الاحصاء والاحتمالية

المرحلة الثالثة

قسم الرياضيات

كلية التربية للعلوم الصرفة

جامعة الموصل

2021−2022

الإحصاء والاحتمالية

طبيعة علم الإحصاء

يختص علم الاحصاء بالطرق العملية لجمع وتنظيم البيانات وعرض وتحليل البيانات وكذلك الوصول الى نتائج مقبولة وقرارات سليمة على ضوء هذا التحليل. يقسم علم الإحصاء بصورة عامة إلى قسمين رئيسيين:

1. **الإحصاء الوصفي:** يشمل الطرق الإحصائية المستعملة في وصف مجموعة معينة من البيانات وتتضمن هذه الطرق الإحصائية أساليب جمع البيانات في صورة قياسات رقمية ثم تبويبها وتنظيمها وتلخيصها وعرضها بشكل يسهل فهمها ثم حساب بعض المقاييس الإحصائية مثل المتوسطات، مقاييس التشتت...الخ.

2. **الإحصاء ألاستنتاجي أو الاستدلالي:** ويشمل الطرق التي تهدف إلى عمل استنتاجات أو استدلالات حول المصدر الذي جمعت منه البيانات.

تعريف المتغير: هو أي ظاهرة تظهر اختلافات بين مفرداتها ويرمز له بالحروف الكبيرة ($X, Y, Z, ...$) والمفردة أو المشاهدة أو الملاحظة أو القيمة يرمز لها بـ $x_i, y_i, z_i ...$ على الترتيب. حيث x_i تمثل قيمة المفردة i للظاهرة،

x_1 تمثل القيمة الاولى، x_2 تمثل القيمة الثانية، .....، x_n تمثل القيمة n.

تقسم المتغيرات إلى:

1. **متغيرات وصفية أو نوعية:** هي تلك الظواهر أو الصفات التي لا يمكن قياسها مباشرة بالأرقام العددية مثل صفة لون العيون (ازرق، اسود، بني) كذلك الحالة الاجتماعية (اعزب، متزوج)... الخ.

2. **متغيرات كمية:** هي تلك الظواهر أو الصفات التي يمكن قياسها مباشرة بالأرقام العددية مثل صفة الطول، الوزن، العمر، كمية المحصول. وتنقسم المتغيرات الكمية إلى قسمين:

أ. **متغيرات مستمرة(متصلة):** وهي المتغيرات التي يعبر عنها في فترة مثل $20 < x < 40$.

ب.**متغيرات متقطعة(منفصلة):** وهي المتغيرات التي يعبر عنها بقيم متقطعة مثل عدد حوادث السيارات التي تحدث في شارع جامعة الموصل خلال السنة الدراسية أي $x = 1,2,...$.

المجتمع والعينة

المجتمع: هو عبارة عن جميع مفردات الظاهرة التي يمكن أن يأخذها المتغير مثلا في إجراء دراسة معينة على اوزان الطلبة في كلية ما، فان المجتمع هو اوزان جميع الطلبة في هذه الكلية. المجتمع إما أن يكون:

1- **مجتمع محدود:** أي يمكن حصر جميع مفرداته كما هو الحال في أوزان طلبة جامعة الموصل أو عدد عمال مصنع معين أو عدد التلاميذ في مدرسة معينة.

2- **مجتمع غير محدود:** هو المجتمع الذي من الصعب أو المستحيل حصر عدد مفرداته مثل حصر عدد السمك في نهر دجلة أو عدد الطيور من نوع معين في مدينة الموصل، وعدد البكتريا في حقل ما.

العينة: هي مجموعة جزئية من المجتمع وتشمل المشاهدات التي اختيرت بطريقة ما من المجتمع وعادة يتم اختيار العينة بطريقة عشوائية، والعشوائية تعني أن جميع مفردات المجتمع لها نفس الفرصة في أن تقع في العينة. إن دراسة المجتمع ككل قد يكون صعبا أو مستحيلا ويحتاج لوقت وجهد وتكاليف لذا استعيض عن دراسة المجتمع بدراسة العينة وصفاتها ومنها نستطيع أن نستنتج خواص المجتمع الأصلي الذي أخذت منه العينة.

الرموز الإحصائية : يستخدم $X, Y, Z, ...$ للتعبير عن المتغير، وكل قيمة من المتغير X يرمز لها بالرمز x_i فمثلا إذا كان لدينا n من المشاهدات حيث $n \geq 1$، فان المشاهدات تكون $x_1, x_2, ..., x_n$. مثلا إذا كان $n = 10$ فان المشاهدات هي $x_1, x_2, ..., x_{10}$.

بعض العمليات والقواعد المفيدة على المشاهدات

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \neq \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

إذا كان لدينا متغير آخر مثل Y وله المشاهدات $y_1, y_2, ..., y_n$ فان:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = (x_1 + x_2 + ... + x_n)(y_1 + y_2 + ... + y_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + ... + \frac{x_n}{y_n}$$

$$1 - \sum_{i=1}^{n} c = nc, \qquad example: \sum_{i=1}^{10} c = 10c = c + c + c + c + c + c + c + c + c + c$$

$$2 - \sum_{i=1}^{n} c x_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$3 - \sum_{i=1}^{n} (x_i + c) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} c = \sum_{i=1}^{n} x_i + nc$$

$$4 - \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

حيث c عدد حقيقي ثابت.

تعريف: إذا كان لكل قيمة من قيم المتغير X يوجد قيمة مقابلة لمتغير آخر Y فان الأزواج المرتبة من هذه القيم تسمى **مجتمعا ذا بعدين** ويسمى الزوج المرتب (x,y) متغيرا ذا بعدين.

مثلا اذا كان لدينا بيانات عن طول الابناء وطول ابائهم، فيمكن دراسة هذه البيانات بالإجابة على السؤالين:-

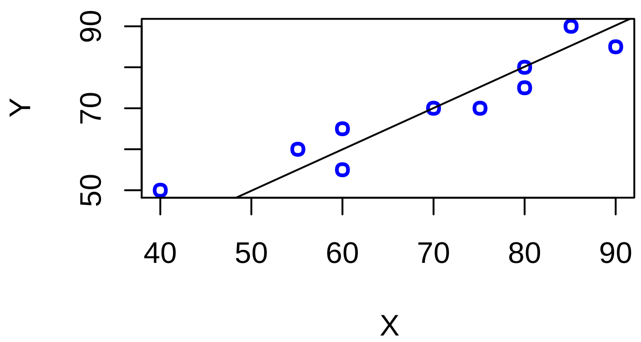
1. هل هناك علاقة بين المتغيرين؟
2. إذا كان هناك علاقة بين المتغيرين فكيف نعبر عنها بمعادلة؟

شكل الانتشار:- إذا افترضنا أن أزواج المشاهدات هي $(x_n,y_n),......,(x_2,y_2),(x_1,y_1)$ تمثل قيما للمتغيرين (X,Y) فعند تعيين هذه الأزواج على المستوي X و Y سوف نحصل على شكل الانتشار.

مثال:- الجدول التالي يمثل العلاقات المثالية لعشرة طلاب في موضوع الفيزياء X والرياضيات Y. المطلوب رسم شكل الانتشار للمشاهدات (X,Y).

