ $(1,2)\in R_1$

R_3 ليست متناظرة وذلك $(3,1)\notin R_3$ $(1,3)\in R_3$

R_2,R_4,R_5 متناظرة

<u>العلاقة التخالفية:</u>

R_1,R_3,R_4 تخالفية

$R_2,(1.2)\in R,(2,1)\in R \quad 2\neq 1$ ليست تخالفية

R_5 ليست تخالفية

- <u>العلاقة</u> $R=\{(1,3),(3,1),(2,3)\}$ ليست متناظرة وذلك $(3,2)\notin R$ $(2,3)\in R$ وليست تخالفية وذلك $(1.3)\in R,(3,1)\in R \quad 3\neq 1$

- <u>العلاقة</u> $R=\{(1,1),(2,2)\}$ متناظرة وتخالفية

<u>العلاقة المتعدية:</u>

R_3 ليست متعدية وذلك $(1,3)\in R_3\ but\ (2,3)\notin R_3$ $(2,1)\in R_3$ مهم جدا

R_1,R_2,R_4,R_5 متعدية

مثال 2:

R_1 علاقة اصغر او يساوي على Z

R_2 علاقة احتواء بين المجموعات $A \subseteq C$

R_3 علاقة تعامد ضمن مجموعة مستقيمات في المستوي $\perp$

R_4 علاقة توازي ضمن مجموعة مستقيمات في المستوي $\parallel$

$R_5\{(x,y): x,y \in N, \exists \ z \in N, xz = y\}$

العلاقة الانعكاسية:

R_1, R_2, R_5 انعكاسية

R_3, R_4 علاقات غير انعكاسية وذلك لأنه لا يوجد مستقيم متعامد مع نفسه ولا يوجد مستقيم موازي لنفسه

العلاقة المتناظرة :

R_3, R_4 علاقات متناظرة لأنه اذا كان $a \perp b$ فانه $b \perp a$ كذلك التوازي

R_1, R_2, R_5 ليست متناظرة $3 \le 4 but 4 \le 3$ $[1,2] \subseteq [1,2,3]$ but $[1,2,3] \not\subset [1,2]$ $2*3=6$ but $6*3 \neq 2$

العلاقة التخالفية:

R_1, R_2, R_5 تخالفية

$R_3 R_4$ ليست تخالفية

العلاقة المتعدية:

R_1, R_2, R_5 متعدية

R_1 $a \le b, b \le c \to a \le c$

R_2 $A \subseteq, \mathrm{B} \subseteq C \to A \subseteq C$

R_5 $az = b, by = c \to ax = c$

R_3 ليست متعدية وذلك $b \perp a$ $c \perp b$ لكن a ليس متعامد مع c

R_4 ليست متعدية وذلك $b \parallel a$ و $a \parallel b$ لكن a لا يوازي a

الدوال : Functions (Mapping)

لتكن F علاقة من المجموعة غير الخالية A الى المجموعة B.

يقال ان F دالة (او تطبيق) من A الى B، اذا اقترن كل عنصر في A مع عنصر وحيد في B. ويعبر عن الدالة F بالرموز كالاتي: $F: A \to B$ او $A \xrightarrow{f} B$

- تكون العلاقة F دالة اذا وفقط اذا تحقق الشرطان:

1) $\forall a \in A \;,\; \exists b \in B \;,\; (a , b) \in f$
2) $\text{if } (a , b_1) \in f \;,\; (a , b_2) \in f \;\text{ then }\; b_1 = b_2$

- تدعى المجموعة A بمنطلق (مجال) الدالة f. $\text{dom } f = D_f = A$
- تدعى المجموعة B بمستقر الدالة f. ويرمز لها بالرمز $\text{Cod } f$.
- تـدعى مجموعـة العناصـر الموجـودة فـي B والتـي تمثـل صـوراً (Image) لعناصـر A بمـدى الدالـة f ويرمز لها بالرمز $\text{ran } f$ او $f(A)$ أي:

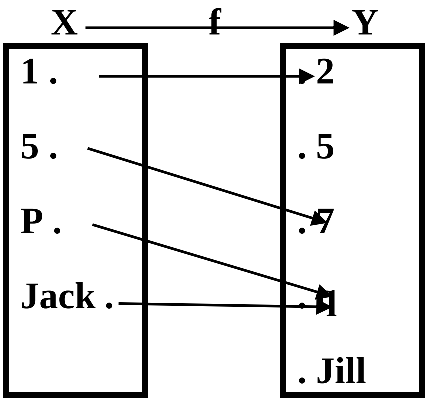
$$\text{ran } f = R_f = f(A) = \{ b / b \in B , \exists a \in A \;,\; b = f(a) \}$$

