الجبر الخطي
مفردات المنهج للعام الدراسي 2020-2021

الفصل الاول: المصفوفات
المصفوفات والعمليات على المصفوفات/ الخواص الجبرية للمصفوفات.
مصفوفات خاصة.
معكوس المصفوفات.
منظومة المعادلات الخطية/ بعض الخواص لمنظومة المعادلات الخطية/ منظومة المعادلات الخطية المتجانسة.
استخدام طريقة الحذف كاوس لحل منظومة المعادلات الخطية.
استخدام طريقة الحذف كاوس-جوردن لحل منظومة المعادلات الخطية.

الفصل الثاني: المحددات
المحددات/ مقدمة في المحددات.
بعض خواص المحددات.
العامل المرافق.
تطبيقات العامل المرافق.
قاعدة كرامر.

الفصل الثالث: فضاء المتجهات
فضاء المتجهات/ مقدمة في فضاء المتجهات، خواص المتجهات، الضرب العددي، المعيار، المسافة.
الضرب الاتجاهي/ الفضاءات الجزئية.
التركيب الخطي/ الارتباط الخطي/ الاستقلال الخطي.
القاعدة والبعد.
فضاء السطور والاعمدة.

الفصل الرابع: التحويلات الخطية
التحويلات الخطية/ مقدمة في التحويلات الخطية.
النواة والمدى للتحويلات الخطية.
مصفوفة التحويلات الخطية.

المصادر:

1. الجبر الخطي، تاليف: يحيى عبد سعيد، د. نزار حمدون شكر.
2. Linear algebra, by K Hoffman and R Kunze, 2nd Ed. Prentice Hall, INC.
3. Introduction to linear algebra with applications, by Kolman.
4. Linear algebra, by Serge Lange.

الفصل الاول: المصفوفات والعمليات على المصفوفات (Matrices and Matrices Operations)

تعريف: المصفوفة ترتيب مستطيلي الشكل من اعداد حقيقية او معقدة. يطلق على هذه الاعداد في هذا الترتيب عناصر المصفوفة (Entries) وقد تكون عناصر المصفوفة مقادير غير عددية (متغيرات ، دوال).

ان المصفوفة A التي لها m من السطور و n من الاعمدة تكون بالشكل الاتي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

ويمكن كتابة المصفوفة A بعدة اشكال منها $A=[a_{ij}]$ و $A=(a_{ij})$. ويقال ان المصفوفة ذات سعة $m\times n$ حيث يعني الدليل السفلي الاول i في العنصر a_{ij} رقم السطر او الصف والدليل الثاني j رقم العمود الذي يقع فيهما ذلك العنصر.

امثلة متنوعة عن المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3},\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3},\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2},\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2},\begin{bmatrix} 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 3},\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

ملاحظة: ليس للمصفوفة قيمة عددية.

العمليات على المصفوفات:

1. **التساوي:** تكون المصفوفتان $A=[a_{ij}]\ ,\ B=[b_{ij}]$ متساويتان اذا كانت سعتاهما متساويتين وان $a_{ij}=b_{ij}$ لكل i,j. اي انهما ذات نفس السعة وان عناصرهما في جميع المواقع المتناظرة متساوية.

$$A=\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}\neq\ B=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$\mathrm{C}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}=\ D=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

2. **جمع مصفوفتين:** تمتثل اي مصفوفتين $A=[a_{ij}]\ ,\ B=[b_{ij}]$ لعملية الجمع اذا كانت سعتاهما متساويتين وتتم عملية الجمع كالاتي:

$$A+B=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]=\mathrm{C}$$

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2}\ ,\qquad B=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

3. **ضرب مصفوفة بعدد:** اذا كان k عددا وكانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة سعة $m\times n$ فان الضرب بالعدد k هو $kA=[ka_{ij}]$ مصفوفة سعة $m\times n$ ايضا. اي نضرب العدد k بكل عنصر من عناصر المصفوفة A.

$$-A=-1A=-1\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: تتم عملية طرح اي مصفوفتين بنفس طريقة عملية جمع مصفوفتين.

4. **ضرب مصفوفتين:** تمتثل المصفوفتان $A = [a_{ij}]$ سعة $m \times n$ و $B = [b_{ij}]$ سعة $p \times q$ لعملية الضرب AB اذا كان عدد اعمدة A مساويا لعدد اسطر B. اي ان $n = p$. ويكون ناتج الضرب هو المصفوفة C من السعة $m \times q$ كالاتي:

$$C = [c_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\right], i = 1, \dots, m \quad , \quad j = 1, \dots, q$$

واضح انه لايجاد اي عنصر c_{ij} من عناصر مصفوفة الضرب، نضرب عناصر السطر في الموقع i من المصفوفة A بعناصر العمود في الموقع j من المصفوفة B ثم نجمع المضروبات.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

بما ان عدد اعمدة A = عدد اسطر B. اذن

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{س}1 \times \text{ع}1 & \text{س}1 \times \text{ع}2 & \text{س}1 \times \text{ع}3 \\ \text{س}2 \times \text{ع}1 & \text{س}2 \times \text{ع}2 & \text{س}2 \times \text{ع}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \times 2 + 2 \times 3 & -1 \times 0 + 2 \times -1 & -1 \times 1 + 2 \times 0 \\ 3 \times 2 + 0 \times 3 & 3 \times 0 + 0 \times -1 & 3 \times 1 + 0 \times 0 \end{bmatrix} =$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

هل يمكن ايجاد BA؟ لماذا؟ **Check**

بعض الخواص الجبرية للمصفوفات:

مبرهنة: اذا كانت سعات المصفوفات A , B , C تلائم العمليات ازاءها فان الخواص الاتية على المصفوفات صحيحة.

أ. قانون التجميع الجمعي $A + (B + C) = (A + B) + C$

ب. قانون الابدال الجمعي $A + B = B + A$

ج. قانون التوزيع العددي $k(A + B) = kA + kB$ حيث k أي عدد

د. قانون التجميع الضربي $A(BC) = (AB)C$

ه. قانون التوزيع $A(B + C) = AB + AC$

لاثبات اي خاصية من هذه الخواص يجب ان نثبت:

1. سعة مصفوفة الطرف الايمن تساوي سعة مصفوفة الطرف الايسر.
2. ان العناصر في المواقع المتناظرة من مصفوفتي الطرفين تكون متساوية.

مثال: اذا علمت ان
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

حقق صحة قانون التجميع الضربي وقانون التوزيع.

قانون التجميع الضربي: $A(BC) = (AB)C$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -35 \\ 9 & 17 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 1 \\ 10 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -35 \\ 9 & 17 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

اذن المصفوفات A, B, C اعلاه تحقق قانون التجميع الضربي. اي ان $A(BC) = (AB)C$.

تحقيق قانون التوزيع؟ **Check**

مصفوفات خاصة Special Matrices

1. المصفوفة الصفرية Zero\Null matrix : هي المصفوفة التي يكون جميع عناصرها اصفار، وكذلك تسمى مصفوفة المحايد الجمعي. ويرمز له بالرمز 0. سعتها تؤخذ حسب سياق العمليات.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times2} \quad , \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{2\times3} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

2. المصفوفة المربعة Square matrix : هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الاسطر يساوي عدد الاعمدة. اي انه يقال للمصفوفة $A = (a_{ij})$ سعة $m \times n$ بانها مربعة ذات سعة n عندما يكون $m = n$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

ملاحظة: للمصفوفة المربعة A سعة $n \times n$ قطران، القطر الرئيسي والقطر الثانوي. القطر الرئيسي تكون عناصره

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ \cdots,\ a_{nn}$$

3. مصفوفة السطر Row matrix: هي مصفوفة ذات سعة $1 \times n$.

$$A = [-2 \quad 3 \quad 0 \quad 5 \quad -1]_{1\times5}$$

4. مصفوفة العمود Column matrix: هي مصفوفة ذات سعة $n \times 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{5\times1}$$

5. المصفوفة المثلثية العليا Upper triangular matrix: هي مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})$ سعة n تسمى مثلثية عليا اذا كانت جميع عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي اصفار. اي انه اذا كان $a_{ij} = 0$ لكل $i > j$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

6. المصفوفة المثلثية السفلى Lower triangular matrix: هي مصفوفة مربعة $A = (a_{ij})$ سعة n تسمى مثلثية سفلى اذا كانت جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي اصفار. اي انه اذا كان $a_{ij} = 0$ لكل $i < j$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & -1 & 0\\ -5 & -3 & 2\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

7. المصفوفة القطرية Diagonal matrix: هي مصفوفة مربعة $A=(a_{ij})$ سعة n اذا كانت عناصرها غير الصفرية هي فقط a_{ii} حيث $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ وبقية العناصر في تلك المصفوفة اصفار. اي ان $a_{ij}=0$ عندما $i\neq j$. وتكتب بالشكل $diag(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,a_{nn})$.

$$A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}_{4\times 4} \qquad or \qquad A=diag(5,\ -1,\ 2,\ -1)$$

8. المصفوفة القياسية Scalar matrix: هي مصفوفة قطرية $diag(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,a_{nn})$ ذات العناصر المتساوية.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}_{3\times 3} \quad =diag(4,\ 4,\ 4)$$

9. مصفوفة المحايد الضربي Identity matrix: هي مصفوفة قطرية قياسية $diag(1,\ 1,\ \cdots,1)$ ذات العناصر المساوية لواحد ويرمز لها بالرمز I_n حيث ان الدليل n يشير الى سعة المصفوفة المربعة. من خواصها

$$I_n^p=I_n\,.\,I_n\,.\,\cdots.\,I_n=I_n$$

$$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3\times 3} \quad =diag(1,\ 1,\ 1)$$

$$A\,.\,I_3=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ -5 & 1 & 6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ -5 & 1 & 6\end{bmatrix}$$

10. المصفوفتان المتبادلتان (قابلتان للابدال الضربي) Commutative for multiplication: اذا كانت $A,\ B$ مصفوفتين مربعتين بحيث ان $AB=BA$ فيقال انهما متبادلتان. اما اذا كانت $AB=-BA$ فيقال انهما متبادلتان عكسيا (Skew-Commutative).

$$AB=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 5 & -1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ -3 & -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 5 & -1\end{bmatrix}$$

واضح ان $AB=BA$ وعليه فان المصفوفتان $A,\ B$ متبادلتان.

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، هل ان االمصفوفتان $A,\ B$ متبادلتان؟ لماذا؟ **Check**

11. المصفوفة الدورية Periodic matrix: يقال للمصفوفة A بانها دورية اذا حققت العلاقة $A^{k+1} = A$ حيث ان k اصغر عدد صحيح موجب. ويقال بان دورة المصفوفة A هي k. اذا كان $k = 1$ أي ان $A^2 = A$ يقال بان المصفوفة Aمتساوية القوى او متحايدة (Idempotent matrix).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \qquad A^5 = A^4A = IA = A$$

اذن A مصفوفة دورية وان دورة A هي 4.

مثال: اذا كانت $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -2 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ جد k بحيث ان $B^{k+1} = B$؟ **Check**

12. المصفوفة معدومة القوى Nilpotent matrix: يقال للمصفوفة A بانها معدومة القوى اذا حققت العلاقة $A^p = 0$ حيث ان p اصغر عدد صحيح موجب. ويقال بان A معدومة القوى من الدرجة p.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اذن A مصفوفة معدومة القوى من الدرجة 3.