X	80	60	55	40	75	85	70	60	80	90
Y	75	65	60	50	70	90	70	55	80	85

شكل الانتشار

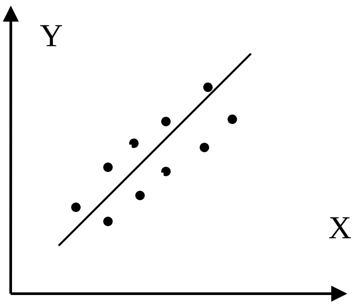


نلاحظ في شكل الانتشار (الشكل(1)) أن هناك علاقة ايجابية بين الفيزياء X والرياضيات Y.

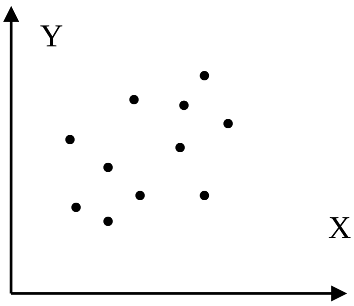
الارتباط الخطي

بالنظر إلى شكل الانتشار (الشكل(1)) نلاحظ انه يوجد ارتباط أو علاقة بين المتغيرين X و Y وغرض دراسة الارتباط هو قياس قوة الارتباط الخطي بين المتغيرين ويقاس الارتباط **بمعامل الارتباط الخطي** الذي هو عبارة عن مقياس قوة العلاقة الخطية بين المتغيرين ويقيس مدى التغير والتأثير الذي يطرأ على Y عندما تزداد X مقدارا معينا. أي انه يعطينا فكرة فيما إذا كانت Y تزداد كلما ازدادت X أو أن Y تنقص كلما ازدادت X أو أن Y لا تتأثر بالزيادة والنقصان.

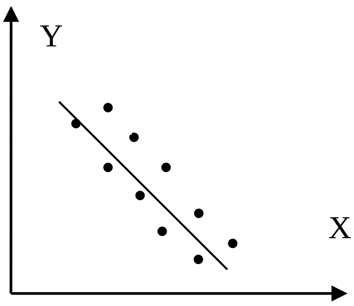
أشكال الانتشار



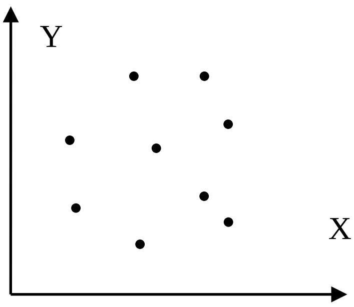
شكل (2) ارتباط خطي موجب قوي



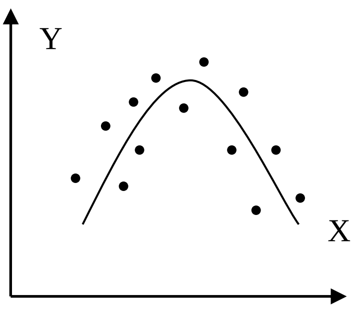
شكل (3) ارتباط خطي موجب ضعيف



شكل (4) ارتباط خطي سالب قوي



شكل (5) لا يوجد ارتباط



شكل (6) ارتباط غير خطي

يرمز لمعامل الارتباط بالرمز r ويعرف بالقانون الأتي:

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2\right)}}$$

أهم خواص معامل الارتباط

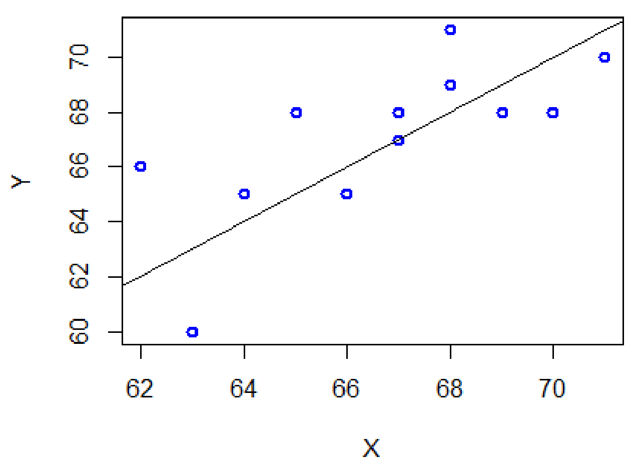
1. $-1\le r\le 1$.
2. $r=1$ ارتباط موجب عالي جدا.
3. $r=-1$ ارتباط سالب عالي جدا.
4. $r=0$ لا يوجد ارتباط (المتغير X مستقل عن المتغير Y).

مثال:– البيانات التالية تمثل أطوال (12) أب الرمز X مع أبنائهم الرمز Y المطلوب:

1. رسم شكل الانتشار. 2. حساب معامل الارتباط بين طول الأب وطول الابن.

X	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
Y	68	60	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

شكل الانتشار



نلاحظ وجود علاقة بين طول الأب وطول الابن

$$\sum x_i y_i = 65\times 68 + ... + 71\times 70 = 53729$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{65+63+.....+71}{12} = \frac{800}{12} = 66.67$$

$$\bar{y} = 67.08$$

$$n\bar{x}\,\bar{y} = 53666.7$$

$$\sum x_i^2 = 53418 \quad , \sum y_i^2 = 54093$$

$$\sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 84.67 \ , \ \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 = 90.92$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}} = \frac{53729 - 53666.7}{\sqrt{(84.67)(90.92)}} = 0.71$$

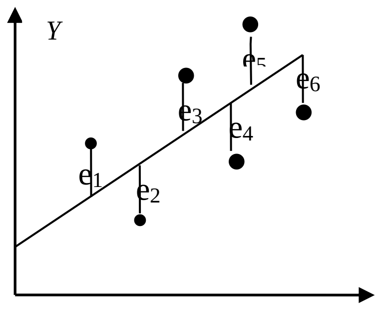
نلاحظ أن قيمة r موجبة ويمكن القول أن هناك ارتباط قوي عالي إلى حد ما بين X و Y.

الانحدار:

من أهم أغراض دراسة الانحدار هو التنبؤ. اي تنبؤ قيمة متغير إذا عرفت قيمة متغير أخر مثل تنبؤ طول الأبناء إذا عرف طول الأب أو تنبؤ كمية المبيعات من سلعة معينة إذا عرفت مصاريف الدعاية لتلك السلعة أو تنبؤ الحالة الجوية لليوم القادم أو الأسبوع القادم. ويمكن معرفة هذه التنبؤات إذا عرفت العلاقة بين المتغيرين ونعبر عن هذه العلاقة بمعادلة تسمى **معادلة خط الانحدار**. أي انه يمكن تطبيق خط مستقيم على شكل الانتشار للمتغيرين X و Y وممكن تطبيق هذا الخط بالعين المجردة إلا أن هذه الطريقة غير دقيقة وأفضل طريقة لتطبيق خط المستقيم على شكل الانتشار هي فرض معادلة خطية.

إذا كان لدينا أزواج من العينة المرتبة $(x_1, y_1),(x_2, y_2),......,(x_n, y_n)$ نعين هذه النقاط على شكل الانتشار ونرى فيما إذا كان من المعقول تطبيق خط مستقيم عليها. فإذا كان ذالك مناسبا نفرض أن معادلة ذلك الخط المستقيم هي

$$\hat{y} = a + bx \quad .... (1)$$



حيث أن $\hat{y}$ تسمى (y – hat) تمثل القيمة المتوسطة المتنبئة للقيمة y عندما تكون x معلومة ونسمي الفرق بين قيمة y الفعلية والقيمة المقدرة $\hat{y}$ (تحسب قيمة $\hat{y}$ من خط الانحدار) بالخطأ بالتقدير وهو الانحراف بين القيمة الفعلية والقيمة المقدرة

$$e = y - \hat{y}$$

فمثلا بالنسبة للقيمة الأولى يكون لدينا

$$e_1 = y_1 - \hat{y}_1$$
$$e_2 = y_2 - \hat{y}_1$$
$$e_n = y_n - \hat{y}_n$$
$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)$$

حيث ان $\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)$ تمثل مجموع الانحرافات بين القيمة الفعلية y والقيمة التنبؤية $\hat{y}$.