- المدى مجموعة جزئية من مستقر الدالة f. أي $\text{ran } f \subset B$

بيان الدالة: Graph of the function

لتكن f دالة من A الى B أي $f: A \to B$. فان بيان الدالـة f هو مجموعة الأزواج المرتبـة $(a , f(a))$ لكل $a \in A$ ، أي ان بيان الدالة f هو $f = \{ (a , f(a)) / \forall a \in A \;,\; a \to f(a) \}$

مثال: لتكن $Y = \{2, 5, 7, q, Jill\}$, $X = \{1, 5, p, jack\}$ وكانت f علاقة من X الى Y كالاتي: $f = \{(1,2) , (5,7) , (p,q) , (Jack,q)\}$. اذا كانت f تمثل دالة، جد المنطلق والمستقر والمدى مع التوضيح من خلال الرسم.



f تمثل دالة لان $\forall a \in X \;,\; \exists b \in Y \;,\; (a , b) \in f$ (1

2) $\text{if } (a , b_1) \in f \;,\; (a , b_2) \in f \;\text{ then }\; b_1 = b_2$

$D_f = \text{dom } f = X$
$\text{Cod } f = Y$
$R_f = \text{ran } f = \{2 , 7 , q\}$

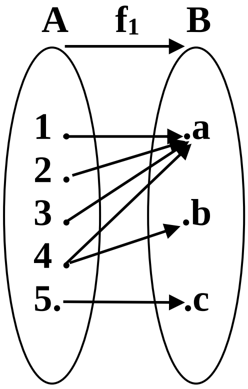
حيث:

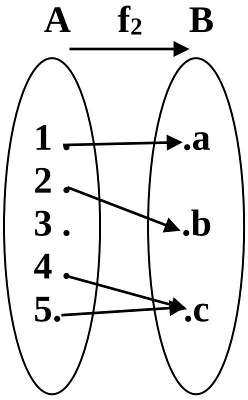
$f(1) = 2 \;,\; f(5) = 7 \;,\; f(p) = q \;,\; f(Jack) = q$

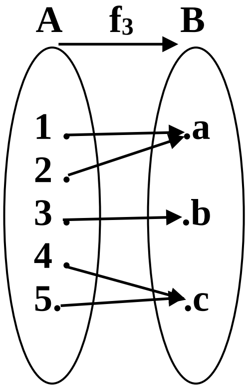
ملاحظة: في كثير من الاحيان يعبر عن الدالة من خلال صيغة رياضية او تعبير رياضي. في هذه الحالة يكون منطلق الدالة مجموعة الاعداد الحقيقية. فمثلاً $f : |R \to |R$ حيث $\forall x \in |R, f(x) = x^2 + 1$

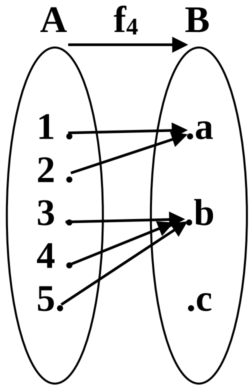
فيسمى x بالمتغير المستقل (Independent variable) للدالة ولو فرضنا $y = f(x)$ لقيل ان y هي المتغير المتعمد (Dependent variable) للدالة f.

مثال: لتكن $B = \{a, b, c\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ولتكن كل من f_1, f_2, f_3, f_4 علاقة من A الى B ممثلة بالمخططات السهمية. بين أي من هذه العلاقات تمثل دالة وايها لا ولماذا؟





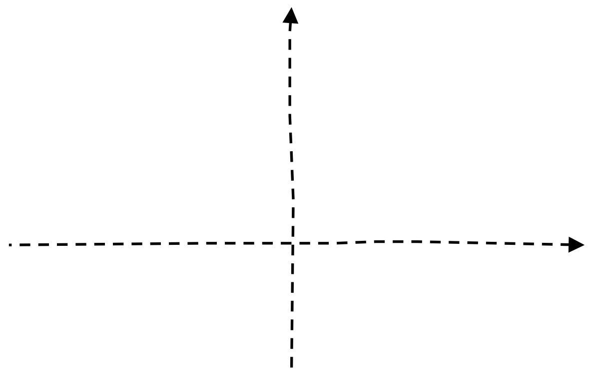




مثال: ارسم الدالة $f : |R \to |R$ حيث $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

بما ان R هي مجموعة غير منتهية لذا فأنه من المستحيل رسم جميع نقاطها، يمكن رسم هذه الدالة وذلك باختيار بعض النقاط ووصلها بخط وكما يلي:

المتغير المستقل	المتغير المعتمد
x	$y = f(x) = x^2 - 2x - 3$
-2	= 4 + 4 – 3 = 5
-1	= 1 + 2 – 3 = 0
0	= 0 + 0 – 3 = - 3
1	= 1 – 2 – 3 = - 4
2	= 4 - 4 – 3 = -3
3	= 9 – 6 – 3 = 0



نماذج من الدوال:

1- الدالة الثابتة Constant Function:

اذا كانت $f : A \rightarrow B$ دالة يقال أن f دالة ثابتة اذا وجد عنصر واحد في B يمثل صورة لكل عنصر موجود في A. بالرموز:

$\forall x \in A , \ f(x) = c$

او الدالة تكون ثابتة اذا كان مداها مجموعة احادية

$ran\ f = f(A) = \{ c \}$

حيث c عنصر معين في B.