مصفوفات خاصة Special Matrices والمصفوفات الاولية Elementary Matrices

12. منقول مصفوفة Transpose of a matrix: لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة سعة $m \times n$ ، اذا وضعت صفوف المصفوفة بشكل اعمدة بالترتيب، اي ان السطر الاول اخذ موضع العمود الاول و هكذا فان المصفوفة الناتجة من هذه العمليات تسمى منقول المصفوفة ويرمز لها بالرمز $A^t = (a_{ji})$ وتكون ذات سعة $n \times m$. اي ان العنصر a_{ij} في A هو العنصر a_{ji} في A^t.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

13. المصفوفة المتناظرة Symmetric matrix: يقال لمصفوفة مربعة $A = (a_{ij})$ بانها متناظرة اذا كان $A^t = A$ اي ان $a_{ij} = a_{ji}$. ويقال بانها متناظرة عكسيا (Skew-Symmetric) اذا كان $A^t = -A$ اي ان $a_{ij} = -a_{ji}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3} = A$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} = -\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} = -B$$

واضح ان المصفوفة A متناظرة، اما المصفوفة B فهي متناظرة عكسيا.

14. المصفوفة المتعامدة Orthogonal matrix: يقال لمصفوفة مربعة $A = (a_{ij})$ بانها متعامدة اذا تحققت العلاقة $AA^t = A^tA = I$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$AA^t = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^tA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

اذن A مصفوفة متعامدة.

مبرهنة: لتكن A مصفوفة سعة $m \times n$ و B مصفوفة سعة $n \times p$ فان $(AB)^t = B^tA^t$.

البرهان: نفرض ان سعة A هي $m \times n$ وسعة B هي $n \times p$. اذن سعة A^t هي $n \times m$ وسعة B^t هي $p \times n$.
وعليه فان سعة B^tA^t هي $p \times m$.
بما ان سعة AB هي $m \times p$ اذن سعة $(AB)^t$ هي $p \times m$.
ولهذا فان سعة الطرفين متساوية.
نفرض ان $B = (b_{ij})$, $A = (a_{ij})$
اذن $B^t = (b_{ji})$, $A^t = (a_{ji})$

$$(AB)^t = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj})^t = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = B^tA^t$$

مبرهنة: لتكن A, B مصفوفات ذات سعة متساوية فان

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$.
2. $(A^t)^t = A$.
3. $(kA)^t = kA^t$.

البرهان: 1. نفرض ان سعة $A, \ B$ هي $m \times n$. اذن سعة $A^t, \ B^t$ هي $n \times m$ وسعة $A^t + \ B^t$ هي $n \times m$.

بما ان سعة $A+B$ هي $m\times n$ اذن سعة $(A+B)^t$ هي $n\times m$. ولهذا فان سعة الطرفين متساوية.
نفرض ان $A=(a_{ij}),\quad B=(b_{ij})$. اذن $A^t=(a_{ji}),\quad B^t=(b_{ji})$.

$$(A+B)^t=(a_{ij}+b_{ij})^t=(a_{ji}+b_{ji})=A^t+B^t$$

2. نفرض ان سعة A هي $m\times n$. اذن سعة A^t هي $n\times m$ وسعة $(A^t)^t$ هي $m\times n$. ولهذا فان سعة الطرفين متساوية.

$$(A^t)^t=((a_{ij})^t)^t=(a_{ji})^t=(a_{ij})=A$$

4. بنفس طريقة برهان 1, 2.

العمليات السطرية الاولية على مصفوفة:

1. ضرب عناصر اي سطر بعدد غير صفري.
2. تبادل موضعي اي سطرين.
3. اضافة مضروب اي سطر بقياسي (بعدد) الى سطر اخر.

المصفوفة الاولية Elementary matrix: هي مصفوفة مربعة سعة يمكن تكوينها من المصفوفة المحايدة بواسطة عملية واحدة من العمليات السطرية الاولية.

مثال: اذكر العملية السطرية الاولية التي تم اجراءها على المصفوفات المحايدة لتحويلها الى مصفوفات اولية.

$E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&-3\end{bmatrix}$ ضرب السطر الثاني للمصفوفة I_2 بـ -3 $(-3R_2\to R_2)$.

$E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$ ضرب السطر الاول للمصفوفة I_3 بـ 2 واضافته الى السطر الثالث $(2R_1+R_3\to R_3)$.

$E_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$ استبدال السطر الثاني والرابع من المصفوفة I_4 $(R_2\to R_4,\quad R_4\to R_2)$.

ملاحظة: عند ضرب مصفوفة A من اليسار بمصفوفة اولية E يكون تاثير هذه العملية معادلا لاجراء عملية سطرية اولية على A.

مثال: $A=\begin{bmatrix}-1&1&0&-1\\2&-2&3&0\\0&5&1&3\end{bmatrix},\qquad E=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

واضح ان المصفوفة E ناتجة من $-2R_3+R_1\to R_1$

$$EA=\begin{bmatrix}-1&-9&-2&-7\\2&-2&3&0\\0&5&1&3\end{bmatrix}$$

نلاحظ انه لو اجرينا هذه العملية السطرية الاولية $(-2R_3+R_1\to R_1)$ على المصفوفة A لكان الناتج نفس ناتج EA.

ملاحظة: عرفنا انه اذا اجريت عملية سطرية اولية على مصفوفة محايدة I تنتج مصفوفة اولية E. عندئذ توجد عملية سطرية اولية اخرى لو اجريت على E لكان الناتج نفس المصفوفة المحايدة I ، هذه العمليات التي ترجع E الى I تسمى عمليات عكسية.

الصيغة المدرجة-السطرية المختزلة Reduced row-Echelon form

تعريف: يقال لمصفوفة بانها تحقق الصيغة المدرجة-السطرية المختزلة Reduced row-Echelon form اذا تحققت الشروط الاتية:

1. اذا لم تكن جميع عناصر سطر اصفارا فان اول عنصر غير صفري هو 1 (يطلق عليه الدليل 1).
2. اذا وجدت سطور كل عناصرها اصفار فان هذه السطور كافة تقع في الجهة السفلى من المصفوفة.
3. في اي سطرين متتاليين ليست جميع عناصر كل منهما اصفارا فان الدليل 1 للسطر الاسفل يكون ابعد الى اليمين من الدليل 1 للسطر الاعلى منه.
4. كل عمود يحوي الدليل 1 تكون عناصره الاخرى اصفارا.

ملاحظة: المصفوفة التي تحقق الشروط 1،2،3 يقال بانها تحقق الصيغة المدرجة السطرية Row-Echelon form.

امثلة متنوعة:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ الصيغة المدرجة-السطرية المختزلة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ الصيغة المدرجة-السطرية

ملاحظة: في المصفوفة بالصيغة المدرجة-السطرية المختزلة تكون جميع العناصر الواقعة فوق وتحت كل دليل 1 اصفارا.
اما في المصفوفة بالصيغة المدرجة-السطرية تكون جميع العناصر الواقعة تحت كل دليل 1 اصفارا.

تعريف: اذا امكن الحصول على احدى مصفوفتين من ثانية بواسطة سلسلة منتهية من عمليات سطرية اولية فيقال انهما متكافئتان سطريا (Row equivalent).

معكوس المصفوفة Inverse of a matrix

تعريف: اذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت B مصفوفة تحقق العلاقات $AB = I = BA$ حيث I المصفوفة المحايدة، عندئذ يقال للمصفوفة A بانها قابلة للانعكاس (Invertible) ويطلق على المصفوفة B معكوس (Inverse) ويرمز للمعكوس بالرمز A^{-1}.

مبرهنة: كل مصفوفة اولية تكون قابلة للانعكاس كما ان هذا المعكوس هو مصفوفة اولية.

البرهان: نفرض ان E مصفوفة اولية.

اذن E ناتجة من اجراء عملية سطرية اولية واحدة على المصفوفة المحايدة I.

نفرض ان E_0 المصفوفة الناتجة من عكس هذه العملية السطرية على I.

بما ان عكس عملية سطرية يزيل مفعول تلك العملية السطرية.

اذن نحصل على $EE_0 = I, \quad E_0E = I$. اي ان E قابلة للانعكاس.

ولهذا فان المصفوفة الاولية E_0 هي معكوس E.

طريقة ايجاد معكوس المصفوفة

لتكن A مصفوفة مربعة مكافئة سطريا للمصفوفة المحايدة I.

فان A تؤدي الى I بواسطة سلسلة منتهية من عمليات سطرية اولية.

بما ان كل عملية سطرية اولية على A تنتج من عملية ضرب A من اليسار بواسطة مصفوفة اولية.

اذن توجد مصفوفات اولية $E_1, E_2, \cdots, E_k$ بحيث ان $E_k \cdots E_2 E_1 A = I$ .... (1)

بما ان هذه المصفوفات الاولية قابلة للانعكاس حسب المبرهنة اعلاه (السابقة).

اذن بضرب طرفي (1) من اليسار بـ $E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ نحصل على

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I \Rightarrow A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

بهذه الطريقة امكن التعبير عن المصفوفة A بدلالة حاصل ضرب مصفوفات عكسية ولهذا فان A قابلة للانعكاس.

لذلك يمكن الحصول على A^{-1} (المعكوس) بواسطة ضرب I من اليسار بالمصفوفات الاولية $E_1, E_2, \cdots, E_k$

حيث ان هذه المصفوفات الاولية التي تحول A الى I سوف تحول I الى A^{-1}، $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 I$.

وهكذا لايجاد معكوس مصفوفة A قابلة للانعكاس، يجب ايجاد عمليات سطرية اولية تحول A الى I ثم اجراء هذه العمليات نفسها على I للحصول على A^{-1}.

مثال: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باجراء $-2R_1 + R_3 \to R_3$ نحصل على $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ثم باجراء $2R_1 + R_3 \to R_3$ على I نحصل على $E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

من الواضح ان $EE_0 = I, \quad E_0E = I$.

اي ان E_0 هي معكوس E.

ملاحظة: يمكن ايجاد معكوس المصفوفة A عن طريق كتابة المصفوفة المحايدة I والمصفوفة A بالشكل $[A:I]$ ثم اجراء سلسلة من العمليات السطرية الاولية الى ان نحصل على الشكل $[I:B]$ عندئذ يكون $B = A^{-1}$.

ملاحظة: اذا كانت جميع عناصر سطر في مصفوفة اليسار اصفارا فان المصفوفة A غير قابلة للانعكاس.

مثال: جد معكوس المصفوفة A ان امكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$[A|I] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], -R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right],\ R_2+R_1\rightarrow R_1,\ \ -2R_2+R_3\rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1\end{array}\right],-1/2R_3\rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & -1/2\end{array}\right],-R_3+R_1\rightarrow R_1,\ \ -R_3+R_2\rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 & -1/2\end{array}\right]\Rightarrow [I|B]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ -1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1 & -1/2\end{bmatrix}$$

مثال: جد معكوس المصفوفة A ان امكن $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}$.

$$[A|I]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right],\ R_1\rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right],-2R_1+R_2\rightarrow R_2,\ \ R_1+R_3\rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1\end{array}\right],\ -R_2\rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1\end{array}\right],-2R_2+R_1\rightarrow R_1,\ \ -2R_2+R_3\rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 3 & 2 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 7 & 2 & -3 & 1\end{array}\right],\ 1/7R_3\rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 3 & 2 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & -3/7 & 1/7\end{array}\right],-3R_3+R_1\rightarrow R_1,\ \ 2R_3+R_2\rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 8/7 & -12/7 & -3/7\\ 0 & 1 & 0 & -3/7 & 8/7 & 2/7\\ 0 & 0 & 1 & 2/7 & -3/7 & 1/7\end{array}\right]\Rightarrow [I|B]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}8/7 & -12/7 & -3/7\\ -3/7 & 8/7 & 2/7\\ 2/7 & -3/7 & 1/7\end{bmatrix}$$

حلول منظومات المعادلات الخطية Solutions of systems of linear equations

تعريف: تتكون منظومة المعادلات الخطية من m من المعادلات ولها n من المجاهيل حيث يمكن كتابتها بالشكل

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

حيث ان a_{ij} ثوابت وان b_i الحد المطلق للمعادلات.

وتسمى مجموعة من الاعداد $s_1, s_2, \cdots, s_n$ حلا للمنظومة اعلاه اذا كانت $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$ هو حل لكل معادلة من المنظومة.