إيجاد معادلة خط الانحدار بطريقة المربعات الصغرى

تتلخص طريقة المربعات الصغرى بإيجاد قيمة a و b في معادلة (1) التي تجعل مجموع مربعات الانحرافات اصغر ما يمكن أي بمعنى إيجاد a و b التي تجعل الكمية

$$E = e_1^2 + e_2^2 + ... + e_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i\right)^2_{\min}$$
$$E = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i\right)^2_{\min}$$
$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i\right)(-1) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i\right) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$
$$n\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - \sum_{i=1}^{n} a - bn\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0$$

$$n\bar{y} - na - bn\bar{x} = 0$$
$$\bar{y} - a - b\bar{x} = 0$$
$$a = \bar{y} - b\bar{x} \text{ ....}(2)$$
$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i\right)\left(-x_i\right) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - na\bar{x} - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

نعوض a من المعادلة (2) ينتج:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}(\bar{y} - b\bar{x}) - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} + nb\bar{x}^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}\right) - b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) = 0$$

$$\therefore\ b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

وتسمى a,b معاملات خط الانحدار وبعد إيجاد قيم a,b من المعادلتين أعلاه نعوضهما في المعادلة فنحصل على معادلة خط الانحدار $\hat{y} = a + bx$

(والتي تسمى معادلة خط انحدار y على x).

وتسمى معادلة خط انحدار x على y إذا كانت بالشكل $\hat{x} = a^* + b^* y$.

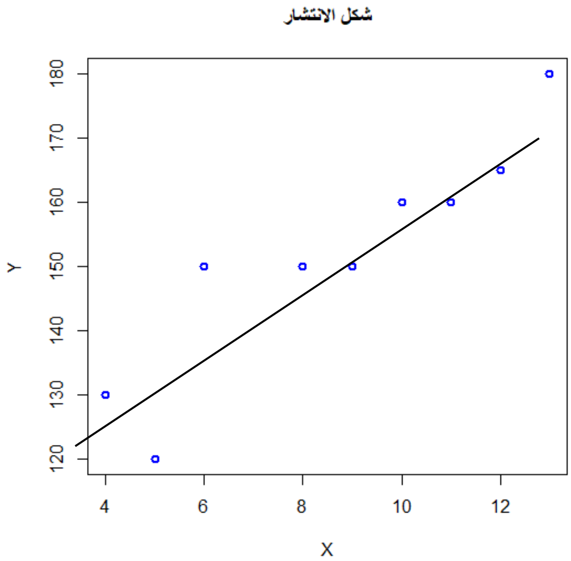
مثال:- كانت تكاليف الدعاية X بالألف دينار لنوع من البضائع وقيمة المبيعات بالألف دينار Y كما في الجدول الأتي:

X	8	10	6	12	13	5	11	9	4
Y	150	160	150	165	180	120	160	150	130

المطلوب: 1. ارسم شكل الانتشار وفسره. 2. اوجد معادلة خط انحدار المبيعات على الدعاية.

3. كم تقدر المبيعات إذا كانت مصاريف الدعاية 10، 15، 20.

الحل/ 1. المبيعات هي المتغير المعتمد Y ومصاريف الدعاية هي المتغير المستقل X .



نلاحظ انه يوجد انحدار خطي موجب قوي الى حد ما

.2

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 12250$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 78 \Rightarrow \bar{x} = \frac{78}{9} = 8.666667$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1365 \Rightarrow \bar{y} = 151.6667$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 756, \qquad n\bar{x}\,\bar{y} = 11830, \qquad n\bar{x}^2 = 676$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{12250-11830}{756-676} = \frac{420}{80} = 5.25$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 151.7 - (5.25)(8.67) = 106.17$$

$\therefore$ معادلة الانحدار هي: $\hat{y} = 106.17 + 5.25x$

.3 نقدر $\hat{y}$ عندما $x=10$ $\quad \hat{y} = 106.17 + 5.25(10) = 106.17 + 52.5 = 158.7$

نقدر $\hat{y}$ عندما $x=15$ $\quad \hat{y} = 106.17 + 5.25(15) = 184.9$

نقدر $\hat{y}$ عندما $x=20$ $\quad \hat{y} = 106.17 + 5.25(20) = 211.2$

النظرية الاحتمالية

الاحتماليـة: أو تسمى قوانين المصـادفة وتعتبـر مـن النظريـات المهمـة التـي تختص بدراسـة الحـوادث والمتغيرات والظواهر التي تتميز بعدم التأكد من حدوثها.

التحليـل التـوافقي: هو عبارة عن عدد النـواتج الممكنـة لتجربـة معينـة أو عدد العناصـر فـي مجموعـة معينة بدون اللجوء إلى العد المباشر.

طرق العد:

1. **قاعدة الجمع:** إذا كان هناك عمليتان متنافيتان B, A (حدوث احدهما ينفي حدوث الأخرى).

العمليـة الأولـى A يمكـن انجازهـا بـ n_1 طريقـة و العمليـة الثانيـة B يمكـن انجازهـا بـ n_2 طريقـة مختلفة فان عدد الطرق المختلفة التي يمكن انجاز احدها (الأولى أو الثانية) هو

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$$

حيـث $n(A)$ عـدد الطـرق المختلفـة لإنجـاز العمليـة A و $n(B)$ عـدد الطـرق المختلفـة لإنجـاز العملية B.

مثال:– كم عدد يقبل القسمة على 3 او 5 موجود في الأعداد

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10

الحل/ $A = \{3, 6, 9\} \quad , \quad n_1 = 3$

$B = \{5, 10\} \quad , \quad n_2 = 2$

$\therefore$ عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 3 او 5 هو $n_1 + n_2 = 3 + 2 = 5$

أما إذا لم تكن العمليتان متنافيتان فعندئذ يجب طرح الطرق التي تكون فيها العمليتين مشتركتين أي

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

ملاحظة: يمكن تعميم هذه القاعدة لتشمل أكثر من عمليتين.

مثال:– في حجر النرد ما هو عدد طرق الحصول على عدد زوجي أو أولي.

$A=\{2,4,6\}\ ,\ n(A)=3$ عدد زوجي

$B=\{2,3,5\}\ ,\ n(B)=3$ عدد اولي

$$\boldsymbol{A\cap B=\{2\}\ ,\ n(A\cap B)=1}$$
$$\boldsymbol{\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=3+3-1=5}$$

2. قاعدة الضرب: إذا كان لدينا عملية يمكن انجازها في n_1 طريقة مختلفة وإذا تلت هذه العملية عملية ثانية يمكن انجازها في n_2 طريقة مختلفة وهكذا إلى العملية k التي يمكن انجازها في n_k طريقة مختلفة فان عدد الطرق المختلفة التي يمكن انجاز جميع هذه العمليات معا هو $n_1 \times n_2 \times n_3 \times .... \times n_k$.