يعطى مثال......

2- الدالة الذاتية Identity Function:

اذا كانت $f : A \rightarrow B$ دالة يقال أن f دالة ذاتية اذا كان $\forall x \in A , \ f(x) = x$

- ويرمز لها بالرمز I_A اذا كانت $f : A \rightarrow A$ أي $I_A : A \rightarrow A$ فأن $\forall x \in A , \ I_A(x) = x$

يعطى مثال......

3- الدالة العكسية Inverse Function:

اذا كانت $f : A \rightarrow B$ دالة فاذا كانت $f^{-1} : B \rightarrow A$ تحقق شروط الدالة فأن f^{-1} هي دالة عكسية للدالة f وبالعكس. (أي لا يوجد لكل دالة دالة عكسية الا اذا حققت شروط الدالة).

يعطى مثال......

4- الدالة المتباينة Injection Function:

اذا كانت $f : A \rightarrow B$ دالة. يقال بأن f دالة متباينة اذا كان لكل عنصر من مستقرها هو صورة لعنصر واحد على الاكثر من منطلقها. (أي لا يوجد عنصران مختلفان في المنطلق يرتبطان بعنصر واحد في المستقر).

- $(\forall a_1 , a_2 \in A) , \ f(a_1) = f(a_2) \ \rightarrow \ a_1 = a_2$
- $(\forall a_1 , a_2 \in A) , \ a_1 \neq a_2 \ \rightarrow \ f(a_1) \neq f(a_2)$

وتسمى بدالة **One to one function**.

5- الدالة الشاملة Surjection Function:

اذا كانت $f : A \rightarrow B$ دالة. يقال بأن f دالة شاملة اذا كان كل عنصر من مستقرها هو صورة لعنصر واحد على الاقل من منطلقها، وتسمى بدالة **On_to function**.

- $\forall b \in B \ , \exists a \in A \ , \ b = f(a)$

أي

- $ran\ f = f(A) = B$

6- الدالة المتقابلة:

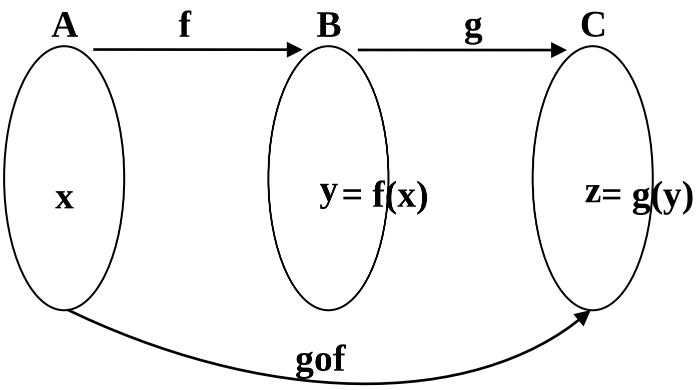
اذا كانت $f : A \to B$ دالة. يقال بأن f دالة متقابلة اذا كانت دالة متباينة وشاملة في آن واحد.

<u>مثال:</u> أي من الدوال الاتية متباينة، شاملة، تقابل.

1) $f : N \to N \;,\; \forall x \in N \;,\; f(x) = x^2$
2) $g : |R \to |R \;,\; \forall x \in |R \;,\; g(x) = x^3$
3) $f : |R \to |R \;,\; \forall x \in |R \;,\; f(x) = 5x - 6$
4) Let $A = \{a, b, c, d\} \;,\; B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   Let $h_1 = \{(b,5) , (a,2) ,(c,4) , (d,3)\} \;,\; h_2 = \{(a,2) , (b,1) , (c,2) , (d,3)\}$
5) Let $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\ldots\} \;,\; B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\ldots\}$
   Let $f_1 = \{ (a,b)/ (a,b) \in A\times B \;,\; b = 2a \} \;,\; f_2 = \{(a,b)/ (a,b) \in A\times B \;,\; b = a + 1 \}$

الدالة المركبة Composition Function:

لتكن $f : A \to B$ دالة و $g : B \to C$ دالـة. فأن gof (تقرأ f تركيب g) تكون دالـة من المجموعة A الى المجموعة C. أي $gof : A \to C$



أي $\forall x \in A \;,\; (gof)(x) = g(f(x))$

- يمكن تعميم ذلك لاكثر من دالتين فمثلاً لدينا الدوال f, g, h فأنه يمكن الحصول الدوال المركبة ho(gof) و (hog)of وهما متساويتان.