مثلا المنظومة

$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$
$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$

لها الحل $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1$ لان هذه القيم تحقق المعادلتين.

بينما $x_1 = 1, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 1$ ليست حلا للمنظومة لانها تحقق المعادلة الثانية فقط.

ليست كل منظومات المعادلات الخطية لها حل. مثلا المنظومة

$$x_1 + x_2 = 2$$
$$3x_1 + 3x_2 = 12$$

ليس لها حل لان احداهما تناقض الاخرى.

ملاحظة: المنظومة الخطية التي ليس لها حل تسمى منظومة غير قويمة. اما اذا وجد لها حل واحد على الاقل فتسمى منظومة قويمة. منظومة المعادلات الخطية تكون قويمة (لها حل) اذا وفقط اذا كانت مصفوفة المعاملات قابلة للانعكاس.

بصورة عامة منظومات المعادلات الخطية اما ان يكون لها حل وحيد او عدد غير منته من الحلول او لايوجد لها اي حل.

اذا كانت الحدود الخالية من المجاهيل (الحدود المطلقة) من منظومة المعادلات الخطية هي اصفار فتسمى منظومة المعالدلات الخطية المتجانسة.

ملاحظة: اذا كانت عدد المجاهيل تساوي عدد المعادلات فمنظومة المعادلات الخطية المتجانسة لها حل وحيد و هو الحل الصفري، اما اذا كان عدد المجاهيل اكثر من عدد المعادلات فالمنظومة لها عدد غير منته من الحلول.
يمكن تحويل منظومة المعادلات الخطية الى صيغة مصفوفة بالشكل

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

تسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة الممتدة (Augmented matrix) لمنظومة المعادلات الخطية. اذا عبرنا عن المنظومة بالصيغة $AX = B$. فان المصفوفة الممتدة يمكن التعبير عنها بالشكل $[A \vdots B]$.

تعريف: لتكن $AX = B$ منظومة المعادلات الخطية. فان طريقة حل هذه المنظومة على اساس تحويل مصفوفتها الممتدة $[A \vdots B]$ الى الصيغة المدرجة السطرية المختزلة $[C \vdots D]$ تسمى طريقة حذف كاوس-جوردن (Gauss-Jordan elimination). اما تحويل مصفوفتها الممتدة الى الصيغة المدرجة السطرية تسمى طريقة حذف كاوس (Gauss elimination). علما ان طريقة تحويل المصفوفة الممتدة الى الصيغة المدرجة السطرية او السطرية المختزلة تتم باستخدام العمليات السطرية الاولية.

مثال: حل منظومة المعادلات الخطية التالية بطريقة حذف كاوس-جوردن

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$
$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1$$

$$[A|B] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \;, \; -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2, \;\; -3R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & -7 & 1 & -8 \end{array}\right] \;, -1/5R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4/5 \\ 0 & -7 & 1 & -8 \end{array}\right] \;, -2R_2 + R_1 \rightarrow R_1, \;\; 7R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7/5 \\ 0 & 1 & -1 & 4/5 \\ 0 & 0 & -6 & -12/5 \end{array}\right] \;, -1/6R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 7/5 \\ 0 & 1 & -1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right] \;, -R_3 + R_1 \rightarrow R_1, \;\; R_3 + R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/5 \\ 0 & 1 & 0 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 5/5 \\ x_2 \qquad &= 6/5 \\ x_3 &= 2/5 \end{aligned}$$

واضح ان الحل لمنظومة المعادلات الخطية هو $x_1 = 5/5 \;, \quad x_2 = 6/5 \,, \quad x_3 = 2/5$.

مثال: حل منظومة المعادلات الخطية التالية بطريقة حذف كاوس

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 7$$
$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$[A|B] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \;, \; -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2, \;\; -4R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -3 & -8 \end{array}\right] \;, \; 1/3R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & -8 \end{array}\right] \;, \; -6R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -14 \end{array}\right] , 1/3R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -14/3 \end{array}\right]$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$
$$x_2 - x_3 = 1$$
$$x_3 = -14/3$$

من معادلة 3 واضح ان $x_3 = -14/3$.

بتعويض قيمة x_3 في معادلة 2 فان $x_2 = -11/3$.

واخيرا بتعويض قيم x_3, x_2 في معادلة 1 فان $x_1 = -2/3$.

اذن الحل لمنظومة المعادلات الخطية هو $x_3 = -14/3 \ , \quad x_2 = -11/3 \ , \quad x_1 = -2/3$.

الفصل الثاني: المحددات Determinants

تعريف: لتكن $S = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$، يعرف تباديل S على انه تنظيم عناصرها بترتيب معين $(j_1 j_2 j_3 \cdots j_{n-1} j_n)$ بدون حذف او تكرار اي عنصر منها.
نلاحظ ان العدد الصحيح الاول j_1 يمكن تبديله بـ n من الطرق،
العدد الصحيح الثاني j_2 يمكن تبديله بـ $n-1$ من الطرق،
العدد الصحيح الثالث j_3 يمكن تبديله بـ $n-2$ من الطرق،
وهكذا العدد الصحيح j_{n-1} يمكن تبديله بـ 2 من الطرق،
واخيرا العدد الصحيح j_n يمكن تبديله بـ 1 طريقة.
لذلك يوجد $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ (مفكوك العدد n) من التباديل لـ S حيث يرمز لمجموعة التباديل بالرمز S_n.

مثال: لتكن $S = \{1,\ 2,\ 3\}$ جد S_3.
هناك ستة تباديل للمجموعة S حسب القانون اعلاه (مفكوك العدد $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$) وهي

$$S_3 = \{(123),\ (213),\ (231),\ (132),\ (312),\ (321)\}.$$

يقال للتبديل $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ للمجموعة $S = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ بان له خاصية التعاكس اذا وجد فيه عدد j_s يسبق عددا اصغر منه.

اذا كان في تبديل ما، العدد الكلي للتعاكسات زوجيا فان هذا التبديل يسمى تبديلا زوجيا، اما اذا كان عدد التعاكسات فرديا فان هذا التبديل يسمى تبديلا فرديا.

اذا كانت $n \geq 2$ فان S_n لها $n!/2$ تباديل زوجية، والعدد نفسه من التباديل الفردية.

في المثال السابق:
التبديل (123) بدون تعاكس
التبديل (231) تعاكسان
التبديل (312) تعاكسان
وهذه هي التباديل الزوجية لـ S_3.

التبديل (132) تعاكس واحد
التبديل (213) تعاكس واحد
التبديل (321) ثلاث تعاكسات
وهذه هي التباديل الفردية لـ S_3.

تعريف: لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة سعة $n \times n$. نعرف المحدد على A والذي يرمز له بالرمز $|A|$ على انه:

$$|A| = \sum (\pm) a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

حيث تجمع الحدود لكل التباديل، وناخذ الاشارة $+$ عندما يكون التبديل زوجيا والاشارة $-$ عندما يكون التبديل فرديا.

مثال: لتكن $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ جد محدد A او $|A|$؟

لايجاد محدد A ، لدينا الحدود $(+)\ a_{11}a_{22}, \quad (-)\ a_{12}a_{21}$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

وكذلك يمكن ان نحصل على محدد A بالشكل الاتي:

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{a_{11}} & \color{green}{a_{12}} \\ \color{green}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

مثال: جد $|A|$ اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$؟

$$|A| = 4(-2) - (-3)1 = -5$$

ملاحظة: ان كل حد من $|A|$ هو حاصل ضرب n من عناصر A، كل حسب اشارته $+$ او $-$ بحيث ياتي عنصر واحد فقط من كل سطر، وعنصر واحد فقط من كل عمود وبما ان الجمع يشمل جميع التباديل فان $|A|$ يحتوي على $n!$ من الحدود.

ملاحظة: اذا كانت المصفوفة A مصفوفة مربعة سعة $n \times n$ حيث $n = 3$ فانه يمكن الحصول على $|A|$ كالاتي:
نعيد كتابة العمود الاول والثاني للمصفوفة كما موضح في المثال ادناه، ثم نجمع حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي مع حاصل ضرب العناصر على الخطين الموازيين للقطر الرئيسي، ثم نطرح منها حاصل ضرب العناصر على القطر الاخر (الثانوي) وحاصل ضرب العناصر على الخطين الموازيين له.

مثال: جد $|A|$ اذا كانت $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$؟

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{matrix} = 12 + 8 + 0 - 12 + 0 - 2 = 6$$

خواص المحددات

مبرهنة 1: اذا كانت A مصفوفة مربعة فان $|A| = |A^t|$.

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ واضح ان $|A| = |A^t| = -1$.

مبرهنة 2: لتكن B مصفوفة ناتجة من المصفوفة المربعة A بالمبادلة بين اي سطرين (عمودين) من A عندئذ $|B| = -|A|$.

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ وان $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ حيث B ناتجة من A بمبادلة السطر الاول والثاني.
من الواضح ان $|A| = -17$ وان $|B| = 17$. اي ان $|B| = -|A|$.

مبرهنة 3: اذا تساوى سطران (عمودان) في مصفوفة مربعة A، فان $|A| = 0$.

البرهان: نفرض ان السطرين $r_1, \ \ r_2$ متساويان في المصفوفة A.
بمبادلة السطرين $r_1, \ \ r_2$ في A نحصل على المصفوفة B.
حسب مبرهنة 2 (نص المبرهنة) نستنتج ان $|B| = -|A|$.
من الواضح ان $B = A$ لذلك فان $|B| = |A|$.
عندئذ نحصل على ان $|A| = -|A|$ وهذا يؤدي الى ان $2|A| = 0$ وعليه فان $|A| = 0$.

مبرهنة 4: اذا كان كل عنصر من سطر (عمود) في مصفوفة مربعة A يساوي صفرا فان $|A| = 0$.

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ فمن الواضح ان $|A| = 0$.

مبرهنة 5: لتكن A مصفوفة مربعة فان

أ. اذا كانت المصفوفة B ناتجة من ضرب سطر (عمود) واحد في المصفوفة A بعدد ثابت k فان $|B| = k|A|$.

ب. اذا كانت المصفوفة B ناتجة من اضافة مضروب احد السطور (الاعمدة) في المصفوفة A بعدد ثابت واضافته الى سطر (عمود) اخر فان $|B| = |A|$.

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ وان $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$. واضح ان $|B| = 4|A| = -32$.

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ وان $B = \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. واضح ان $|B| = |A| = -8$.

مبرهنة 6: لتكن A مصفوفة مثلثية سعة $n \times n$ فان $|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

مثال: اذا كانت $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ فان $|A| = (-3)2(-1) = 6$.

خواص المحددات/ النشر بالعامل المرافق

خاصية: اذا كانت A مصفوفة مربعة سعة $n \times n$ فان $|kA| = k^n|A|$.

خاصية: اذا كانت $A,\ B$ مصفوفتين مربعتين لهما السعة نفسها فان $|A + B| \neq |A| + |B|$.

خاصية: اذا كانت $A,\ B$ مصفوفتين مربعتين لهما السعة نفسها فان $|AB| = |A||B|$.

مبرهنة: المصفوفة المربعة A قابلة للانعكاس اذا وفقط اذا $|A| \neq 0$.

البرهان: **(1)** نفرض ان A قابلة للانعكاس.

اذن $AA^{-1} = I$.

وعليه فان $|AA^{-1}| = |I|$.

وهذا يؤدي الى ان $|A||A^{-1}| = 1$.

اذن $|A| \neq 0$.

(2) العكس، نفرض ان $|A| \neq 0$.

لاثبات ان A قابلة للانعكاس يجب ان نثبت ان A هي التكافؤ السطري لـ I.

لتكن R الصيغة المدرجة السطرية المختزلة لـ A.

بما ان R يمكن الحصول عليها من A بسلسلة منتهية من العمليات السطرية الاولية.