مثال:– إذا كانت اللوحة المعدنية لرقم السيارة تحتوي على حرفين مختلفين من اللغة الانكليزية يتبعها ثلاثة أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول صفر فما هو عدد اللوحات المعدنية التي يمكن طبعها للوحات السيارات.

الحل/ يمكن كتابة الحرف الأول بعدد 26 طريقة مختلفة والحرف الثاني بعدد 25 طريقة مختلفة ويختار الرقم الأول بتسع طرق مختلفة وكل من الرقمين الآخرين بعشرة طرق. فيكون عدد اللوحات المختلفة التي يمكن طبعها هو $26\ .\ 25\ .\ 9\ .\ 10\ .\ 10 = 585000$

التباديل Permutation

هو عدد طرق الاختيار المرتب التي يمكن تكوينها من عدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها ويرمز لها بالرمز $p(n,r)$ أو npr أي تباديل r عنصر من n من العناصر. ويحسب من القانون

$$p(n,r)=\frac{n\,!}{(n-r)\,!}$$

حيث ان $n!=n(n-1)(n-2).....2\times 1$

مثال:– ما هو عدد الكلمات المختلفة الممكن تكوينها من كلمة (ربح).

الحل/ $p(3,3)=\dfrac{3\,!}{(3-3)\,!}=\dfrac{3\,!}{0\,!}=\dfrac{3\,!}{1}=3!=3\times2\times1=6$

مثـال:– مـا هـو عـدد الكلمـات المختلفـة المكونـة مـن ثلاثـة أحـرف والتـي يمكـن اختيارهـا مـن كلمـة (mosul).

الحل/ لدينا $r=3$, $n=5$ اذن عدد الكلمات المختلفة هو

$$p(5,3)=\frac{5\,!}{(5-3)\,!}=\frac{5\times4\times3\times2!}{2!}=60$$

التباديل مع التكرار: عدد تباديل n عنصر والتي يكون فيها n_1 عنصرا متماثلا و n_2 عنصرا متماثلا وهكذا ... إلى n_r عنصرا متماثلا هو $\dfrac{n\,!}{n_1\,!\,n_2\,!\,.......\,n_r\,!}$

مثال:– ما هو عدد الكلمات المختلفة الممكن تشكيلها من كلمة (**Too**).

الحل/ نلاحظ أن عدد الحروف $n=3$ الحرف o مكرر مرتين $n_1=2$ والحرف T يوجد مرة واحدة $n_2=1$

اذن عدد الكلمات المختلفة هو $\dfrac{n\,!}{n_1\,!\,n_2\,!}=\dfrac{3\,!}{2!\,1!}=\dfrac{3\times2\,!}{2!}=3$

مثال:– لديك الكلمة ELEVEN. المطلوب (1) اوجد عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من جميع حروف الكلمة ELEVEN. (2) كم كلمة منها تبدأ وتنتهي بالحرف E. (3) كم كلمة منها تكون الثلاثة حروف E فيها متجاورة. (4) كم كلمة منها تبدأ بالحرف E وتنتهي بالحرف N.

1. لـــدينا $n=6$ و $n_1=3$ والحـــرف E متكـــرر 3 مـــرات ∴ عـــدد الكلمـــات المختلفـــة هـــو $\dfrac{n!}{n_1\,!}=\dfrac{6!}{3!}=120$

2. اذا ثبتنا الحرف E في بداية وفي نهاية الكلمة، يبقى لدينا 4 احرف مختلفة. اذن عدد الكلمات هو $4! = 24$.

3. توجد 4 طرق لكتابة الثلاث حروف EEE متجاورة هي EEEVLN , VEEELN , VLEEEN , VLNEEE

وتوجد $3!$ طريقة لتبديل الحروف VLN. لذا يكون عدد الكلمات هو $24 = 3! . 4 \therefore$

طريقة اخرى: بما ان EEE متجاورة اذن يمكن ان نعتبرها حرفا واحدا. لذا يكون عدد الكلمات هو $4!=24$

4. اذا ثبتنا الحرف E في بداية الكلمة والحرف N في نهاية الكلمة سوف يبقى لدينا 4 احرف واثنان منها مكررة. اذن يكون لدينا تباديل مع تكرار والناتج هو $12 = \frac{4!}{2!}$.

مثال:- بكم طريقة يمكن لمجموعة من سبعة أشخاص في حفل أن يرتبوا أنفسهم بحيث يجلسون:

1. في صف فيه 7 مقاعد 2. حول مائدة مستديرة.

الحل/ 1. توجد 7 طرق لجلوس الأشخاص $7! = 5040$

2. يمكن لشخص واحد أن يجلس في أي مكان من المائدة المستديرة ويمكن للأشخاص الستة الآخرين أن يرتبوا أنفسهم حول المائدة بطرق عددها $6! = 720$

وبصورة عامة يمكن ترتيب n شيء حول دائرة بطرق عددها $(n-1)!$.

العينات المرتبة:

كثيرا ما نختار في علم الاحتمالات كرة من وعاء فيه n من الكرات أو اختيار شخص من مجموعة أشخاص أو اختيار رقم من مجموعة أرقام تسمى هذه العملية باختيار عدد r من المرات بعينة مرتبة حجمها n وهناك حالتين:

1. المعاينة مع الإحلال: في هذه الحالة يعاد كل عنصر قبل اختيار العنصر الثاني وحيث انه يوجد دائما n طريقة مختلفة لاختيار كل عنصر وبتطبيق القاعدة الأساسية للعد يكون عدد العينات المرتبة والمختلفة وذات الحجم r مع الإحلال هو $n\times n\times n\times ......\times n=n^r$

2. المعاينـة بـدون إحـلال: في هذه الحالـة لا يعاد العنصر إلـى الوعاء قبل اختيار العنصر الثاني وبـذلك لا توجد تكرارات فـي العينـة المرتبـة أو بعبـارة أخرى فـان العينـة المرتبـة ذات الحجم r بـدون إحــلال هـــي تبـــديل مـــن الأشـــياء الموجـــودة فـــي الوعـــاء المـــأخوذة منـــه وبـــذلك يوجـــد

$$n\times(n-1)(n-2).....(n-r+1)=p(n,r)=\frac{n\,!}{(n-r)!}$$

عينة مرتبة مختلفة حجمها r بدون إحلال من مجتمع به n من الأشياء أو العناصر.

مثـال:- وعـاء فيـه ثمـان كرات، اوجد عدد العينـات المرتبـة ذات الحجـم 3 (1) مـع الاحـلال (2) بدون احلال.