مثال: لتكن $f: N \to N , \forall x \in N , f(x) = 6x^2$ دالة و $g: N \to N , \forall x \in N , g(x) = 4x + 3$ دالة.
جد fog , gof .

مثال: ليكن لدينا كل من الدوال f, g, h معرف بالشكل الاتـي:

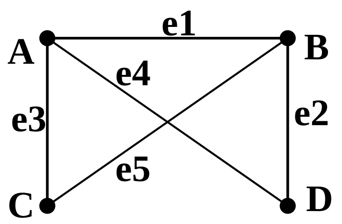
$f: N \rightarrow N \ , \forall x \in N , f(x) = 3x$
$g: N \rightarrow N \ , \forall x \in N , g(x) = 2x^2$
$h: N \rightarrow N \ , \forall x \in N , h(x) = 5x$

جد ......

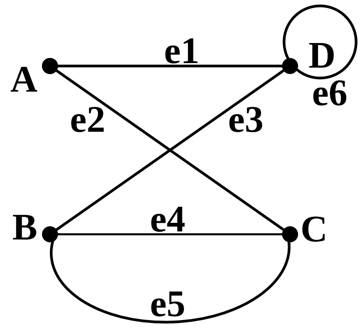
المخططات Graphs:

يمكن ان نمثل أي مخطط بزوج مرتب $G = (V,E)$ حيث ان V تمثل مجموعة نقاط او رؤوس المخطط (Vertices)، اما E فتمثل مجموعة الخطوط الواصلة بين رؤوس المخطط (Edges) (حافات)، وان كل حافة تربط بين نقطتين او رأسين من رؤوس المخطط.

مثال:



G1: مخطط



G2: مخطط مضاعف (متعدد)

V = {A, B, C, D}
E = {e1, e2, e3, e4, e5}
e1 = {A, B}
e2 = {B, D}
e3 = {A, C}
e4 = {A, D}
e5 = {C, B}

V = {A, B, C, D}
E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6}
e1 = {A, D}
e2 = {A, C}
e3 = {B, D}
e4 = {B, C}
e5 = {B, C}
e6 = {D, D}

- في المخطط G2 تدعى الحافة e4, e5 حافة مضاعفة.
- **الدائرة Loop**: هي حافة في المخطط تربط أي رأس مع نفسه.
  مثل الحافة e6 في الخطط G2.
- يقال لأي بيان او مخطط بأنه منته اذا احتوى على عدد منته من الرؤوس والحافات.
- ان المخطط الذي يحوي على رأس وحيد ولا يحتوي على اي حافة يسمى بالمخطط البسيط او التافه (Trivial graph).
- **النقاط المعزولة:** هي النقاط التي لا ترتبط بأي نقطة من نقاط المخطط المعطى.

- يقال لأي نقطتين في مخطط بأنهما متجاورتان اذا كانت هناك حافة تربط بينهما.

- **درجة اي رأس (اي نقطة) في اي مخطط:**

هي عدد الحافات الواقعة على الرأس نفسه ويرمز لها بالرمز (الرأس)deg.

- ان مجموع درجات رؤوس أي مخطط يساوي ضعف عدد حافات ذلك المخطط.

مثال: في المخطط G1 المعطى في المثال السابق فأن:

deg(A) = 3
deg(B) = 3
deg(C) = 2
deg(D) = 2

Total degree = 10 مجموع الدرجات

بينما عدد الحافات الموجودة في المخطط هي (5).

أي ان مجموع درجات أي مخطط هي ضعف عدد حافاته وهو عدد زوجي دائما. لماذا؟؟؟؟

- يطلق على اي رأس من رؤوس المخطط تسمية فردي او زوجي وفقاً لدرجة ذلك الرأس، حيث A : (odd) , C: (even)

- اذا احتوى المخطط على Loop فعند تحديد او حساب مجموع درجات ذلك الرأس فيتم حساب الدائرة مرتين.

الممر Walk:

هو سلسلة متتابعة من الرؤوس والحافات في مخطط ما: $(V_o, e_1, V_1, e_2, V_2, \ldots, e_n, V_n)$

حيث:

V_o : رأس البداية Initial vertex، V_1 : رأس النهاية Terminal vertex

و e_i هي الحافة التي تربط بين الرأسين V_i , V_{i-1} . $(e_i = V_{i-1} V_i)$

وهناك عدة انواع من الممرات...

- **الخط Trail** : هو الممر الذي تكون جميع حافاته مختلفة.

- **المسار البسيط Simple Path** : هو الممر الذي تكون جميع رؤوسه مختلفة ويدعى ايضاً بالمسار الاولي.

عليه كل مسار بسيط هو خط. وهناك **نوعان من المسارات:**

- **المسار المباشر** : هو الخط المباشر الواصل بين نقطتين متجاورتين في مخطط معين.