اذن يمكن ان نجد مصفوفات اولية $E_1, \ E_2, \ \cdots, \ E_k$ بحيث ان

$$E_k \cdots E_2 \, E_1 \, A = R$$

$$A = E_1^{-1} \, E_2^{-1} \, \cdots \, E_k^{-1} \, R$$

$$|A| = |E_1^{-1}||E_2^{-1}| \cdots |E_k^{-1}||R|$$

بما ان $|A| \neq 0$. اذن $|R| \neq 0$.

وهذا يعني ان الصيغة المدرجة السطرية المختزلة R لاتحتوي على اي سطر جميع عناصره اصفار.

لذلك فان $R = I$. وعليه فان $E_k \cdots E_2 \, E_1 \, A = I$.

اذن A قابلة للانعكاس. وان $A^{-1} = E_k \cdots E_2 \, E_1$.

نتيجة: اذا كانت A مصفوفة مربعة قابلة للانعكاس فان $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

البرهان: بما ان A قابلة للانعكاس.

اذن $A^{-1}A = I$.

وعليه فان $|A^{-1}A| = |I|$.

وهذا يؤدي الى ان $|A^{-1}||A| = 1$.

بما ان $|A| \neq 0$ لان A قابلة للانعكاس.

اذن $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

تعريف: لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة سعة $n \times n$ وان M_{ij} مصفوفة جزئية من A سعة $(n-1) \times (n-1)$ والناتجة من حذف السطر في الموقع i والعمود في الموقع j من A. ويعرف العامل المرافق للعنصر a_{ij} والذي يرمز له A_{ij} على انه

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|.$$

نلاحظ ان الاشارات $(-1)^{i+j}$ تأتي بشكل متناوب وان اشارات القطر الرئيسي موجبة دائما، كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots & - \\ - & + & - & \cdots & + \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ - & + & - & \cdots & + \end{bmatrix}$$

نعرف ان المصفوفة A سعة 3×3 بالصيغة العامة هي كالاتي: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

ويمكن حساب المحدد لـ A كما يأتي:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

كما يمكن اعادة كتابته بالشكل التالي:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

وبما ان هذه الاقواس تؤلف مرافقات المعامل الذي خارجها لذلك يمكن اعادة كتابة نشر المحدد الثلاثي كالاتي:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}.$$

وهذه تؤلف حاصل ضرب عناصر العمود الاول في مرافقاتها.

وهنا يسمى $|A|$ النشر بالنسبة لعناصر العمود الاول.

كذلك يمكن ان يكون نشر $|A|$ بالنسبة لعناصر السطر الاول وهكذا.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

مبرهنة: لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة سعة $n \times n$ عندئذ النشر بالنسبة لعناصر السطر هو

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

اما النشر بالنسبة لعناصر العمود هو

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

ملاحظة: اذا لم يتم تحديد السطر او العمود بالنسبة للنشر في السؤال، فان افضل طريقة للنشر تتم بدلالة السطر او العمود الذي يحتوي على اكبر عدد من الاصفار. اي انه اذا كان $a_{ij} = 0$ عندئذ لانحتاج لحساب A_{ij}.

مثال: جد محدد المصفوفة A بطريقة النشر بالعامل المرافق بالنسبة لعناصر العمود الثالث.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}[1(-3) - 3 \times 4] = -15$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}[2(-3) - (-1) \times 4] = 2$$

$$|A| = 1(-15) + (-2)2 + 0 = -19$$

مثال: جد محدد المصفوفة A بطريقة النشر بالعامل المرافق بالنسبة لعناصر السطر الثاني.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\big[0 \times 3 - (-1)(-2)\big] = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}[1 \times 3 - (-1)1] = 4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}[1(-2) - 0 \times 1] = 2$$

$$|A| = 5 \times 2 + 1 \times 4 + 2 \times 2 = 18$$

ايجاد المعكوس باستخدام المحددات/ قاعدة كرامر

تعريف: لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة سعة $n \times n$، فان منقول مصفوفة العوامل المرافقة للعناصر a_{ij} في A يسمى مصاحب A adjoint ويرمز له بالرمز $adj(A)$. اي ان:

$$adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

مبرهنة: لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة سعة $n \times n$، فان

$$A.adj(A) = adj(A).A = |A|.I_n$$

نتيجة: لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة سعة $n \times n$ وان $|A| \neq 0$، فان

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.\ adj(A)$$

مثال: جد معكوس المصفوفة A ان امكن باستخدام المحددات.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{matrix} = 4 + 0 + 6 - 0 + 6 - 24 = -8$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}[1(-4) - (-2)(-3)] = -10$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}[3(-4) - 0(-3)] = 12$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}[3(-2) - 0(1)] = -6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}[(-2)(-4) - (-2)(-1)] = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}[(-1)(-4) - 0(-1)] = 4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}[(-1)(-2) - 0(-2)] = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}[(-2)(-3) - 1(-1)] = 7$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}[(-1)(-3) - 3(-1)] = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}[(-1)1 - 3(-2)] = 5$$

اذن مصفوفة العوامل المرافقة هي:

$$\begin{bmatrix} -10 & 12 & -6 \\ -6 & 4 & -2 \\ 7 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

وعليه فان:

$$adj(A)=\begin{bmatrix}-10 & -6 & 7\\ 12 & 4 & -6\\ -6 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}.adj(A)=\frac{1}{-8}\begin{bmatrix}-10 & -6 & 7\\ 12 & 4 & -6\\ -6 & -2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-7}{8}\\ \frac{-6}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-5}{8}\end{bmatrix}$$

ملاحظة: اذا كانت المصفوفة A المراد ايجاد معكوسها بطريقة المحددات سعة 2×2 فان $adj(A)$ يمكن ايجادها بابدال عناصر القطر الرئيسي وضرب عناصر القطر الاخر (الثانوي) بـ (-1).

مثال: جد معكوس المصفوفة A ان امكن باستخدام المحددات.

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$|A|=(-2)3-(-1)4=-2$$

$$adj(A)=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}.adj(A)=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-3}{2} & 2\\ \frac{-1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

قاعدة كرامر

تستخدم هذه القاعدة لحل منظومة معادلات خطية تحتوي على n من المعادلات ولها n من المجاهيل. كالاتي:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n\end{aligned}$$

حيث ان a_{ij} ثوابت وان b_i الحد المطلق للمعادلات.

وتسمى مجموعة من الاعداد $s_1,s_2,\cdots,s_n$ حلا للمنظومة اعلاه اذا كانت $x_1=s_1,\ x_2=s_2,\cdots,\ x_n=s_n$ هو حل لكل معادلة من المنظومة.

مبرهنة (قاعدة كرامر): لتكن $AX=B$ منظومة لها n من المعادلات و n من المجاهيل حيث A مصفوفة المعاملات و X مصفوفة المجاهيل و B مصفوفة الحدود المطلقة، بحيث ان $|A|\neq 0$ عندئذ يكون للمنظومة حل وحيد هو:

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|},\ \ x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\ \ \cdots\cdots,\ \ x_n=\frac{|A_n|}{|A|}.$$

حيث A_j هي المصفوفة الناتجة من احلال عناصر المصفوفة B محل العمود في الموقع j من المصفوفة A.

مثال: حل منظومة المعادلات الخطية التالية باستخدام قاعدة كرامر.

$$x_1-3x_2-2x_3=-1$$

$$2x_1+x_2-2x_3=4$$

$$3x_1-x_2-4x_3=5$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left|\begin{matrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = -4 + 18 + 4 + 6 - 2 - 24 = -2$$

$$|A_1| = \left|\begin{matrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & -4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -1 & -3 \\ 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{matrix} = 4 + 30 + 8 + 10 + 2 - 48 = 6$$

$$|A_2| = \left|\begin{matrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{matrix} = -16 + 6 - 20 + 24 + 10 - 8 = -4$$

$$|A_3| = \left|\begin{matrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 5 - 36 + 2 + 3 + 4 + 30 = 8$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{6}{-2} = -3, \qquad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2, \qquad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{8}{-2} = -4\,.$$

الفصل الثالث: فضاء المتجهات

المتجهات في فضاء-2 وفضاء-3 / The vectors in space-2 and space-3

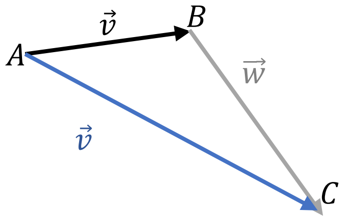
مقدمة في المتجهات

في المستوي وفي الفراغ (الفضاء) نمثل المتجه هندسيا بسهم حيث يعني اتجاه السهم اتجاه المتجه بينما يصف طول السهم قيمة المتجه. سوف نرمز للمتجه بحرف فوقه سهم صغير مثلا $\vec{v}$ ونرمز لقيمة المتجه $\|\vec{v}\|$.

تعريف: اذا كان $\vec{v}, \vec{w}$ متجهين فان مجموعهما $\vec{v}+\vec{w}$ يتحدد بوضع بداية المتجه $\vec{w}$ على نهاية المتجه $\vec{v}$، لذلك فان المتجه الذي بدايته بداية $\vec{v}$ ونهايته نهاية $\vec{w}$ يمثل متجه المجموع.

مثال: اذا كان $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{w}=\overrightarrow{BC}$ جد المتجه $\vec{v}+\vec{w}$ ومثله هندسيا.

$$\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



المحايد الجمعي في المتجهات

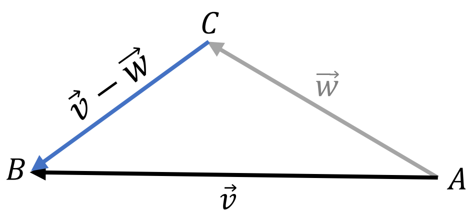
المتجه الذي عدده صفر يسمى المتجه الصفري ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ وهو المحايد الجمعي في المتجهات حيث $\vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$ لكل متجه $\vec{v}$.

ملاحظة: اذا كان $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ متجه غير صفري، فان $-\vec{v}=\overrightarrow{BA}$ هو المتجه الذي له عدد $\vec{v}$ نفسه ولكن باتجاه معاكس.

تعريف: اذا كان متجه $\vec{v}, \vec{w}$ متجهين فان طرح المتجه $\vec{w}$ من المتجه $\vec{v}$ $(\vec{v}-\vec{w})$ هو المتجه الذي يتحدد بوضع بدايتي $\vec{v}, \vec{w}$ على نقطة واحدة، لذلك فان المتجه الذي بدايته نهاية $\vec{w}$ ونهايته نهاية $\vec{v}$ يمثل متجه الفرق $\vec{v}-\vec{w}=\vec{v}+(-\vec{w})$.

مثال: اذا كان $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$ جد المتجه $\vec{v}-\vec{w}$ ومثله هندسيا.

$$\vec{v}-\vec{w}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$$



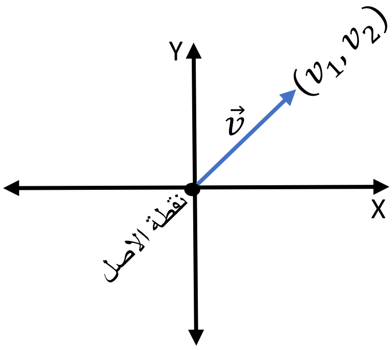
ملاحظة: 1. $\vec{v}-\vec{v}=\vec{v}+(-\vec{v})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

2. $-\vec{0}=\vec{0}$

تعريف: اذا كان $\vec{v}$ متجه غير صفري وكان $k \neq 0$ عدد حقيقي فان الضرب $k\vec{v}$ يعرف بالمتجه الذي طوله k مرة بقدر طول
المتجه $\vec{v}$، وله اتجاه $\vec{v}$ نفسه اذا كان $k > 0$ وعكس اتجاه $\vec{v}$ اذا كان $k < 0$. وواضح ان $k\vec{v} = \vec{0}$ اذا كان $k = 0$ أو $\vec{v} = \vec{0}$.