الحل/(1) كل كرة يمكن اختيارها. اذن يوجد **8.8.8= 512**

(2) لـــــــدينا تباديـــــــل حيـــــــث $n=8, r=3$. اذن عـــــــدد العينـــــــات المرتبة $p(8,3)=\frac{8\,!}{(8-3)!}=\frac{8\,!}{5!}=8.7.6=336$

مثال:- 1. بكم طريقة مختلفة يمكن لمجموعة مكونة من 3 أولاد وبنتان أن يجلسوا في صف 2. بكم طريقة يمكن أن يجلسوا في صف إذا جلس الأولاد معا والبنات معا. 3. بكم طريقة يمكن أن يجلسوا في صف إذا جلست البنتان فقط معا

1) $\mathbf{5\,!=5\times4\times3\times2\times1=120}$
2) $\mathbf{2\times2\,!\times3\,!=24}$
3) $\mathbf{4\times3\,!\times2\,!=48}$

التوافيق Combination

إذا كان لدينا n من العناصر، نعرف توافيق r عنصر من n عنصر هو عدد المجاميع الجزئية التي تحتوي على r عنصر دون اعتبار لطريقة الترتيب ويرمز للتوافيق بالرمز C_n^r أو $\binom{n}{r}$ ويعرف بالقانون $\binom{n}{r} = \frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!}$

مثال:– كم لجنة ثلاثية يمكن تكوينها من 8 أشخاص؟

$$\binom{8}{3} = \frac{8\,!}{3!\,(8-3)\,!} = \frac{8\times7\times6\times5\,!}{3\times2\times5\,!} = 56$$

مثال:– بكم طريقة مختلفة يمكن لطالب الإجابة على 4 من 6 أسئلة على أن يكون السؤال الأول والثاني ضمن الأربعة؟

يوجد سؤالين اجباريين، اذن يبقى اختيار 2 من 4 اسئلة. اذن عدد الطرق هو $\binom{4}{2} = \frac{4\,!}{2!\,2!} = \frac{4\times3\times2\,!}{2\times2} = 6$

مثال:– سيدة لها (11) صديقة. بكم طريقة يمكن أن تدعوا (1) 5 أصدقاء إلى العشاء. (2) 5 أصدقاء إلى العشاء 2 منهم متزوجان ويجب حضورهما معا. (3) 5 أصدقاء إلى العشاء إذا كان 2 منهم متخاصمين ولا يمكنهما الحضور معا.

(1) $\quad \boldsymbol{\binom{11}{5} = \frac{11!}{5!\,6!} = 462}$

(2) افرض أن A و B متزوجان. إذا حضر A و B نوجد $\binom{9}{3}\binom{2}{2}$ و إذا لم يحضر A و B نوجد $\binom{9}{5}\binom{2}{0}$

$$\therefore \binom{2}{2}\binom{9}{3} + \binom{9}{5} = 84 + 126 = 210$$

(3) افرض أن B,A الشخصان المتخاصمان. إذا حضر احدهما $\binom{2}{1}\binom{9}{4}$ وإذا لم يحضر كلاهما توجد $\binom{2}{0}\binom{9}{5}$

$$\therefore \binom{2}{1}\binom{9}{4}+\binom{2}{0}\binom{9}{5}=252+126=378$$

مثال:- عدد الحروف الهجائية في اللغة الانكليزية 26 حرف من بينها 5 حروف متحركة، اذا اردنا تكوين كلمة من 5 حروف بحيث تحتوي على ثلاثة حروف مختلفة غير متحركة وعلى حرفين مختلفين متحركين. المطلوب:

(1) كم عدد الكلمات المكونة. (2) كم كلمة منها تحتوي على الحرف B. (3) كم كلمة منها لا تحتوي على الحرفين B وC. (4) كم كلمة منها تبدأ بالحرف B وتحتوي على الحرف C. (5) كم كلمة منها تحتوي على الحرفين A و B. (6) كم كلمة منها تبدأ بالحرف A وتحتوي على الحرف B.

الحل/ يوجد 5 حروف متحركة a,e,i,o,u ويوجد $26-5=21$ غير متحركة $n_1=5$

$$(1)\quad n_1=\binom{21}{3},\ n_2=\binom{5}{2}\ ,n_3=5!$$

$$\binom{21}{3}\binom{5}{2}5!=1596000$$

$$(2)\quad \binom{1}{1}\binom{20}{2}\binom{5}{2}5!=228000$$

$$(3)\quad \binom{19}{3}\binom{5}{2}5!=22800$$

$$(4)\quad \binom{2}{2}\binom{19}{1}\binom{5}{2}4!=4560$$

$$(5)\quad \binom{1}{1}\binom{20}{2}\binom{1}{1}\binom{4}{1}5!=91200$$

$$(6)\quad \binom{1}{1}\binom{20}{2}\binom{1}{1}\binom{4}{1}4!=18240$$

مثال:- بكم طريقة يمكن اختيار لجنة تتكون من ثلاثة رجال وسيدتين من بين سبعة رجال وخمسة سيدات.

الحل/ توجد $\binom{7}{3}$ طريقة مختلفة لاختيار 3 من 7 رجال و توجد $\binom{5}{2}$ طريقة مختلفة لاختيار 2 من 5 سيدات.

$\therefore$ عدد اللجان المختلفة $\binom{7}{3}\binom{5}{2}=\frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4!}{3!4!}\times\frac{5\,.\,4\,.\,3!}{2!3!}=35\times10=350$

مثال:– فصل دراسي به تسعة طلبة وثلاث طالبات 1. كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن أن يختار بها المدرس لجنة مكونة من أربعة. 2. بكم طريقة منها توجد في اللجنة طالبة واحدة على الأقل.

3. بكم طريقة منها توجد في اللجنة طالبة واحدة فقط.

(1) $\binom{12}{4}=\frac{12!}{4!8!}=495$

(2) $\binom{3}{1}\binom{9}{3}+\binom{3}{2}\binom{9}{2}+\binom{3}{3}\binom{9}{1}=369$

(3) $\binom{3}{1}\binom{9}{3}=252$

التجزيئات المرتبة

عملية حساب عدد التجزيئات المرتبة لعناصر مجموعة A إلى تجزيئات مرتبة مثلا $A_1, A_2, ..., A_n$.

مبرهنــة:- افـرض أن مجموعـة تحتـوي علـى n عنصـر وان $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$ (n_i أعداد صحيحة) إذن عدد التجزيئات المرتبة لعناصر المجموعة هو $\dfrac{n\,!}{n_1\,!\,n_2\,!\,.....\,n_r\,!}$

ملاحظة:- المجموعة A_1 تحتوي على n_1 عنصر والمجموعة الثانية A_2 تحتوي على n_2 عنصر .... والمجموعة A_r تحتوي على n_r عنصر.

مثال:- بكم طريقة يمكن توزيع (9) العاب على أربعة أطفال بحيث يتلقى الطفل الأصغر ثلاثة لعب وكل طفل أخر لعبتين؟

الحل/ طريقة أولى:- عدد الطرق المختلفة(عدد التجزيئات المرتبة) هو

$$\frac{9\,!}{3\,!\,2\,!\,2\,!\,2\,!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\,!}{3\,!\,2\times 2\times 2} = 7560$$

طريقة ثانية:- توجد $n_1 = \binom{9}{3}$ لاختيار الطفل الأصغر. توجد $n_2 = \binom{6}{2}$ لاختيار الطفل الثاني.