♦ **المسار غير مباشر:** وهو تتابع من المسارات المباشرة، مثل V_1, V_2, V_3 حيث V_1 تسمى نقطة الانطلاق و V_3 مستقر المسار غير مباشر.

♦ **المسار المركب Compound path:** هو المسار الذي يوجد فيه تكرار لبعض المستقيمات المكونة له.

♦ **المسار الدائري :** هو الذي تكون جميع رؤوسه مختلفة ما عدا $V_o = V_1$ ، أي تتطابق فيه نقطة البداية والنهاية.

طول المسار Length Path:

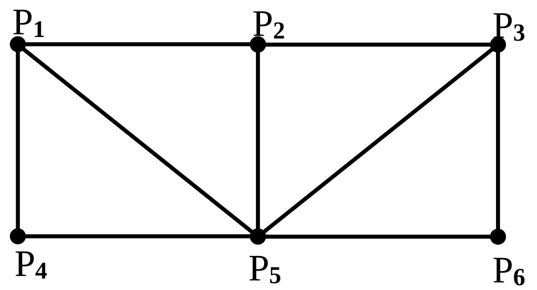
هو مجموع عدد الحافات المتتابعة في المسار (أي عدد المسارات المباشرة المكونة له).

♦ المسار الدائري يجب ان يكون بطول اكبر او يساوي ثلاثة مسارات مباشرة مكونة له (او ثلاثة حافات).

مثال: من المخطط المعطى في الشكل هل التتابعات التالية تمثل ممر، خط، مسار.

حيث P_4 تمثل نقطة الانطلاق

P_6 تمثل نقطة النهاية

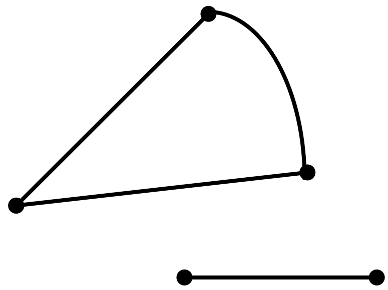


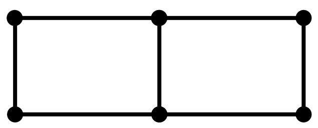
1) التتابع $(P_4 , P_1 , P_2 , P_5 , P_1 , P_2 , P_3 , P_6)$
2) التتابع $(P_4 , P_1 , P_5 , P_2 , P_3)$
3) التتابع $(P_4 , P_1 , P_5 , P_2 , P_3 , P_5 , P_6)$
4) التتابع $(P_4 , P_1 , P_5 , P_3 , P_6)$

مبرهنة يوجد **ممر من الرأس U الى الرأس V اذا وفقط اذا كان هناك مساراً من U الى V.**

♦ **المخطط المرتبط Connected Graph:** هو المخطط الذي يوجد فيه مسار (مباشر او غير مباشر) بين كل نقطتين من نقاطه.

مثال:

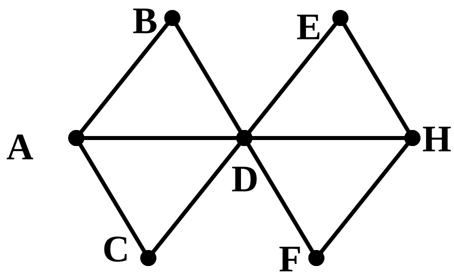




- **المسافة Distance:** المسافة بين الرأسين U و V في المخطط المرتبط G، يرمز لها بالرمز d(u, v) هي طول اقصر مسار بين النقطتين U و V.

- **قطر المخطط المرتبط Diameter:** هو اطول مسافة بين أي رأسين من رؤوسه. فمثلاً الرأسين U و V فان قطر المخطط بينهما يرمز له بالرمز diam(u, v)

مثال:



d(A , F) = 2

المسار هو AD , DF

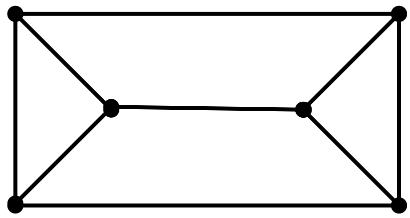
daim(A , F) = 5

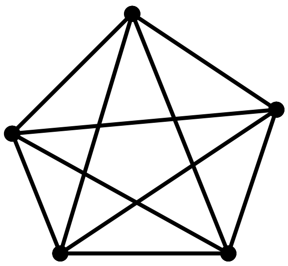
المسار هو AB , BD , DE , EH , HF

او المسار AC , CD , DE , EH , HF

- **المخطط التام Complete Graph:** هو المخطط الذي يرتبط كل رأس فيه مع جميع الرؤوس الاخرى.
- **المخطط المنتظم Regular Graph:** هو المخطط الذي تكون درجات رؤوسه متساوية.