ان دراسة المتجهات تتضح اكثر بواسطة الاحداثيات. لذلك سوف نستعرض دراسة المتجه في المستوي (فضاء-2) ثم في الفراغ (الفضاء) (فضاء-3).

ليكن $\vec{v}$ اي متجه في المستوي (فضاء-2) وليكن بدايته نقطة الاصل لاي احداثيين متعامدين. ولتكن احداثيات نقطة نهاية $\vec{v}$ هي (v_1, v_2). يطلق على الاحداثيين v_1, v_2 مركبتي المتجه $\vec{v}$ ويكتب $\vec{v} = (v_1, v_2)$.



تساوي المتجهات

اذا كانت بداية متجهين متساويين $\vec{v}, \vec{w}$ عند نقطة الاصل فان نهايتيهما يجب ان تنطبقان وهذا يعني ان مركبتي المتجهين متساويين. بمعنى اخر اذا كان $\vec{v} = (v_1, v_2), \vec{w} = (w_1, w_2)$ فان $\vec{v} = \vec{w}$ اذا وفقط اذا كان $v_1 = w_1, v_2 = w_2$.

مثال: اذا كان $\vec{v} = (3, 4), \vec{w} = (3, -4)$ فان المتجهين غير متساويين لان مركبة $\vec{v}$ الثانية لاتساوي مركبة $\vec{w}$ الثانية.

جمع المتجهات وطرح المتجهات وضرب المتجهات بعدد

يمكن اجراء هذه العمليات على المتجهات بواسطة المركبات كالاتي: اذا كان $\vec{v} = (v_1, v_2), \vec{w} = (w_1, w_2)$ فان

1. $\vec{v} + \vec{w} = (v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$
2. $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = (v_1, v_2) + (-w_1, -w_2) = (v_1 - w_1, v_2 - w_2)$
3. $k\vec{v} = k(v_1, v_2) = (kv_1, kv_2)$ حيث k أي عدد.

مثال: اذا كان $\vec{v} = (2, -3), \vec{w} = (6, 5)$ جد $\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}, -4\vec{v}$.

$$\vec{v} + \vec{w} = (2, -3) + (6,5) = (8,2)$$
$$\vec{v} - \vec{w} = (2, -3) - (6,5) = (2, -3) + (-6, -5) = (-4, -8)$$
$$-4\vec{v} = -4(2, -3) = (-8,12)$$

مثلما المتجهات في المستوي تمثل بزوج مرتب من عددين حقيقيين، فان المتجهات في الفراغ تمثل بمرتب من ثلاثة مراتب من اعداد حقيقية. اذا كانت نقطة ابتداء متجه $\vec{v}$ عند نقطة الاصل فان احداثيات نقطة نهايته تسمى مركبات $\vec{v}$ وتكتب $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

يمكن اجراء عمليات الجمع والطرح والضرب بعدد والتساوي في فضاء-3 بطرق مشابهة للفضاء-2. اذا كان $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ فان العمليات كما ياتي:

1. $\vec{v} + \vec{w} = (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$
2. $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = (v_1, v_2, v_3) + (-w_1, -w_2, -w_3) = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3)$

3. $k\vec{v} = k(v_1, v_2, v_3) = (kv_1, kv_2, kv_3)$ حيث k أي عدد.
4. $\vec{v} = \vec{w} \leftrightarrow v_1 = w_1, v_2 = w_2, v_3 = w_3$

مثال: اذا كان $\vec{v} = (5, -1,2), \vec{w} = (3, 4, -3)$ جد $\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}, 2\vec{w}$.

$$\vec{v} + \vec{w} = (5, -1,2) + (3, 4, -3) = (8,3, -1)$$
$$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = (5, -1,2) + (-3, -4,3) = (2, -5,5)$$
$$2\vec{w} = 2(3,4, -3) = (6,8, -6)$$

واضح ان $\vec{v} \neq \vec{w}$ لان مركبات المتجهين غير متساوية.

ملاحظة: في بعض الاحيان لاتكون نقطة ابتداء المتجه عند نقطة الاصل. فاذا كانت نقطة ابتداء المتجه $\vec{v}$ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة انتهائه $P_2(x_2, y_2, z_2)$ فان مركبات المتجه $\vec{v}$ هي $\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. اي ان مركبات المتجه $\vec{v}$ في هذه الحالة تنتج من طرح احداثيات نقطة البداية من احداثيات نقطة النهاية.

معيار المتجه وحساب المتجه

مبرهنة: اذا كانت $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاثة متجهات في فضاء-2 أو في فضاء-3 وكان k, l قياسيين. عندئذ العلاقات الاتية صحيحة:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
5. $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$
6. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
7. $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
8. $1.\ \ \vec{u} = \vec{u}$

تعريف: يطلق على طول المتجه $\vec{v}$ معيار المتجه ويرمز له بالرمز $\|\vec{v}\|$. ونحصل على معيار المتجه $\vec{v}$ باستخدام القانون الاتي:

1. **فضاء-2** أي ان $\vec{v} = (v_1, v_2)$: $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
2. **فضاء-3** أي ان $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

ملاحظة: تستخدم هذه القوانين في حالة كون نقطة بداية المتجه $\vec{v}$ هي نقطة الاصل.

تعريف: اما اذا لم تكن نقطة بداية المتجه هي نقطة الاصل فيجب حساب المسافة بين النقطتين (نقطة بداية المتجه ونقطة نهايته)

أي حساب معيار المتجه.

1. اذا كانت $p_2(x_2, y_2)$, $p_1(x_1, y_1)$ نقطتي بداية ونهاية متجه في **فضاء-2** فان المعيار

$$d = \|\overrightarrow{p_1p_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. اذا كانت $p_2(x_2,y_2,z_2)$, $p_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطتي بداية ونهاية متجه في **فضاء-3** فان المعيار

$$d = \|\overrightarrow{\boldsymbol{p_1 p_2}}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1})^2+(\boldsymbol{y_2}-\boldsymbol{y_1})^2+(\boldsymbol{z_2}-\boldsymbol{z_1})^2}$$

مثال: جد معيار المتجه $\vec{v}=(-2,3,4)$ ومعيار المتجه $\overrightarrow{p_1 p_2}$ (المسافة بين p_1, p_2).

اذا علمت ان $p_1(4,-1,5)$, $p_2(5,2,7)$.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2+3^2+4^2} = \sqrt{29}.$$

$$d = \|\overrightarrow{p_1 p_2}\| = \sqrt{(5-4)^2+(2-(-1))^2+(7-5)^2} = \sqrt{14}.$$

الجداء (الضرب) العددي

تعريف: ليكن $\vec{u}, \vec{v}$ متجهين غير صفريين في فضاء-2 أو فضاء-3 لهما نقطة ابتداء مشتركة ولتكن θ الزاوية بينهما بحيث ان $0 \le \theta \le \pi$ فان الجداء العددي او الضرب الداخلي الاقليدي يعرف كالاتي:

$$\vec{\boldsymbol{u}} .\ \vec{\boldsymbol{v}} = \|\vec{\boldsymbol{u}}\|\|\vec{\boldsymbol{v}}\|\boldsymbol{\cos\theta}$$

مثال: اذا كان $\vec{u}=(2,0,2)$, $\vec{v}=(0,0,3)$ وان $\theta = 45^\circ$. جد الضرب العددي للمتجهين $\vec{u}, \vec{v}$.

$$\vec{u} .\ \vec{v} = \|\vec{\boldsymbol{u}}\|\|\vec{\boldsymbol{v}}\|\cos 45 = \sqrt{8}\,\sqrt{9}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 6$$

ملاحظة: يمكن حساب الجداء العددي بدلالة مركبات المتجهات. فاذا كان $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ فان

$$\vec{\boldsymbol{u}} .\ \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u_1 v_1}+\boldsymbol{u_2 v_2}+\boldsymbol{u_3 v_3}$$

وبنفس الطريقة يمكن حساب الجداء العددي اذا كان المتجهين في فضاء-2.

مبرهنة: اذا كانت $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاثة متجهات في فضاء-2 أو فضاء-3 وأن k قياسي. فان:

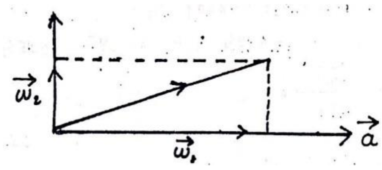
1. $\vec{u} .\ \vec{v} = \vec{v} .\ \vec{u}$
2. $\vec{u} .\ (\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u} .\ \vec{v} + \vec{u} .\ \vec{w}$
3. $k(\vec{u} .\ \vec{v}) = (k\vec{u}) .\ \vec{v} = \vec{u} .\ (k\vec{v})$
4. اذا كان $\vec{v} \ne \vec{0}$ فان $\vec{v} .\ \vec{v} > 0$ اما اذا كان $\vec{v} = \vec{0}$ فان $\vec{v} .\ \vec{v} = 0$

مبرهنة: ليكن $\vec{u}, \vec{v}$ متجهين غير صفريين في فضاء-2 أو فضاء-3 ولتكن θ الزاوية بينهما عندئذ:

1. $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\,.\,\vec{v}}$
2. $\vec{u} \perp \vec{v}$ أو $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0 \leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

مبرهنة: اذا كان $\vec{u}$ متجه في فضاء-2 أو فضاء-3 وكان $\vec{a} \neq \vec{0}$. فان:

- مركبة $\vec{u}$ باتجاه $\vec{a}$ وهي $\vec{w}_1$: $\quad \vec{\boldsymbol{w}}_1 = P_{roj_{\vec{a}}}\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}.\vec{\boldsymbol{a}}$



- مركبة $\vec{u}$ العمودية على $\vec{a}$ وهي $\vec{w}_2$: $\quad \vec{\boldsymbol{w}}_2 = \vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{w}}_1 = \vec{\boldsymbol{u}} - P_{roj_{\vec{a}}}\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}} - \frac{\vec{u}\,.\,\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}.\vec{\boldsymbol{a}}$

مثال: ليكن $\vec{u} = (1,-2,-1), \quad \vec{a} = (3,-2,3)$ جد .1 مركبة $\vec{u}$ باتجاه $\vec{a}$. .2 مركبة $\vec{u}$ العمودية على $\vec{a}$.

1. $\vec{u}\,.\,\vec{a} = 1(3) + (-2)(-2) + (-1)(3) = 4$

$$\|\vec{a}\|^2 = (\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 3^2})^2 = 22$$

$$P_{roj_{\vec{a}}}\vec{u} = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}.\,\vec{a} = \frac{4}{22}(3,-2,3) = \frac{2}{11}(3,-2,3) = (\frac{6}{11},\frac{-4}{11},\frac{6}{11})$$

2. $\vec{u} - P_{roj_{\vec{a}}}\vec{u} = (1,-2,-1) - \left(\frac{6}{11},\frac{-4}{11},\frac{6}{11}\right) = \left(\frac{5}{11},\frac{-18}{11},\frac{-17}{11}\right)$

الجداء (الضرب) الاتجاهي

تعريف: اذا كان $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3), \ \vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ متجهين في فضاء-3 فانه من المتجهين $\vec{u}, \vec{v}$ يمكن تكوين المصفوفة $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ عندئذ الجداء الاتجاهي يعرف كالاتي:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \left(\begin{vmatrix} \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_3} \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} \end{vmatrix}\right)$$

مثال: اذا كان $\vec{u} = (2,1,\ 2), \ \vec{v} = (3,-4,-1)$ جد $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$.

نكون مصفوفة المتجهين $\vec{u}, \vec{v}$ $\quad \begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}\right) = (7,8,-11)$$

ملاحظة: نلاحظ ان ناتج الضرب الاتجاهي متجه بينما ناتج الضرب العددي قيمة عددية.