توجد $n_3 = \binom{4}{2}$ لاختيار الطفل الثالث. توجد $n_1 = \binom{2}{2}$ لاختيار الطفل الرابع.

$$\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{9\,!}{3\,!\,6\,!}\times\frac{6\,!}{2\,!\,4\,!}\times\frac{4\,!}{2\,!\,2\,!}\times\frac{2\,!}{2\,!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6\,!}{3\times 2\times 6\,!}\times\frac{6\times 5\times 4\,!}{2\times 4\,!}\times\frac{4\times 3\times 2}{2\times 2}$$
$$= 9\times 8\times 7\times 3\times 5 = 7560$$

العلاقة بين التوافيق والتباديل:

$$p(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r\,!(n-r)!} \Rightarrow \binom{n}{r} = \frac{1}{r\,!}\,p(n,r)$$
$$p(n,r) = r\,!\binom{n}{r}$$

معاملات ذات الحدين – نظرية ذات الحدين:–

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} b^r a^{n-r}$$

$$= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + ... + b^n$$

مبرهنة:– اثبت أن $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

البرهان: الطرف الأيمن $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{r\,n!}{r!(n-r+1)!} + \frac{n!(n-r+1)}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{r\,n! + nn! - r\,n! + n!}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)n!}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r}$$

نتيجة: $\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1}$

الطرف الأيمن:

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال:– $\binom{6}{2} = \frac{6\,!}{2\,!\,4\,!} = \frac{6\times5\times4\,!}{4\,!} = 15$

$$\binom{6}{4} = \frac{6\,!}{4\,!\,2\,!} = 15$$

ممكن تعميم نظرية ذي الحدين المتعدد حدود.

$$(a_1 + a_2 + ... + a_r)^n = \sum \binom{n}{n_1 . n_2 ..... n_r} a_1^{n_1} a_2^{n_2} .... a_r^{n_r}$$

حيث أن $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$

$$\binom{n}{n_1 . n_2 \ldots . n_r} = \frac{n\,!}{n_1\,!\; n_2\,! \ldots . n_r\,!} \;\; , \;\; 0 \le n_i \le n \;\; , \; \forall\, i = 1,2,\ldots, r$$

مثال:– احسب كلا من معاملات متعدد(كثير) الحدود التالية:

$$i) \quad \binom{6}{3 \quad 2 \quad 1} \qquad\qquad ii) \quad \binom{10}{5 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 2}$$

$$i) \quad \binom{6}{3 \quad 2 \quad 1} = \frac{6\,!}{3\,!\,2\,!\,1\,!} = \frac{6\times 5\times 4\times 3\,!}{3\,!\,2\times 1} = 60$$

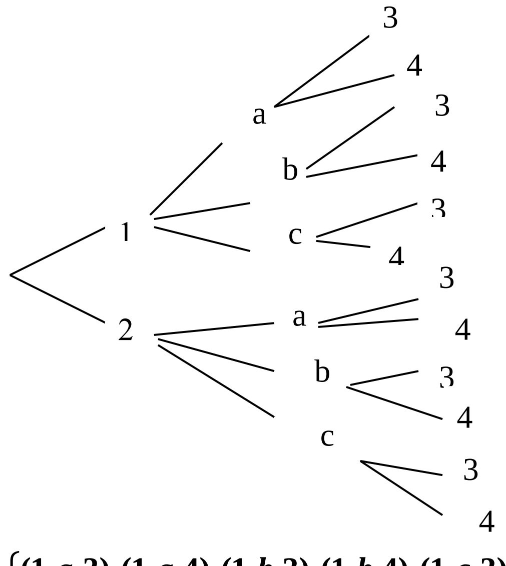
$ii)$ ليس له معنى لان $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 5+3+2+2 \neq 10$ وان

$\sum n_i = 12 \;,\; n = 10 \;,\; \sum n_i \ge n$ لذلك ليس له معنى.

الأشجار البيانية

هي طريقة تستعمل لحصر كل النواتج الممكنة لمتتابعة من التجارب إذا كان من الممكن أن تقع كل تجربة بعدد منته من الطرق.

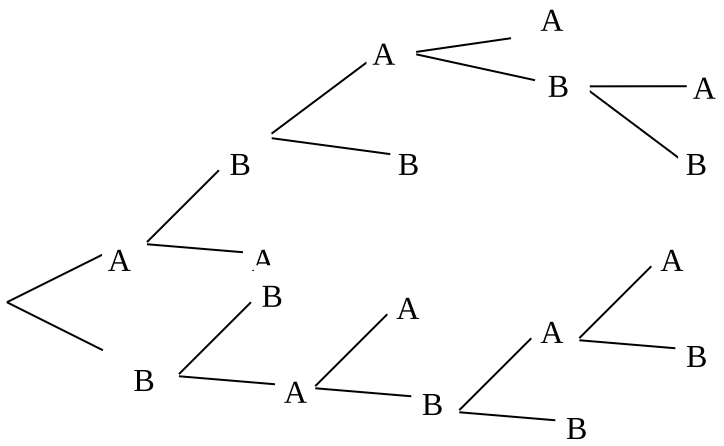
مثال:– اوجد مجموعة حاصل الضرب $A\times B\times C$ إذا كان $A=\{1,2\}, B=\{a,b,c\}, C=\{3,4\}$.



$$A\times B\times C = \begin{Bmatrix} (1,a,3),(1,a,4),(1,b,3),(1,b,4),(1,c,3),(1,c,4), \\ (2,a,3),(2,a,4),(2,b,3),(2,b,4),(2,c,3),(2,c,4) \end{Bmatrix}$$

لاحظ الشجرة مركبة من اليسار إلى اليمين وان عدد الأفرع في كل نقطة يكافئ عدد النواتج الممكنة للتجربة.

مثال:– يلعب احمد وجاسم مباراة في التنس ويفوز بالمباراة اللاعب الذي يفوز بشوطين متتاليين أو ثلاثة أشواط على طول المباراة اوجد عدد النتائج الممكنة لهذه اللعبة.



$$S=\left\{\begin{matrix}(A,A),(A,B,B),(A,B,A,A),(A,B,A,B,B),(A,B,A,B,A),\\(B,B),(B,A,A),(B,A,B,B),(B,A,B,A,A),(B,A,B,A,B)\end{matrix}\right\}$$

نظرية الاحتمال أو قوانين المصادفة:-

تعتبر من النظريات المهمة في الرياضيات والتي تتخصص في دراسة الحوادث والمتغيرات والظواهر التي تتميز بعدم تأكد حدوثها.

التجربة العشوائية:-

هي التجربة التي لا يمكن التعرف على نتائجها إلى بعد تنفيذها، مثلا:

1. في تجربة رمي قطعة نقود منتظمة نلاحظ وجود نتيجتين ممكنتين فقط هما ظهور الصورة H أو ظهور الكتابة T.
2. في تجربة رمي زهر النرد نلاحظ وجود ستة نتائج ممكنة هي 1,2,3,4,5,6.
3. فحص فصيلة الدم لشخص ما تجربة عشوائية نتائجها احد الأصناف A , B , AB , O.
4. عمر جهاز الكتروني تجربة عشوائية لأننا لا نعلم بالضبط إلى أي وقت يستمر الجهاز بالعمل.

سنرمز للتجربة العشوائية بالرمز E.

فضاء العينة

إن فضاء العينة المتعلق بالتجربة E هو المجموعة الجامعة المؤلفة من جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية E ويرمز له بالرمز S.

مثال(1): فضاء العينة في تجربة رمي قطعة نقود منتظمة يتألف من العنصرين H(Head) وكتابة T (Tail) أي أن $S = \{H,T\}$.

مثال(2): فضاء العينة في تجربة رمي زهرة نرد منتظمة هو $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

مثال(3): فضاء العينة في فحص فصيلة الدم لشخص ما هو $S = \{A , B , AB , O\}$.

مثال(4): فضاء العينة في عمر جهاز الكتروني هو $S=\{t, t\geq 0\}$ حيث t تمثل عمر الجهاز الالكتروني (مثلا بالسنة).

ملاحظة: إذا كانت $S_1, S_2, ..., S_r$ تمثل فضاءات عينة متعلقة بالتجارب العشوائية $E_1, E_2, ..., E_r$ فان فضاء العينة الناجمة عن ضم التجارب $E_1, E_2, ..., E_r$ معا هو $S=S_1\times S_2\times ....\times S_r$.