مثال:





المخططات والمصفوفات:

ان المخططات يمكن ان تُمثل بأستخدام المصفوفات والتي هي على ثلاثة انواع:

1- مصفوفة المتجاورات Adjacency Matrix:

وهي مصفوفة مربعة درجتها n حيث ان n تمثل عدد رؤوس المخطط، ويمكن ان نحسب قيمة العنصر a_{ij} الموجود في الصف i والعمود j كما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \text{if } (V_i , V_j) \text{ اذا وجد خط مباشر بين} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

2- مصفوفة الوقوع Incidence Matrix:

وهي المصفوفة التي تتكون من n من الصفوف التي تمثل رؤوس المخطط و m من الاعمدة التي تمثل حواف المخطط وتحسب قيمة كل عنصر m_{ij} كما يلي:

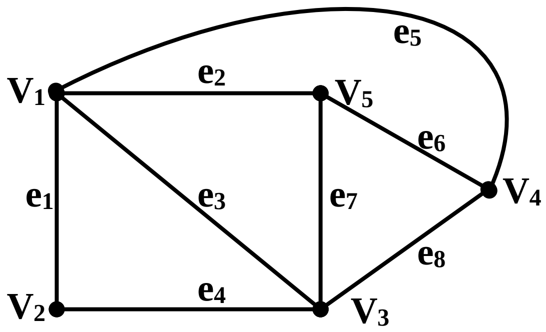
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \text{ اذا كان الرأس } V_i \text{ واقعاً على الحافة } e_j \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

3- مصفوفة الحافات Edges Matrix:

وهي مصفوفة تتكون من عمودين الاول يمثل رأس البداية للحافة والثاني يمثل رأس النهاية للحافة ذاتها.

<u>مثال:</u>

من المخطط المجاور، جد مصفوفة المتجاورات والوقوع والحافات.



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مصفوفة المتجاورات

مصفوفة الوقوع

$$\begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مصفوفة الحافات

$$\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_1 & V_3 \\ V_1 & V_4 \\ V_1 & V_5 \\ V_2 & V_3 \\ V_3 & V_4 \\ V_3 & V_5 \\ V_4 & V_5 \end{bmatrix}$$

المخطط الموجه (digraph) Directed Graph

هو المخطط الذي تكون جميع الخطوط الواصلة بين نقاطه (رؤوسه) خطوطاً متجهة (directed lines)

المخطط المعنون Labeled Graph

هو المخطط الذي توجد مسميات او عناوين او قيم عددية على كل مستقيم او حافة من حافاته وتكون دائماً هذه المخططات متجهة.

- **درجة الرأس الداخل in degree** : هي عدد الحافات التي يكون فيها الرأس V هو نقطة نهاية ويرمز لها بالرمز $d^{-}(V)$. أي انها عدد المستقيمات الداخلة للرأس V.
- **درجة الرأس الخارج out degree** : وهي عدد الحافات التي يكون فيها الرأس V هو نقطة بداية ويرمز لها بالرمز $d^{+}(V)$. أي هي عدد المستقيمات المتجهة الخارجة من الرأس V.
- **درجة الرأس الكلية Total degree**: هي مجموع الحافات الداخلة والخارجة للرأس V ويرمز لها بالرمز $d(V)$ أي ان $d(V) = d^{+}(V) + d^{-}(V)$

- ان الرأس الذي تكون فيه (in degree = 0) يطلق عليه مصدر او منبع Source (مدخل المخطط).
- ان الرأس الذي يكون فيه (out degree = 0) يطلق عليه المُصرف Sink (مخرج المخطط).
- ان الممرات بأنواعها Cyclic , Path , Trial هي نفسها المعرفة في المخطط غير موجه مع مراعاة الاتجاهات.

- **المخطط البسيط:** هو المخطط الذي لا يوجد بين كل زوج من نقاطه اكثر من مستقيم واحد.
- **المخطط الفارغ:** هو المخطط الذي تكون جميع نقاطه معزولة.
- **المخطط المختلط:** هو المخطط الذي يكون قسماً من الخطوط الواصلة بين نقاطه خطوطاً متجهة بينما يكون القسم الاخر من الخطوط غير متجهة.

خوارزمية ايجاد اقصر مسار بين نقطتين U , W

Pruning Algorithm for Minimal Path

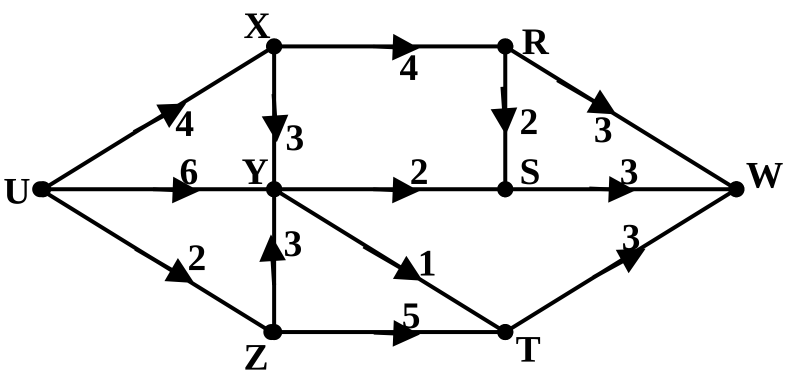
يتم في هذه الطريقة ايجاد اقصر مسار من النقطة U الى النقطة W في المخطط، فأذا وجد مساران جزئيان يقودان الى نقطة وسطية فأننا نختار المسار الاقصر ونهمل المسار الاخر. حيث في كل مرة يتم حساب ما يلي:

طول المسار من U الى V	$L(U)$
يتم ذكر المسار من U الى V	$P(V)$
هو مسار ثاني المسار من U الى V	$L(V^-)$

فأذا كانت $L(V^-) > L(V)$ فيتم تبديل $L(V)$ بـ $L(V^-)$

مثال:

جد اقصر مسار بين النقطتين U , W



الحل:

1- From U

P(X) = UX , L(X) = 4

~~P(Y) = UY , L(Y) = 6~~

P(Z) = UZ , L(Z) = 2

2- From X

P(R) = UXR , L(R) = 4 + 4 = 8

~~P(Y) = UXY , L(Y) = 4 + 3 = 7 > 6 تهمل~~

3- From Z

P(Y) = UZY , L(Y) = 2 + 3 = 5 < 6 تبدل مع القيمة الاخيرة لانها اقل منها

~~P(T) = UZT , L(T) = 2 + 5 = 7~~

4- From Y

P(S) = UZYS , L(S) = 5 + 2 = 7

P(T) = UZYT , L(T) = 5 + 1 = 6 < 7 تبدل مع القيمة الاخيرة لانها اقل منها

5- From R

~~P(W) = UXRW , L(W) = 8 + 3 = 11~~

~~P(S) = UXRS , L(S) = 8 + 2 = 10 > 7 تهمل~~

6- From S

~~P(W) = UZYSW , L(W) = 7 + 3 = 10 <11 تبدل مع اخر قيمة~~

7- From T

P(W) = UZYTW , L(W) = 6 +3 = 9 <10 تبدل مع اخر قيمة

اذن اقصر مسار (مسافة) من U الى W هي 9 والناتجة من المسار UZYTW

الآلآت Machines

يمكن اعتبار الحاسب الرقمي آلة في حالة داخلية معينة في أي لحظة معينة، فالحاسب يقرأ رمزاً معيناً داخلاً ثم يطبع رمزاً خارجاً، ويغير حالته.

ويعتمد الرمز الخارج على الرمز الداخل والحالة الداخلية للآلة، اما الحالة الداخلية للآلة فتعتمد فقط على الحالة السابقة للآلة والرمز الداخل السابق.

ويفترض ان يكون عدد الحالات والرموز الداخلة والرموز الخارجة محدوداً.

ويمكن تعريف الآلة رياضياً كما يلي:

الآلة ذات الحالات المحددة Finite States Machine

وهي تتألف من خمسة اشياء متمايزة:

1- مجموعة منتهية (A) تخص الرموز الداخلة (Input Symbols).

2- مجموعة منتهية (S) تخص الحالات الداخلة (Internal States).

3- مجموعة منتهية (Z) تخص الرموز الخارجة (Output Symbols).

4- دالة الحالة مثل (F) حيث $F : S \times A \rightarrow S$

5- دالة الاخراج مثل (G) حيث $G : S \times A \rightarrow Z$

فأذا رمزنا للآلة بالرمز (M) فأن (M) تتكون من الخماسي المرتب التالي:

$M = (A , S , Z , f , g)$

واحياناً تعطى حالة ابتدائية لاغراض التشغيل من (q_o) من المجموعة S وبذلك تصبح الآلة M معرفة بالسداسي المرتب: $M = (A , S , Z , q_o , f , g)$

<u>مثال:</u>

نفرض ان لدينا الآلة $M = (A, S, Z, \mathbf{q_2}, f, g)$ معرفة حسب الجدول المجاور، جد:

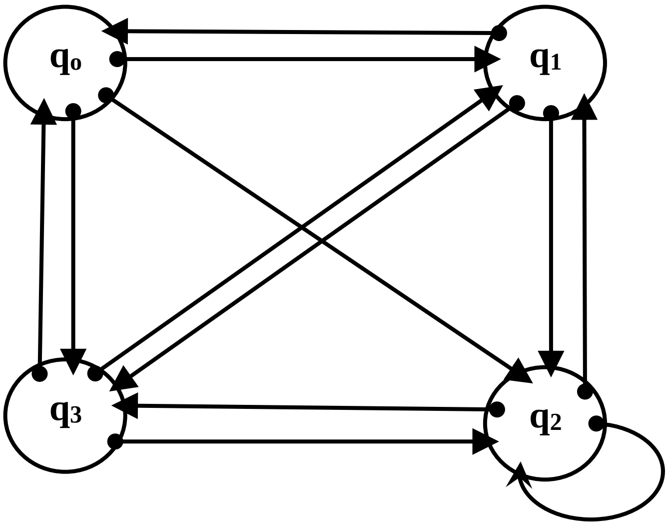
1- ارسم مخطط الآلة.