مبرهنة: اذا كان $\vec{u},\ \vec{v}$ متجهين في فضاء-3. فان:

1. $\vec{u}\,.\ (\vec{u}\times\vec{v}) = 0 \rightarrow \vec{u}\times\vec{v}\ \perp\ \vec{u}$
2. $\vec{v}\,.\ (\vec{u}\times\vec{v}) = 0 \rightarrow \vec{u}\times\vec{v}\ \perp\ \vec{v}$
3. $\left\|\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{v}}\right\|^{\boldsymbol{2}} = \|\vec{\boldsymbol{u}}\|^{2}\|\vec{\boldsymbol{v}}\|^{2} - \left(\vec{\boldsymbol{u}}\,.\ \vec{\boldsymbol{v}}\right)^{\boldsymbol{2}}$ وتسمى **متطابقة لاكرانج**.

مبرهنة: اذا كان $\vec{u},\ \vec{v},\vec{w}$ ثلاثة متجهات في فضاء-3 وكان k أي قياسي فان:

1. $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$
2. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$
3. $k(\vec{u}\times\vec{v}) = (k\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(k\vec{v})$
4. $\vec{u}\times\vec{0} = \vec{0}\times\vec{u} = \vec{0}$
5. $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$

مثال: هل ان $\vec{u}\times\vec{v}$ عمود على $\vec{u} = (1,3,\ -2)$, $\vec{v} = (3,0,\ 4)$ ؟

نكون مصفوفة المتجهين $\vec{v},\ \vec{u}$ $\begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\vec{u}\times\vec{v} = (12,-10,-9)$

$\vec{u}\,.\ (\vec{u}\times\vec{v}) = (1,3,-2)\,.\,(12,-10,-9) = 12-30+18 = 0$

$\vec{v}\,.\ (\vec{u}\times\vec{v}) = (3,0,4)\,.\,(12,-10,-9) = 36-0-36 = 0$

اذن واضح ان $\vec{u}\times\vec{v}$ عمود على كل من $\vec{v},\vec{u}$.

ويمكن ايضا بسهولة تحقيق **متطابقة لاكرانج** على $\vec{v},\vec{u}$. **Check!**

ملاحظة: يمكن ايجاد مساحة المثلث A من خلال الضرب الاتجاهي كالأتي:

$$\mathrm{A} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\|\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{v}}\| = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\|\vec{\boldsymbol{u}}\|\|\vec{\boldsymbol{v}}\|\boldsymbol{sin\theta}$$

وكذلك يمكن ايجاد مساحة المثلث A اذا علمت نقاط رؤوسه $P_1,\ \ P_2,\ \ P_3$ كما يأتي:

$$\mathrm{A} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}\times\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_3}}\right\|$$

مثال: جد مساحة المثلث الذي رؤوسه $P_1(1,1,0),\ \ P_2(3,0,5),\ \ P_3(0,4,3)$.

$\overrightarrow{P_1P_2} = (2,-1,5)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (-1,3,3)$

$\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right) = (-18,-11,5)$

$A = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{324+121+25} = \frac{1}{2}\sqrt{470}$ وحدة مساحة

فضاء المتجهات

ملاحظة: يمكن تعميم التعاريف والمبرهنات المعطاة في الفصل الثالث حول فضاء-2 R^2 وفضاء-3 R^3 الى فضاء نوني R^n (فضاء-n). أي ان المتجه يكون $\vec{u} = (u_1,\ u_2\ , \cdots,\ u_n)$.

تعريف: لتكن V مجموعة غير خالية نعرف عليها عمليتا الجمع والضرب في اعداد حقيقية، نسمي عناصر V متجهات ويقال ان V فضاء متجهات على حقل الاعداد الحقيقية اذا تحققت الشروط الاتية:

1. اذا كان $\vec{u},\ \vec{v}$ عنصرين من V فان $\vec{u}+\vec{v}$ ينتمي الى V.
2. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ لكل $\vec{u},\ \vec{v}\in V$.
3. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ لكل $\vec{u},\ \vec{v},\vec{w}\in V$.
4. يوجد $\vec{0}\in V$ بحيث يكون $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ لكل $\vec{u}\in V$.
5. لكل $\vec{u}\in V$ يوجد $-\vec{u}\in V$ بحيث $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$.
6. اذا كان k عددا حقيقيا وكان $\vec{u}$ اي عنصر في V فان $\mathrm{k}\vec{u}\in V$.
7. $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$.
8. $(k_1+k_2)\vec{u}=k_1\vec{u}+k_2\vec{u}$ حيث k_1,k_2 أعداد حقيقية.
9. $k_1(k_2\vec{u})=(k_1k_2)\vec{u}$.
10. $1.\ \vec{u}=\vec{u}$

مثال: لتكن V مجموعة الدوال الحقيقية المعرفة على خط مستقيم. اذا كانت $\vec{f}=\vec{f}(x),\ \vec{g}=\vec{g}(x)$ دالتين وان k عدد حقيقي فان دالة الجمع والضرب بعدد تعرفان كالاتي:

$(\vec{f}+\vec{g})(x)=\vec{f}(x)+\vec{g}(x),\ (k\vec{f})(x)=k\vec{f}(x)$ عندئذ V تمثل فضاء متجهات.

1. نفرض ان $\vec{f},\vec{g}\in V$ وعليه فان $(\vec{f}+\vec{g})(x)=\vec{f}(x)+\vec{g}(x)$ اذن $\vec{f}+\vec{g}\in V$

4. يوجد $\vec{0}(x)\in V$ بحيث ان

$$(\vec{f}+\vec{0})(x)=\vec{f}(x)+\vec{0}(x)=\vec{f}(x),\quad (\vec{0}+\vec{f})(x)=\vec{0}(x)+\vec{f}(x)=\vec{f}(x)$$

5. لكل $\vec{f}\in V$ يوجد $-\vec{f}\in V$ بحيث ان

$$(\vec{f}+(-\vec{f}))(x)=\vec{f}(x)+(-\vec{f})(x)=\vec{f}(x)-\vec{f}(x)=\vec{0}(x)$$

$$(-\vec{f}+\vec{f})(x)=-\vec{f}(x)+\vec{f}(x)=\vec{0}(x)$$

6. نفرض ان $\vec{f}\in V$ وان k أي عدد فان $k\vec{f}(x)=(k\vec{f})(x)$

$\therefore\ k\vec{f}\in V$

تعريف: لتكن W مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متجهات V. تسمى W فضاء جزئي من V اذا كانت W فضاء متجهات بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب بعدد المعرفيتن على V.

مبرهنة: اذا كانت W مجموعة جزئية غير خالية من فضاء متجهات V فان W فضاء جزئي من V اذا وفقط اذا تحقق الشرطان:

أ. $\forall \vec{u}, \quad \vec{v} \in W \to \vec{u} + \vec{v} \in W$ اي ان W مغلقة لعملية جمع المتجهات.

ب. $\forall \vec{u} \in W, \quad k \in R \to k\vec{u} \in W$ اي ان W مغلقة لعملية ضرب المتجهات بعدد.

ملاحظة: لكل فضاء متجهات V يوجد على الاقل فضاءان جزئيان هما V نفسه و $\{\vec{0}\}$ المؤلفة من المتجه الصفري فقط ويسمى الفضاء الجزئي الصفري.

مثال: لتكن $V = R^3$ ولتكن $W = \{(a, b, 0): a, b \in R\}$. هل ان W فضاء جزئي؟

$\because \quad (0,0,0) \in W \quad \therefore W \neq \emptyset$

نفرض ان $\vec{u} = (a_1, b_1, 0), \quad \vec{v} = (a_2, b_2, 0) \in W$

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1, b_1, 0) + (a_2, b_2, 0) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 0) \in W$$

$$k\vec{u} = k(a_1, b_1, 0) = (ka_1, kb_1, 0) \in W$$

اذن W فضاء جزئي.

مثال: هل ان $M = \{a + bx + cx^2: a + 2b - c = 1\}$ فضاء جزئي من الفضاء $P_2(R)$ (فضاء متعددات الحدود من الدرجة الثانية على الحقل R؟

ليكن $A = a_1 + b_1x + c_1x^2, \quad B = a_2 + b_2x + c_2x^2 \in M$.

بحيث ان $a_1 + 2b_1 - c_1 = 1, \quad a_2 + 2b_2 - c_2 = 1$.

$\because A + B = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2$

$\therefore a_1 + a_2 + 2(b_1 + b_2) - (c_1 + c_2) = 1$

$$a_1 + 2b_1 - c_1 + a_2 + 2b_2 - c_2 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

لكن $2 \neq 1$

$\therefore A + B \notin M$

$\therefore M$ ليست مغلقة لعملية الجمع.

$\therefore M$ ليست فضاء جزئي من الفضاء $P_2(R)$.

مثال: اذا كان $U, \quad W$ فضائين جزئيين من فضاء متجهات V فان $U \cap W$ فضاء جزئي من V. برهن ذلك.

$\because \quad U, \quad W$ فضائين جزئيين.

$\therefore \vec{0} \in U, \quad \vec{0} \in W$ وبهذا فان $\vec{0} \in U \cap W$ اي ان $U \cap W \neq \emptyset$

1. نفرض ان $\vec{u}, \vec{v} \in U \cap W$

$\therefore \vec{u}, \vec{v} \in U, \; \vec{u}, \vec{v} \in W$

وبالتالي فان $\vec{u} + \vec{v} \in W, \qquad \vec{u} + \vec{v} \in U,$

وعليه $\vec{u}+\vec{v}\in U\cap W$

2. نفرض ان $\vec{u}\ \in U\cap W$

$\therefore\ \vec{u}\in U,\ \ \vec{u}\in W$

وبالتالي فان $k\vec{u}\in W$,$k\vec{u}\in U$ حيث k أي عدد حقيقي

وعليه $k\vec{u}\in U\cap W$

ولهذا فان $U\cap W$ فضاء جزئي من V.

التركيب الخطي، الارتباط الخطي والاستقلال الخطي

تعريف: ليكن V فضاء متجهات وان $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\cdots,\ \vec{v}_n$ متجهات في V يقال للمتجه $\vec{v}$ في V بانه تركيب خطي (Linear Combination) من $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\cdots,\ \vec{v}_n$ اذا امكن التعبير عن $\vec{v}$ بالشكل:
$\vec{v}=k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+\cdots+k_n\vec{v}_n$ حيث $k_1,\ k_2,\cdots,\ k_n$ اعداد حقيقية.

مثال: ليكن $\vec{v}_1=(1,2,1),\ \vec{v}_2=(1,0,-3),\ \vec{v}_3=(-1,0,0)$ متجهات من R^3 هل ان $\vec{v}=(2,-2,5)$ تركيب خطي من $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$؟

$$\vec{v}=k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+k_3\vec{v}_3$$
$$(2,-2,5)=k_1(1,2,1)+k_2(1,0,-3)+k_3(-1,0,0)$$
$$(2,-2,5)=(k_1,2k_1,k_1)+(k_2,0,-3k_2)+(-k_3,0,0)$$
$$(2,-2,5)=(k_1+k_2-k_3,2k_1,k_1-3k_2)$$
$$k_1+k_2-k_3=2$$
$$2k_1=-2$$
$$k_1-3k_2=5$$
$$2k_1=-2\Longrightarrow k_1=-1$$
$$k_1-3k_2=5\Longrightarrow -1-3k_2=5\Longrightarrow -3k_2=6\Longrightarrow k_2=-2$$
$$k_1+k_2-k_3=2\Longrightarrow -1-2-k_3=2\Longrightarrow k_3=-5$$

اذن $\vec{v}$ تركيب خطي من $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$ بالشكل: $\vec{v}=-\vec{v}_1-2\vec{v}_2-5\vec{v}_3$.

