المعادلات القابلة لفصل المتغيرات Separable Equations

وهي المعادلة التي تكون من الشكل

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

الدالة ***f(x,y)*** **يجب أن تكون مستمرة بالنسبة للمتغير x.**

<u>وتكون على عدة حالات:</u>

1) **إذا كانت هذه المعادلة تابعة لــ x فقط:**

$$y' = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x) \cdot dx$$

عندئذ بتكامل الطرفين نجد أن:

$$y = \int f(x) \cdot dx + c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية في هذه الحالة.

2) **إذا كانت المعادلة تابعة لــ y فقط:**

$$y' = f(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow dy = f(y) \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{f(y)}$$

عندئذ بتكامل الطرفين نجد أن:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c$$

وهو الحل العام للمعادلة.

3) **إذا كانت المعادلة التفاضلية تابعة لــ x و y قابلة لفصل المتغيرات تكتب بالشكل التالي:**

$$y' = f(x,y) \Rightarrow f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot dx + f_2(x) \cdot g_2(y) \cdot dy = 0$$

حيث f_1, f_2, g_1, g_2 دوال مستمرة ومعرفة بالنسبة لــ x و y على أي مجال مغلق من $\mathbb{R}$.

نقسّم طرفي المعادلة على المقدار: $f_2(x) \cdot g_1(y) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = 0$$

وهي معادلة تفاضلية يمكن إيجاد الحل العام لها بفصل المتغيرات.

المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى ذات الصيغة

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$$

تسمى بالمعادلة التي تنفصل متغيراتها أو قابلة لفصل المتغيرات.

ملاحظة هامة جداً: عند حل المعادلة التفاضلية المعطاة في السؤال يجب وضعها بالصيغة القياسية للحالات الثلاث أعلاه.

مثال 1: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $x\frac{dy}{dx} = 1 + x$

الحل:

بقسمة طرفي المعادلة على x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{x}$$

بقسمة الحدود البسط على الحد في المقام نجد أن

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + 1$$

الان بضرب طرفي المعادلة في dx ينتج لدينا

$$\Rightarrow dy = \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx$$

بتكامل طرفي المعادلة بالنسبة لـــ x نحصل على (لا تنسى إضافة ثابت التكامل لأنه تكامل غير محدد)

$$\Rightarrow \int dy = \int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx \Rightarrow y = \ln|x| + x + c$$

مثال 2: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = 3x^2y$

<u>الحل:</u>

بضرب طرفي المعادلة بالمقدار $\frac{dx}{y}$ لغرض فصل المتغيرات نحصل على

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = 3x^2 dx$$

بتكامل طرفي المعادلة بالنسبة لــ x نحصل على

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 3x^2\, dx \Rightarrow \ln|y| = x^3 + c \Rightarrow y = e^{x^3+c}$$

وهو الحل العام المطلوب.

<u>مثال 3:</u> جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(1-x)dy - (1+y)dx = 0$.

<u>الحل:</u>

نقوم بفصل المتغيرات بقسمة المعادلة التفاضلية على المقدار $(1+y)(1-x)$ فنجد أن

$$\frac{(1-x)}{(1-x)(1+y)}dy - \frac{(1+y)}{(1-x)(1+y)}dx = 0$$

بتكامل طرفي المعادلة بالنسبة لــ x نحصل على

$$\int \frac{dy}{1+y} - \int \frac{dx}{1-x} = 0 \Rightarrow \ln(1+y) + \ln(1-x) = c$$

باستخدام خواص الدالة اللوغاريتمية نبسط المقدار أعلاه

$$\ln[(1+y)(1-x)] = c$$

وبأخذ **e للطرفين ينتج**

$$e^{\ln[(1+y)(1-x)]} = e^c \Rightarrow (1+y)(1-x) = c_1 \quad (e^c = c_1)$$

وهو الحل العام للمعادلة.

<u>ملاحظة:</u> يوجد الكثير من المعادلات التفاضلية التي لا يمكن فصل متغيراتها مباشرة ولكنها تؤول الى معادلات تفاضلية قابلة للفصل فمثلاً ان المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \quad ; a, b, c \text{ ثوابت}$$

هي معادلة تفاضلية لا يمكن فصل المتغيرات فيها مباشرة ولذلك نجري عليها التحويل الاتي:

أولاً نفرض أن

$$z = ax + by + c$$

ثم نفاضل (نشتق) الطرفين

$$\Longrightarrow dz = a \cdot dx + b \cdot dy$$

نقسم الطرفين على dx

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \cdot \frac{dy}{dx}$$

ثم نعوض $\frac{dy}{dx}$ **من المعادلة أعلاه فيكون**

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \cdot f(z)$$

وهذه المعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة قابلة لفصل المتغيرات وبالتالي نكتب

$$dx = \frac{dz}{b \cdot f(z) + a}$$

وبتكامل الطرفين نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية وهو

$$x = \int \frac{dz}{b \cdot f(z) + a} + c$$

<u>مثال:</u> جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = x + y + 1$

<u>الحل:</u>

نكتب المعادلة بالشكل

$$\frac{dy}{dx} = x + y + 1$$

نلاحظ أنها غير قابلة لفصل المتغيرات مباشرة لذلك نفرض

$$z = x + y + 1$$

ثم نفاضل (نشتق) الطرفين

$$\Longrightarrow dz = dx + dy$$

نقسم الطرفين على dx

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

ثم نعوض $\frac{dy}{dx}$ من المعادلة الأساسية فيكون

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + z$$

وهذه المعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة قابلة لفصل المتغيرات وبالتالي نكتب

$$dx = \frac{dz}{1 + z}$$

وبمكاملة الطرفين نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x = \ln|1 + z| + \ln c$$

بإرجاع قيمة z الى أصلها وهي $(z = x + y + 1)$

$$\Longrightarrow x = \ln|x + y + 2| + \ln c$$

وباستخدام خواص الدالة اللوغاريتمية نجد أن

$$\Longrightarrow x = \ln[(x + y + 2)c]$$

وبأخذ e للطرفين نجد أن

$$\Longrightarrow e^x = e^{\ln[(x+y+2)c]} \Longrightarrow c(x + y + 2) = e^x \Longrightarrow y = e^x - c(x + 2)$$

واجب بيتى HOMEWORK

جد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

$$1)\ xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$2)\ (y^2 + y)dx - (x^2 + x)dy = 0$$

$$3)\ \sin^2 x\ cosy\ dx + sinysecx\ dy = 0$$

$$4)\ \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{yx}$$

$$5)\ x(1 - y)\frac{dy}{dx} + y(1 + x) = 0$$

$$6)\ \frac{dy}{dx} = \cos(x + y)$$

المعادلات من النوع المتجانس او المتجانسة **Homogeneous Equations**

لتكن المعادلة التفاضلية التالية من الرتبة الأولى و الدرجة الاولى

$$\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$$

حيث ان كلاً من M, N دوال.

تعريف: الدالة المتجانسة **Homogeneous Function**

يقال عن الدالة $f(x,y)$ التابعة للمتغيرين x و y بأنها متجانسة من الدرجة n إذا تحققت العلاقة

$$\boldsymbol{f(tx,ty) = t^n f(x,y)}$$

حيث $t \neq 0$ عدد حقيقي.

اذا كانت $n=0$ فان الدالة متجانسة من الدرجة صفر.

لمعرفة كون الدالة متجانسة أم لا يمكن اخراج t عامل مشترك بعد تبديل كل من (x,y) بـ (tx,ty) وتعود الدالة كما هي.

وكمثال على ذلك فالدالة $f(x,y) = x^3 - xy^2$ تكون متجانسة من الدرجة الثالثة لأن

$$\boldsymbol{f(tx,ty) = (tx)^3 - (tx)(ty)^2 = t^3(x^3 - xy^2) = t^3 f(x,y)}$$

أما الدالة $f(x,y) = e^{\frac{y}{x}} + \sin\left(\frac{2y}{x}\right)$ فهي متجانسة من الدرجة صفر لأننا عندما نعوض بدل كل x,y بـــ tx,ty ستختصر t وتحذف

اما الدالة $f(x,y) = x + \sin y$ فهي دالة غير متجانسة.

تعريف: المعادلة التفاضلية المتجانسة

يقال للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى والتي على الصورة

$$\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$$

بأنها متجانسة إذا كانت كلاً من M, N دالة متجانسة ومن نفس الدرجة.

خطوات حل المعادلة التفاضلية المتجانسة

1- **نفرض $y = vx$.**

2- **نشتق (1) بالنسبة لـ x فنحصل على $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$.**

3- **نضرب المعادلة $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ بالمقدار dx فنحصل على $dy = vdx + xdv$.**

4- **نعوض قيمتي y, dy في المعادلة المعطاة فتصبح المعادلة قابلة لفصل المتغيرات والتي من السهل استنتاج الحل لها كما درسنا في المحاضرة السابقة.**

5- بعد إيجاد الحل نعوض بدل كل v بالقيمة $\frac{y}{x}$ ونبسط الناتج قدر الإمكان.