2- جد سلسلة الاخراج وسلسلة الحالة لسلسة الادخال abcaabccbba.

A / S	a		b		c	
	f	g	f	g	f	g
q_o	q_1	x	q_3	z	q_2	X
q_1	q_2	y	q_o	w	q_3	y
q_2	q_3	z	q_1	y	q_2	w
q_3	q_o	w	q_2	x	q_1	z

حيث $A = \{a , b , c\}$ تمثل رموز الادخال والمجموعة $S = \{q_o , q_1 , q_2 , q_3\}$ تمثل حالات الادخال والمجموعة $Z = \{x , y , z , w\}$ تمثل رموز الاخراج والدالة f تمثل دالة الحالة والدالة g تمثل دالة الاخراج.

الحل:



حل المطلب الثاني وحسب سلسلة الادخال، حيث حالة الانطلاق تبدأ من q_2 حسب ما موجود في M

$$q_2a \xrightarrow{z} q_3b \xrightarrow{x} q_2c \xrightarrow{w} q_2a \xrightarrow{z} q_3a \xrightarrow{w} q_ob \xrightarrow{z} q_3c \xrightarrow{z} q_1c \xrightarrow{y} q_3b \xrightarrow{x} q_2b \xrightarrow{y} q_1a \xrightarrow{y} q_2$$

اذن سلسلة الاخراج هي **z x w z w z z y x y y**

و سلسلة الحالة هي $q_2\ q_3\ q_2\ q_2\ q_3\ q_o\ q_3\ q_1\ q_3\ q_2\ q_1\ q_2$

الآلآت المحددة Finite Automata:

وتعرف هذه الآلة رياضياً بالخماسي $(M = (A , S , T , q_x , f$ **حيث:**

1– مجموعة منتهية (A) تخص الرموز الداخلة (Input Symbols).

2– مجموعة منتهية (S) تخص الحالات الداخلة (Internal States).

3– مجموعة منتهية (T) تمثل مجموعة جزئية من S وتمثل حالات القبول (Accepting State).

4– q_x تمثل الحالة الابتدائية من S (نقطة الانطلاق للآلة M).

5– دالة الحالة مثل (F) حيث $F : S \times A \rightarrow S$.

مثال:

نفرض ان لدينا الآلة المحددة $M = (A, S, T, q_3 , f)$

معرفة حسب الجدول المجاور، جد:

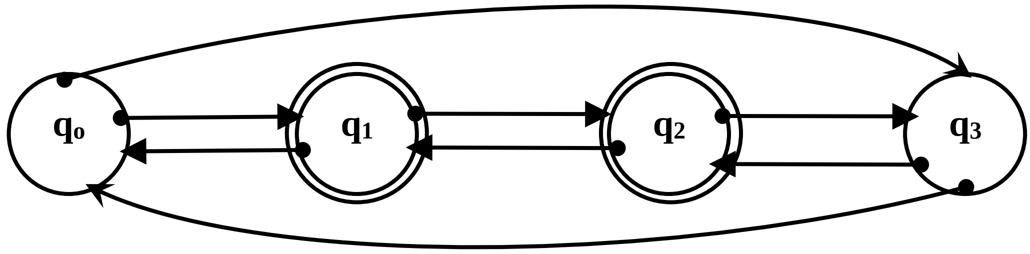
3– ارسم مخطط الآلة.

4– بين هل سلسلة الادخال aabbababaab مقبولة ام لا.

A / S	a	b
	f	f
q_o	q_1	q_3
q_1	q_2	q_o
q_2	q_3	q_1
q_3	q_o	q_2

علماً ان $A = \{a, b\}$ تمثل رموز الادخال و $S = \{q_o, q_1, q_2, q_3\}$ تمثل حالات الدخول و $T = \{q_1, q_2\}$ تمثل حالات القبول و q_3 نقطة الانطلاق و f دالة الحالة.

الحل:



حل المطلب الثاني وحسب سلسلة الادخال، حيث حالة الانطلاق تبدأ من q_3 حسب ما موجود في M

$$\mathbf{q_3a \rightarrow q_oa \rightarrow q_1b \rightarrow q_ob \rightarrow q_3a \rightarrow q_ob \rightarrow q_3a \rightarrow q_ob \rightarrow q_3a \rightarrow q_oa \rightarrow q_1b \rightarrow q_o}$$

وبما ان القيمة الناتجة q_o هي ليست ضمن حالات القبول $T = \{q_1 , q_2\}$.

اذن سلسلة الادخال غير مقبولة.