تعريف: اذا كانت $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\cdots,\ \vec{v}_n$ متجهات في فضاء متجهات V وان كل متجه في V يمكن التعبير عنه كتركيب خطي من $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\cdots,\ \vec{v}_n$ فان هذه المتجهات تولد (generate) او تنشئ (span) V.

مثال: هل ان المتجهات $\vec{v}_1=(3,1,2),\ \ \vec{v}_2=(1,0,1),\ \vec{v}_3=(2,5,-3)$ تولد او تنشئ فضاء R^3.
نفرض ان $\vec{u}=(u_1,\ u_2,u_3)$ اي متجه غير صفري من R^3.

$$\vec{u}=k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+k_3\vec{v}_3$$
$$(u_1,\ u_2,u_3)=k_1(3,1,2)+k_2(1,0,1)+k_3(2,5,-3)$$
$$(u_1,\ u_2,u_3)=(3k_1,k_1,2k_1)+(k_2,0,k_2)+(2k_3,5k_3,-3k_3)$$
$$(u_1,u_2,u_3)=(3k_1+k_2+2k_3,k_1+5k_3,2k_1+k_2-3k_3)$$

اي ان:

$$3k_1+k_2+2k_3=u_1$$
$$k_1+5k_3=u_2$$
$$2k_1+k_2-3k_3=u_3$$

ناخذ محدد مصفوفة المعاملات

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 0$$

بما ان المحدد يساوي صفر اذن لايوجد للمنظومة حل وعليه فانه لايمكن التعبير عن كل متجه كتركيب خطي.
وبالتالي فان المتجهات $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ لاتولد فضاء R^3.

ملاحظة: منظومة المعادلات الخطية التي ليس لها حل تسمى منظومة غير قويمة (غير متناسقة) اما المنظومة التي لها حل فتسمى منظومة قويمة (متناسقة). منظومة المعادلات الخطية تكون قويمة اذا وفقط اذا كانت مصفوفة المعاملات قابلة للانعكاس اي ان محدد مصفوفة المعاملات لايساوي صفر.

تعريف: يقال لمجموعة المتجهات $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ من فضاء متجهات V بانها مرتبطة خطيا (Linearly dependent)
اذا وفقط اذا وجدت اعداد $k_1, k_2, \cdots, k_n$ ليست جميعها اصفار بحيث $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n = \vec{0}$.
ويقال لمجموعة المتجهات $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ من فضاء متجهات V بانها مستقلة خطيا (Linearly Independent)
اذا وفقط اذا كان $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n = \vec{0}$ فان $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.

مثال: هل ان المتجهات $\vec{u}_1 = (1,0,0),\ \vec{u}_2 = (0,1,0),\ \vec{u}_3 = (0,0,1),\ \vec{u}_4 = (2,3,-5)$ مرتبطة خطيا ام مستقلة خطيا؟

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 + k_4\vec{u}_4 = \vec{0}$$
$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) + k_4(2,3,-5) = \vec{0}$$
$$(k_1, 0,0) + (0, k_2, 0) + (0,0,k_3) + (2k_4, 3k_4, -5k_4) = \vec{0}$$
$$(k_1 + 2k_4, k_2 + 3k_4, k_3 - 5k_4) = \vec{0}$$
$$\begin{aligned} k_1 \quad\quad + 2k_4 &= 0 \\ k_2 \quad + 3k_4 &= 0 \\ k_3 - 5k_4 &= 0 \end{aligned}$$

واضح انه يوجد عدد غير منته من الحلول وعليه فان احد الحلول هو الحل غير الصفري، اي انه ليس جميع الاعداد k_1, k_2, k_3, k_4 أصفار. اذن مجموعة المتجهات $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ مرتبطة خطيا.

ملاحظة: عندما $n = 1$ فان المتجه الصفري $\vec{0}$ مرتبط خطيا لان $k\vec{0} = \vec{0}$ لاي عدد. اما المتجه غير الصفري $\vec{v}_1$ فهو مستقل خطيا لان $k\vec{v}_1 = \vec{0}$ اذا وفقط اذا كان $k = 0$.

مثال: هل ان المتجهات $\vec{u}_1 = (1,0,0),\ u_2 = (0,1,0),\ \vec{u}_3 = (0,0,1)$ مرتبطة خطيا ام مستقلة خطيا؟

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 = \vec{0}$$
$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = \vec{0}$$
$$(k_1, 0,0) + (0, k_2, 0) + (0,0,k_3) = \vec{0}$$
$$(k_1, k_2, k_3) = \vec{0}$$

$$k_1 \quad\quad = 0$$
$$k_2 \quad = 0$$
$$k_3 = 0$$

واضح ان جميع الاعداد $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.
اذن مجموعة المتجهات $\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}$ مستقلة خطيا.

مبرهنة: اذا كانت المتجهات $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 ,\cdots,\ \vec{v}_n$ مرتبطة خطيا، فان احد المتجهات على الاقل يمكن كتابته على شكل تركيب خطي بدلالة بقية المتجهات.

البرهان: بما ان المتجهات $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 ,\cdots,\ \vec{v}_n$ مرتبطة خطيا
اذن توجد اعداد مثل $k_1,\ \ k_2,\cdots,\ \ k_n$ ليست جميعها اصفار بحيث ان

$$k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n = \vec{0}$$
$$k_1\vec{v}_1 = -k_2\vec{v}_2 - \cdots - k_n\vec{v}_n$$

ليكن $k_1 \neq 0$، اذن

$$\vec{v}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\vec{v}_2 - \frac{k_3}{k_1}\vec{v}_3 - \cdots - \frac{k_n}{k_1}\vec{v}_n$$

وبهذا يمكن كتابة احد المتجهات على الاقل على شكل تركيب خطي من بقية المتجهات.

نتيجة: اذا كان احد المتجهات من $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 ,\cdots,\ \vec{v}_n$ متجها صفريا فان المجموعة $\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 ,\cdots,\ \vec{v}_n\}$ مرتبطة خطيا.

البرهان: نفرض ان $\vec{v}_1$ متجه صفري.
اذن يوجد $k_1 \neq 0$ بحيث ان $k_1\vec{v}_1 = 0$
لذلك يمكن كتابة المتجهات $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 ,\cdots,\ \vec{v}_n$ كارتباط خطي بالشكل $k_1\vec{v}_1 + 0.\vec{v}_2 + \cdots + 0.\vec{v}_n = \vec{0}$

مبرهنة: اذا كانت المتجهات $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 ,\cdots,\ \vec{v}_n$ مستقلة خطيا وكانت المتجهات $\vec{u},\ \ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2 ,\cdots,\ \vec{v}_n$ مرتبطة خطيا، فانه يمكن كتابة $\vec{u}$ على شكل تركيب خطي من $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 ,\cdots,\ \vec{v}_n$.

البرهان: بما ان المتجهات $\vec{u},\ \ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2 ,\cdots,\ \vec{v}_n$ مرتبطة خطيا
اذن توجد اعداد مثل $k,\ \ k_1,\ \ k_2,\cdots,\ \ k_n$ ليست جميعها اصفار بحيث ان

$$k\vec{u} + k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \cdots + k_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

واضح ان $k \neq 0$ لانه اذا كانت $k = 0$ لاصبحت المتجهات $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 ,\cdots,\ \vec{v}_n$ مرتبطة خطيا. اذن

$$k\vec{u} = -k_1\vec{v}_1 - k_2\vec{v}_2 - \cdots - k_n\vec{v}_n$$

اي ان

$$\vec{u} = -\frac{k_1}{k}\vec{v}_1 - \frac{k_2}{k}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{k_n}{k}\vec{v}_n$$

تركيب خطي من $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 ,\cdots,\ \vec{v}_n$.

القاعدة والبعد

تعريف: اذا كان V فضاء متجهات وان $S = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2 ,\cdots,\ \vec{v}_r\}$ مجموعة منتهية من متجهات V. يقال بان S قاعدة للفضاء V اذا كان

1. S مستقلة خطيا.
2. S تولد الفضاء V.

مثال1: لتكن $V = R^3$ وان $S = \{(1,0,0), \quad (0,1,0), \quad (0,0,1)\}$ هل ان S تؤلف قاعدة للفضاء $V = R^3$؟

لكي نثبت ان S مستقلة خطيا، نفرض وجود اعداد مثل k_1, k_2, k_3 بحيث ان

$$k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = \vec{0}$$

$$(k_1, 0,0) + (0, k_2, 0\ ) + (0,0, k_3) = \vec{0}$$

$$(k_1, k_2, k_3) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} k_1 \qquad &= 0 \\ k_2 \quad &= 0 \\ k_3 &= 0 \end{aligned}$$

واضح ان جميع الاعداد $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. وهذا يؤدي الى ان S مستقلة خطيا.

نفرض ان $\vec{u} = (u_1, \ u_2\ , u_3)$ اي متجه غير صفري من R^3 بحيث ان

$$(u_1, \ u_2\ , u_3) = h_1(1,0,0) + h_2(0,1,0) + h_3(0,0,1)$$

$$(u_1, \ u_2\ , u_3) = (h_1, 0,0) + (0, h_2, 0\ ) + (0,0, h_3)$$

$$(u_1, \ u_2\ , u_3) = (h_1, h_2, h_3)$$

$$h_1 = u_1, \ \ h_2 = u_2, \ \ h_3 = u_3$$

$$\vec{u} = u_1(1,0,0) + u_2(0,1,0) + u_3(0,0,1)$$

واضح ان اي متجه $\vec{u}$ يمكن التعبير عنه كتركيب خطي من متجهات $S = \{(1,0,0), \quad (0,1,0), \quad (0,0,1)\}$.

اذن S تولد الفضاء V. وعليه فان S قاعدة للفضاء V. ويطلق عليها القاعدة الاعتيادية للفضاء R^3.

مثال2: هل ان المجموعة $S = \{t^2 + 1, \quad t - 1, \quad 2t + 2\}$ قاعدة لفضاء متجهات حدوديات الدرجة الثانية P_2.

لكي نثبت ان S مستقلة خطيا، نفرض وجود اعداد مثل k_1, k_2, k_3 بحيث ان

$$k_1(t^2 + 1) + k_2(t - 1) + k_3(2t + 2) = \vec{0}$$

$$(k_1 t^2 + k_1) + \ (k_2 t - k_2) + \ (2k_3 t + 2k_3) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} k_1 \qquad\qquad &= \vec{0} \\ k_2 + 2k_3 &= \vec{0} \\ k_1 - k_2 + 2k_3 &= \vec{0} \end{aligned}$$

واضح ان جميع الاعداد $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. وهذا يؤدي الى ان S مستقلة خطيا.

نفرض ان $at^2 + bt + c$ اي متجه غير صفري من P_2 بحيث ان

$$at^2 + bt + c = h_1(t^2 + 1) + h_2(t - 1) + h_3(2t + 2)$$

$$at^2 + bt + c = \ (h_1 t^2 + h_1) + (h_2 t - h_2) + \ (2h_3 t + 2h_3)$$

$$at^2 + bt + c = h_1 t^2 + (h_2 + 2h_3)t + h_1 - h_2 + 2h_3$$

$$\begin{aligned} h_1 \qquad\qquad &= a \\ h_2 + 2h_3 &= b \\ h_1 - h_2 + 2h_3 &= c \end{aligned}$$

$$h_1 = a, \ \ h_2 = (b - c + a)/2\ , \ \ h_3 = (b + c - a)/4$$

$$at^2 + bt + c = a(t^2 + 1) + ((b - c + a)/2)(t - 1) + ((b + c - a)/4)(2t + 2)$$

واضح ان اي متجه $at^2 + bt + c$ يمكن التعبير عنه كتركيب خطي من متجهات $S = \{t^2 + 1, \quad t - 1, \quad 2t + 2\}$

اذن S تولد الفضاء P_2. وعليه فان S قاعدة للفضاء P_2.