مثال: حل المعادلة التفاضلية $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

الحل:

نختبر الدوال $N(x, y) = 2xydy$ و $M(x, y) = x^2 + y^2$

$$N(tx, ty) = 2txtydy = t^2 2xydy = t^2 N(x, y)$$

الدالة متجانسة من الدرجة الثانية

$$M(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 M(x, y)$$

الدالة متجانسة من الدرجة الثانية

اذن الدوال متجانسة و من نفس الدرجة و عليه

نفرض $y = vx$ وباشتقاقها بالنسبة الى x نحصل على

$$dy = vdx + xdv$$

وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلة الأصلية نجد أن

$$(x^2 + v^2x^2)dx - 2vx^2(vdx + xdv) = 0$$

$$\Rightarrow x^2dx + v^2x^2dx - 2v^2x^2dx - 2vx^3dv = 0$$

وبجمع الحدود المتشابهة والبحث عن العوامل المشتركة ينتج

$$\Rightarrow x^2(1 - v^2)dx - 2vx^3dv = 0$$

بالقسمة على المقدار $(1 - v^2)x^3$ نحصل على

$$\frac{dx}{x} - \frac{2vdv}{(1 - v^2)} = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2vdv}{(1 - v^2)} = 0$$

بتكامل المقدار أعلاه نحصل على

$$\Rightarrow \ln x + \ln(1 - v^2) = \ln c$$

$$\Rightarrow \ln x(1 - v^2) = \ln c \Rightarrow x(1 - v^2) = c$$

وبإرجاع قيمة v لما يساويها وتعويضها أعلاه نجد أن

$$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = c \Rightarrow x - \frac{xy^2}{x^2} = c$$

بضرب المعادلة في x ينتج لدينا

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = cx$$

وهو الحل المطلوب للمعادلة.

HOMEWORK

أولاً: حدد فيما إذا كانت الدوال التالية متجانسة أم لا؟ وإذا كانت متجانسة حدد درجة تجانسها

1) $f(x,y) = x\ln x - y\ln y$

2) $f(x,y) = \tan\dfrac{2y}{x}$

3) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$

4) $f(x,y) = \dfrac{x^2+3xy}{x-2y}$

5) $f(x,y) = 5y + \sqrt{x^2+y^2}$

6) $f(x,y) = y^2\tan\dfrac{x}{y}$

ثانياً: أوجد الحل العام أو الخاص للمعادلات التفاضلية التالية

1) $xy' - y = \sqrt{x^2-y^2}$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-x^2}{yx}$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية اللامتجانسة (طريقة المؤثر D)

المؤثر D

يعرف المؤثر D بانه المشتقة الأولى بالنسبة الى المتغير x والتي تكون بالشكل $\frac{d}{dx}$ أي ان

$$D=\frac{d}{dx} \quad ,D^2=\frac{d^2}{dx^2} \quad ,D^n=\frac{d^n}{dx^n}$$

وتكون المعادلة التفاضلية الخطية غير اللامتجانسة من الرتبة n بالصيغة التالية:

$$(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)y=f(x) \dots\dots\dots (1)$$

كذلك يمكن كتابة المعادلة (1) بالصيغة التالية:

$$F(D)y=f(x)$$

أي ان

$$F(D)=(a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n)$$

مثال 1: يمكن كتابة المعادلة $\boldsymbol{y'''-y'+2y=0}$ بدلالة المؤثر و ستكون بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{(D^3-D+2)y=0}$$

الحل الخاص

يمكن إيجاد الحل الخاص من المعادلة التالية $F(D)y=f(x)$ اي ان

$$y_p=\frac{1}{F(D)}.f(x)$$

الحالات التي يمكن أن تأخذها الدالة f(x)

1) (a) إذا كانت $f(x)=e^{bx}$ فالحل الخاص هو

$$y_p=\frac{1}{F(D)}.e^{bx}=\frac{1}{F(b)}.e^{bx} \quad ,F(b)\neq 0$$

مثال 2:

جد الحل الخاص باستخدام طريقة طريقة المؤثر التفاضلي و من ثم جد الحل العام لها

2) $y'' + 6y' + 13y = 5e^{3x}$

الحل:

نجد الحل المتمم y_c للمعادلة المتجانسة: $y'' + 6y' + 13y = 0$

و ذلك بتحويل المعادلة المتجانسة بصيغة المؤثر التفاضلي و كتالي :

$$(D^2 + 6D + 13)y = 0$$

و من ثم نجد حل المعادلة المميزة:

باستخدام الدستور نجد ان:

$$\boldsymbol{m^2 + 6m + 13 = 0 \Rightarrow m = -3 \pm 2i}$$

ويكون الحل المتمم بالشكل

$$\boldsymbol{y_c = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)}$$

نجد الان الحل الخاص

إذا كانت $f(x) = e^{bx}$ فالحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{F(D)}.e^{bx} = \frac{1}{F(b)}.e^{bx}$$

$$y_p = \frac{5}{D^2 + 6D + 13}e^{3x} = \frac{5}{F(3)}e^{3x} = \frac{5e^{3x}}{3^2 + (6 * 3) + 13} = \frac{5e^{3x}}{40}$$

فان الحل العام هو:

$$y = y_c + \boldsymbol{y_p} = \boldsymbol{e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{e^{3x}}{8}}$$

في هذا المثال نلاحظ انه $F(b) \neq 0$

اما إذا كانت $F(b) = 0$ فالحل الخاص يكون بالشكل

$$y_p = \frac{1}{F(D)}.e^{bx} = \frac{1}{g(D).(D-b)^r}.e^{bx} = \frac{x^r e^{bx}}{g(b).r!}$$

حيث $g(b) \neq 0$ و $(D-b)^r = 0$.

مثال 1: جد الحل الخاص باستخدام طريقة المؤثر التفاضلي للمعادلة التفاضلية التالية

$$y'' - 4y = e^{2x}$$

الحل:

تكتب المعادلة أعلاه بدلالة المؤثر بالشكل التالي:

$$, b=2(D^2-4)y = e^{2x}$$

لايجاد الحل الخاص نستخدم الصيغة التالية:

$$y_p = \frac{1}{F(D)}.e^{bx} = \frac{1}{F(b)}.e^{bx}$$

$$y_p = \frac{1}{(D^2-4)}.e^{bx} = \frac{1}{F(b)}.e^{bx} = \frac{1}{0}.e^{bx}$$

نلاحظ ان $F(b) = 0$

اذن يجب ان نستخدم الصيغة التالية:

$$y_p = \frac{1}{F(D)}.e^{bx} = \frac{1}{g(D).(D-b)^r}.e^{bx} = \frac{x^r e^{bx}}{g(b).r!}$$

أي ان

$$f(D) = (D^2-4) = (D+2)(D-2)$$

اذن

$$f(D) = (D^2-4) = g(2)(D-2)^1 \Longrightarrow g(2) = 4, r = 1$$

حسب الصيغة أعلاه نجد y_p

$$y_p = \frac{xe^{2x}}{4}$$

H.M

جد الحل الخاص باستخدام طريقة المؤثر التفاضلي للمعادلة التفاضلية التالية :

$y'' - 16y = e^{4x} + e^{2x}$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة ـ طريقة تغيير الثوابت

سيكون محدد فرونسكي في طريقة تغيير الثوابت ذو دور أساسي في إيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة لذلك أدناه مراجعة سريعة لكيفية ايجاد قيمة محدد فرونسكي فقط.

محدد فرونسكي

لتكن لدينا الدالتين $y_1(x), y_2(x)$ قابلتين للاشتقاق بالنسبة الى x فاننا نعرف محدد فرونسكي بالشكل

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

حيث اننا نحصل على قيمة $y_{2,}y_{1,}$ من الحل المتمم للمعادلة المتجانسة على سبيل المثال

اذا كان

$$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

حل متمم لمعادلة متجانسة فان $y_1 = e^{3x}$ و $y_2 = e^{4x}$

لايجاد الحل الخاص بطريقة تغير الثوابت سوف نكتفي فقط معادلات من الرتبة الثانية لوجود تعقيدات في حل المعادلات من الرتب العليا بهذه الطريقة.

لحل المعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة بطريقة تغيير الثوابت نفرض ان

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

معادلة تفاضلية اعتيادية خطية من الرتبة الثانية وان $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$ هو الحل العام (الدالة المتممة) للجزء المتجانس لهذه المعادلة. فأن الحل الخاص للجزء غير المتجانس للمعادلة التفاضلية يعطى بالعلاقة التالية

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

حيث

$$v_1 = -\int \frac{f(x) y_2}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$v_2 = \int \frac{f(x)y_1}{W(y_1, y_2)} dx$$

وان y_1, y_2 هما الحلان اللذان نجدهما من خلال الدالة المتممة و $W(y_1, y_2)$ هو محدد فرونسكي لهذين الحلين ويتم ايجاده باستخدام القانون $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$.

و بهذا نحصل على y_p.

ملاحظة: لطرق التكامل دور أساسي في حل هذه الطريقة لهذا يجب على الطالب اتقان طرق التكامل.