مثال:– في تجربة رمي قطعة نقود وزهرة نرد معا اوجد فضاء العينة لهذه التجربة.

الحل/ في حالة رمي قطعة النقود $S_1=\{H,T\}$, $k_1=2$

في حالة رمي زهر النرد $S_1=\{1,2,3,4,5,6\}$, $k_1=6$

$\therefore$ S تحتوي على $2\times 6=12$ حالة ممكنة لفضاء العينة الناجم من ضم هذه التجربتين.

$$S=S_1\times S_2=\{H,T\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$$
$$S=\left\{\begin{matrix}(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6)\\ ,(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\end{matrix}\right\}$$

الحادثة Event: هي أي مجموعة جزئية في فضاء العينة S.

مثال:– في تجربة رمي حجر النرد سيكون فضاء العينة (فضاء الاحتمال) $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. مثلا إذا كان A يمثل حادثة وقوع عدد فردي فان $A=\{1,3,5\}$.

مثال:– في تجربة رمي قطعة نقود وزهرة نرد مرة واحدة، ظهور الصورة مع عدد يقبل القسمة على 3 هو حادثة معرفة في S حيث أن:

فضاء العينة (فضاء الاحتمال)
$$S=\left\{\begin{matrix}(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6)\\ ,(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\end{matrix}\right\}$$

حادثة ظهور الصورة مع عدد يقبل القسمة على 3 $A=\{H,3\},\{H,6\}$

مثال:– في تجربة رمي زهرتي نرد. افرض أن x يمثل عدد النقاط الظاهرة على وجه الزهر الأول و y يمثل عدد النقاط الظاهرة على وجه الزهر الثاني. المطلوب: 1. اوجد فضاء الاحتمال. 2. جد المجموعة الجزئية B التي تمثل حادثة جزئية في S حيث $B=\{(x,y),6\le x+y\le 9\}$ 3. جد المجموعة الجزئية للحادثة $C=\{(x,y),x+y\ge 7\}$. 4. جد $\boldsymbol{B\cap C}$.

الحل/1. فضاء الاحتمال S يحتوي على $6\times 6=36$ حالة.

$$S=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{Bmatrix}$$

2. توجد (20) حالة ممكنة للحادثة $B=\{(x,y),6\le x+y\le 9\}$ وهي

$$B=\begin{Bmatrix}(1,5),(5,1),(1,6),(6,1),(2,4),(4,2),(2,5)(5,2),(2,6),(6,2),\\(3,3),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(3,6),(6,3),(4,4),(4,5),(5,4)\end{Bmatrix}$$

3. توجد (21) حالة ممكنة للحادثة $C=\{(x,y),x+y\ge 7\}$ وهي

$$C=\begin{Bmatrix}(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(3,6),(6,3),\\(4,4),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\end{Bmatrix}$$

4. $\boldsymbol{B\cap C=\{(x,y),7\le x+y\le 9\}}$

$$\boldsymbol{B\cap C=\begin{Bmatrix}(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2),(3,4),(4,3),\\(3,5),(5,3),(3,6),(6,3),(4,4),(4,5),(5,4)\end{Bmatrix}}$$

ملاحظات:

1. يسمى الحدث الذي يحتوي عنصر واحد $\{a\}$ بالحدث الأولي.

2. تعتبر المجموعة الفارغة $\phi = \{\ \}$ حدث مستحيل (حدث غير ممكن).

3. يعتبر فضاء العينة S حدث مؤكد لأنه يحتوي على جميع الحالات الممكنة.

4. فضاء العينة قد يكون محدود (منتهي) مثل رمي ثلاث قطع نقود

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

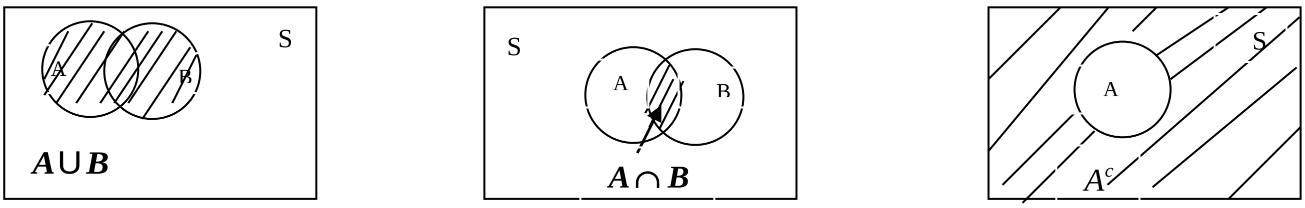
او قد يكون فضاء العينة غير محدود (غير منتهي) مثل رمي قطعة نقود حتى الحصول على الصورة.

5. يمكننا ربط الأحداث لكي نحصل على إحداث جديدة باستعمال عمليات المجموعة المختلفة وكما يلي:

أ. $\boldsymbol{A \cup B}$ هو الحدث الذي يقع بوقوع A أو B أو كلاهما.

ب. $\boldsymbol{A \cap B}$ هو الحدث الذي يقع بوقوع A و B معا (أي وقوع كل من A و B مشتركا).

ج. A^c (متمم A) هو الحدث الذي يقع إذا لم يقع A.



مثال:- عند رمي حجر نرد عبر عن الأحداث التالية:

1. الحصول على عدد زوجي.
2. الحصول على عدد فردي.
3. الحصول على عدد أولي.
4. الحصول على عدد فردي أو أولي.
5. الحصول على عدد فردي أو زوجي.
6. الحصول على عدد ليس فردي.

7. الحصول على عدد يقبل القسمة على 2.   8. الحصول على عدد اكبر من 6.

الحل/ فضاء العينة هو $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

(1) $A = \{2,4,6\}$ **(2)** $B = \{1,3,5\}$ **(3)** $C = \{2,3,5\}$

(4) $B \cup C = \{1,2,3,5\}$ **(5)** $B \cup A = S = \{1,2,3,4,5,6\}$ **(6)** $B^c = \{2,4,6\}$

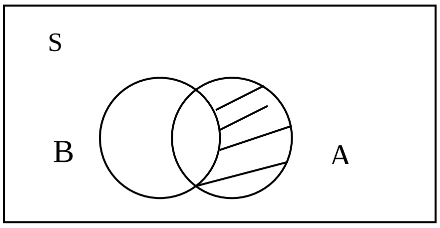
(7) $\{2,4,6\}$ **(8)** ϕ

ملاحظة: يمكن التعبير عن الأحداث باستخدام شكل فن.

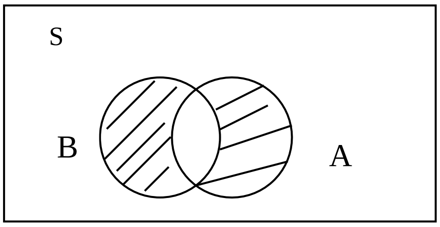
مثال:– افرض أن B,A حدثان، عبر عن الحدث ثم كون شكل فن لما يأتي.

1. أن يقع A ولا يقع B.
2. وقوع A أو B وليس كلاهما.