تعريف: بعد فضاء متجهات غير صفري V هو عدد المتجهات في قاعدة V وسوف نرمز لبعد V بالرمز $\dim V$.
من الواضح ان $\dim\left\{\vec{0}\right\} = 0$. اي ان بعد فضاء المتجهات هو عدد المتجهات المستقلة خطيا.

في المثال1: $\dim V = 3$ ،وفي المثال2: $\dim V = 3$.

مثال3: اذا كانت $S = \{t^2, \quad t, \quad 1\}$ مجموعة متجهات حدوديات الدرجة الثانية P_2. جد $\dim P_2$.
في البداية نوجد قاعدة الفضاء P_2.
لكي نثبت ان S مستقلة خطيا، نفرض وجود اعداد مثل $k_1,$ k_2, k_3 بحيث ان

$$k_1t^2 + k_2t + k_3 = \vec{0}$$

واضح ان جميع الاعداد $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. وهذا يؤدي الى ان S مستقلة خطيا.
نفرض ان $at^2 + bt + c$ اي متجه غير صفري من P_2 بحيث ان

$$at^2 + bt + c = h_1t^2 + h_2t + h_3$$

$$h_1 = a,\ h_2 = b,\ h_3 = c$$

واضح ان اي متجه $at^2 + bt + c$ يمكن التعبير عنه كتركيب خطي من متجهات $S = \{t^2, \quad t, \quad 1\}$
اذن S تولد الفضاء P_2. وعليه فان S قاعدة للفضاء P_2. لهذا فان $\dim P_2 = 3$.

الفصل الرابع/ التحويلات الخطية

تعريف: لتكن $S, \quad S'$ اية مجموعتين من العناصر، يقال ان T هو تحويل من S الى S' $(T: S \longrightarrow S')$ اذا كان لكل عنصر من S بواسطة التحويل T صورة واحدة في S'.
يطلق على S منطلق (domain) التحويل T وعلى S' مستقر (codomain) التحويل T ويطلق على $T(S)$ مدى (range) التحويل T.

ملاحظة: عند دراسة التحويلات يجب الانتباه الى الاتي:
تحديد المنطلق، تحديد صورة كل عنصر من المنطلق، وملاحظة فيما اذا كان المدى يؤلف مجموعة الصور او اكثر.

انواع التحويلات

1. **التحويل المتباين** (one-to-one or bijective): يقال للتحويل T بانه متباين عندما لاتوجد صورة مشتركة لاي عنصرين مختلفين من المنطلق. بمعنى اخر عندما يكون كل عنصر من المدى هو صورة لعنصر واحد فقط من المنطلق. اي اذا كان $T: A \longrightarrow B$ فان $T(a_1) = T(a_2) \longrightarrow a_1 = a_2$ أو $a_1 \neq a_2 \longrightarrow T(a_1) \neq T(a_2)$ حيث $a_1, \quad a_2 \in A$.

2. **التحويل الغامر او الشامل** (onto or surjective): ليكن التحويل $T: A \longrightarrow B$، يسمى T تحويلا شاملا اذا كان $T(A) = B$. اي اذا كان كل عنصر من B هو صورة لعنصر واحد على الاقل من A.

مثال1: ليكن $f: R \longrightarrow R$ تحويل معرف كالاتي: $f(x) = x^3$. هل ان التحويل متباين وشامل؟

نفرض ان $x_1, \quad x_2 \in R \Longleftarrow$ $\qquad f(x_1) = f(x_2)$

$$x_1^3 = x_2^3$$
$$x_1 = x_2$$

اذن f تحويل متباين.

نفرض ان $f(x) = y \in R$

اذن$x^3 = y \Longleftarrow x = \sqrt[3]{y}$ وواضح ان$x = \sqrt[3]{y} \in R$ اذن f تحويل شامل.

مثال2: ليكن $f: R \longrightarrow R$ تحويل معرف كالاتي: $f(x) = x^2$. هل ان التحويل متباين وشامل؟

نفرض ان $x_1, \quad x_2 \in R \Longleftarrow$ $\qquad f(x_1) = f(x_2)$

$$x_1^2 = x_2^2$$
$$x_1 = x_2, x_1 = -x_2$$

اذن f تحويل غير متباين.

نفرض ان $f(x) = y \in R$

اذن $x^2 = y \Longleftarrow x = \mp\sqrt{y}$ بما ان $y \in R$ اي ان y لها قيم سالبة وموجبة اذن $x = \mp\sqrt{y} \notin R$ عندما y سالبة.

اذن f تحويل غير شامل.

التحويل الخطي

تعريف: اذا كان T تحويل (دالة) من فضاء متجهات V الى فضاء متجهات W. يقال بان T تحويل خطي اذا كان لكل متجهين $\vec{u}, \vec{v}$ من V فان:

1. $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$.
2. $T(k\vec{u}) = kT(\vec{u})$ حيث k أي عدد.

مثال1: اذا كانت $T: R^2 \longrightarrow R^3$ دالة معرفة كالاتي: $T[(x, y)] = \big(y,\ x + 2y,\ 2x - y\big)$، هل ان T تحويل خطي؟

نفرض ان $\vec{u} = \big(x_1,\ y_1\big),\ \vec{v} = (x_2,\ y_2) \in R^2$

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T[(x_1,\ y_1) + (x_2, y_2)] = T[(x_1 + x_2, y_1 + y_2)]$$
$$= [(y_1 + y_2, (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2), 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)]$$
$$T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T\big[\big(x_1,\ y_1\big)\big] + T[(x_2, y_2)]$$
$$= (y_1,\ x_1 + 2y_1, 2x_1 - y_1) + (y_2, x_2 + 2y_2, 2x_2 - y_2)$$
$$= [(y_1 + y_2, x_1 + 2y_1 + x_2 + 2y_2, 2x_1 - y_1 + 2x_2 - y_2)]$$
$$= [(y_1 + y_2, (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2), 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)]$$

نلاحظ ان $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$.

2. $T(k\vec{u}) = T[k(x_1,\ y_1)] = T[(kx_1,\ ky_1)] = (ky_1, kx_1 + 2\, ky_1, 2kx_1 - ky_1)$

$$kT(\vec{u}) = kT[(x_1,\ y_1)] = k(y_1,\ x_1 + 2y_1, 2x_1 - y_1) = (ky_1, kx_1 + 2ky_1, 2kx_1 - ky_1)$$

واضح ان $T(k\vec{u}) = kT(\vec{u})$، اذن T تحويل خطي.

مثال2: اذا كانت $T: R^2 \longrightarrow R^2$ دالة معرفة كالاتي: $T\big[\big(x, \quad y\big)\big] = \big(x, \quad y + 1\big)$، هل ان T تحويل خطي؟

نفرض ان $\vec{u} = (x_1, \quad y_1), \quad \vec{v} = (x_2, \quad y_2) \in R^2$

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = T[(x_1 + x_2, y_1 + y_2)]$$
$$= (x_1 + x_2, \ y_1 + y_2 + 1)$$
$$T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T[(x_1, y_1)] + T[(x_2, y_2)]$$
$$= (x_1, y_1 + 1) + (x_2, \ y_2 + 1)$$
$$= (x_1 + x_2, \ y_1 + 1 + y_2 + 1)$$
$$= (x_1 + x_2, \ y_1 + y_2 + 2)$$

من الواضح ان $T(\vec{u} + \vec{v}) \neq T(\vec{u}) + T(\vec{v})$، اذن T تحويل غير خطي.

بعض انواع التحويلات الخطية

1. التحويل $T: V \longrightarrow W$ بحيث ان $T(\vec{v}) = \vec{0}$ لكل $\vec{v} \in V$ هو تحويل خطي يطلق عليه اسم التحويل الصفري.
2. التحويل $T: V \longrightarrow W$ بحيث ان $T(\vec{v}) = \vec{v}$ لكل $\vec{v} \in V$ هو تحويل خطي يطلق عليه اسم التحويل الذاتي.
3. التحويل $T: V \longrightarrow W$ بحيث ان $T(\vec{v}) = k\vec{v}$ لكل $\vec{v} \in V$ و $k \in R$ هو تحويل خطي يطلق عليه اسم تمدد اذا كان $k > 1$، ويسمى انكماش اذا كان $0 < k < 1$.

مبرهنة: اذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فان

1. $T\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$.
2. $T(-\vec{v}) = -T(\vec{v})$ لكل $\vec{v} \in V$.
3. $T(\vec{v} - \vec{w}) = T(\vec{v}) - T(\vec{w})$ لكل $\vec{v}, \quad \vec{w} \in V$.

البرهان: ليكن $\vec{v}$ أي متجه في V

1. بما ان $0\vec{v} = \vec{0}$ اذن $T\left(\vec{0}\right) = T\left(0\vec{v}\right) = 0T(\vec{v}) = \vec{0}$
2. $T(-\vec{v}) = T(-1.\vec{v}) = -T(\vec{v})$
3. $T(\vec{v} - \vec{w}) = T(\vec{v} + (-1).\vec{w}) = T(\vec{v}) + (-1).T(\vec{w}) = T(\vec{v}) - T(\vec{w})$

نواة ومدى التحويل

تعريف: اذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا، فان مجموعة المتجهات في V التي صورتها $\vec{0}$ بفعل التطبيق T تسمى نواة T (kernel of T) ويرمز لها $ker(T)$ ، $ker(T) = \left\{\vec{v} \in V: T(\vec{v}) = \vec{0}\right\}$.

مثال1: اذا كان $T: R^2 \longrightarrow R^2$ هو عملية الضرب بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ بين اي المتجهات التالية تقع في نواة T $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ واي من المتجهات تقع في مدى T $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ ؟

$$T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \in ker(T)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \notin ker(T)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a - b \\ -8a + 4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$2a - b = 1 \ \dots\dots\dots (1) \quad \times 4$

$-8a + 4b = -4 \ \dots\dots\dots (2)$

$0 + 0 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \in ran(T)$

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a - b \\ -8a + 4b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$2a - b = 5 \ \dots\dots\dots (1) \quad \times 4$

$-8a + 4b = 0 \ \dots\dots\dots (2)$

$0 + 0 \neq 20 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \notin ran(T)$

مثال2: اذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلا صفريا جد نواة T ومدى T.

بما ان T تحويل صفري أي أن $T(\vec{v}) = \vec{0}, \quad \forall\, \vec{v} \in V$

اذن $ker(T) = V$.

بما ان الصورة الوحيدة الممكنة بواسطة التحويل T هي $\vec{0}$

اذن $ran(T) = \{\vec{0}\}$.

مبرهنة: اذا كان $T: V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فان

1. $ker(T)$ فضاء جزئي من V.
2. $ran(T)$ فضاء جزئي من W.

البرهان: 1. ليكن $\vec{v}_1, \quad \vec{v}_2 \in ker(T)$ اذن $T(\vec{v}_1) = \vec{0}, \quad T(\vec{v}_2) = \vec{0}$

$T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T\left(\vec{v}_1\right) + T\left(\vec{v}_2\right) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

اذن $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in ker(T)$

$T(k\vec{v}_1) = kT(\vec{v}_1) = k.\vec{0} = \vec{0}$

اذن $k\vec{v}_1 \in ker(T)$ حيث k أي عدد

وعليه فان $ker(T)$ فضاء جزئي من V.

2. ليكن $\vec{w}_1, \quad \vec{w}_2 \in ran(T)$ اذن يوجد $\vec{a}_1, \quad \vec{a}_2 \in V$ بحيث ان $T(\vec{a}_1) = \vec{w}_1, \quad T(\vec{a}_2) = \vec{w}_2$

$T(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = T\left(\vec{a}_1\right) + T\left(\vec{a}_2\right) = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$

اذن $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in ran(T)$

$T(k\vec{a}_1) = kT(\vec{a}_1) = k\vec{w}_1$

اذن $k\vec{w}_1 \in ran(T)$ حيث k أي عدد

وعليه فان $ran(T)$ فضاء جزئي من W.