الحل/ 1. $A \cap B^c$



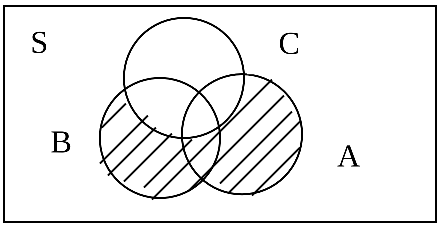
2. $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$



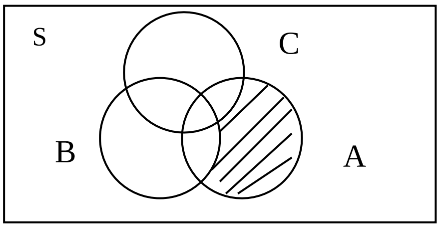
مثال:– افرض أن A,B,C أحداث. عبر عن ثم كون شكل فن للأحداث:

1. وقوع A أو B وعدم وقوع C.   2. وقوع A فقط.

الحل/ 1. $A \cup B \cap C^c$

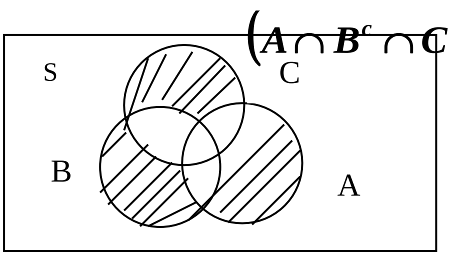


2. $A \cap B^c \cap C^c$

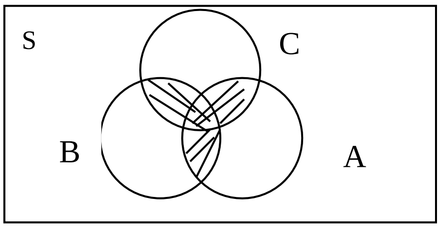


مثال:– افرض أن A,B,C أحداث. عبر عن ثم كون شكل فن للأحداث: 1. وقوع حدث واحد بالضبط . 2. وقوع حدثين على الأقل منهما. 3. عدم وقوع أي حدث منهم. 4. وقوع A وB وعدم وقوع C. 5. وقوع A و B وC.

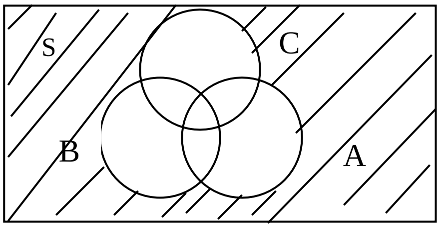
الحل/ 1. $\left(A \cap B^c \cap C^c\right) \cup \left(B \cap A^c \cap C^c\right) \cup \left(C \cap A^c \cap B^c\right)$



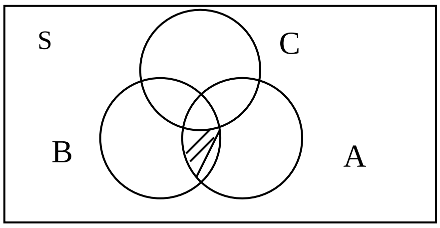
2. $\left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right) \cup \left(C \cap B\right)$



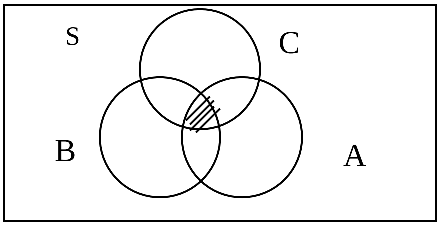
3. $\left(A^c \cap B^c \cap C^c\right)=\left(B \cup A \cup C\right)^c$



4. $\left(A \cap B \cap C^c\right)$



5. $\left(A \cap B \cap C\right)$



الأحداث المتنافية:– إذا كان A,B حدثين معرفين على S عندئذ يقال أن هذين الحدثين متنافيين إذا كان وقوع احدهما يمنع وقوع الأخر وهذا يعني $A \cap B = \phi$. مثلا حادثة ظهور عدد زوجي في تجربة رمي حجر نرد يمنع ظهور حادثة عدد فردي. ايضا حادثة ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود منتظمة يمنع ظهور حادثة الكتابة. وبصورة عامة لو كانت الأحداث $A_1, A_2, ..., A_r$ متنافية، فان $A_1 \cap A_2 \cap ..... \cap A_r = \phi$.

الأحداث الشاملة:- يقال للحدثين A,B شاملين إذا كان $\boldsymbol{A \cup B = S}$. لا يشترط في الأحداث المتنافية أن تكون شاملة.

مثال:- القي حجر نرد مرة واحدة. اذا كان A ظهور عدد زوجي، B ظهور عدد فردي، C ظهور عدد أولي. اوجد $\boldsymbol{A \cap C}$ ، $\boldsymbol{B \cap C}$ ، $\boldsymbol{A \cup B}$ ، $\boldsymbol{A \cap B}$ ، C^c ، B^c ، A^c ثم عين الأحداث المتنافية والأحداث الشاملة والأحداث غير المتنافية.

الحل/ فضاء الاحتمال هو $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

$A = \{2,4,6\}$ $\qquad B = \{1,3,5\}$ $\qquad C = \{2,3,5\}$

$\boldsymbol{A \cap C = \{2\}}$ ليست متنافية

$\boldsymbol{B \cap C = \{3,5\}}$

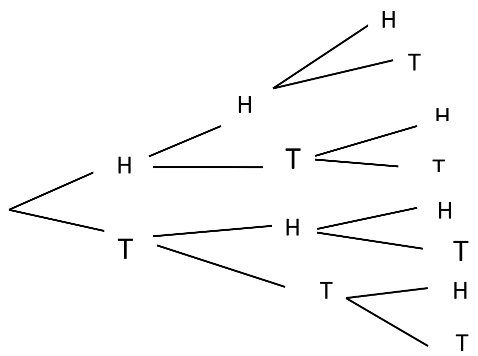
$\boldsymbol{A \cap B = \phi}$ متنافية

$\boldsymbol{A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}}$ شاملة

$A^c = \{1,3,5\},$ $\qquad B^c = \{2,4,6\},$ $\qquad C^c = \{1,4,6\}$

مثال:– ألقيت قطعة نقود ثلاث مرات. عين الأحداث التالية: 1.ظهور صورتين أو أكثر. 2. ظهور صورتين على الأكثر. 3. ظهور كتابة واحدة على الأقل. 4.اوجد اتحاد وتقاطع الأحداث (1) و(2) و(3).

الحل/ لتكن $S_1=\{H,T\}$ قطعة النقود الاولى، $S_2=\{H,T\}$ قطعة النقود الثانية و $S_3=\{H,T\}$ قطعة النقود الثالثة.



$$\therefore S=S_1\times S_2\times S_3=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$$

1. نفرض الحدث A يمثل ظهور صورتين أو أكثر.

اذن $A=\{HHH,HHT,HTH,THH\}$

2. نفرض الحدث B يمثل ظهور صورتين على الأكثر. اذن

$$B=\{HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$$

3. نفرض C تمثل ظهور كتابة واحدة على الأقل

$$C=\{HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$$

4. C,B,A أحداث شاملة $A\cup B\cup C=S$

C,B,A أحداث ليست متنافية $A\cap B\cap C=\{HHT,HTH,THH\}$

تعريف الاحتمال Definition of Probability

افرض أن عدد النتائج الممكنة في تجربة عشوائية هو (n) من النتائج المتنافية وذات نفس الفرصة في الوقوع وان m حيث $(m \le n)$ من هذه النتائج ممكنة الوقوع في حادثة معينة مثل A معرفة على S فان احتمال حدوث A يرمز له بالرمز $p(A)$ يعرف كالاتي:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{عدد الحالات التي يمكن أن يقع بها } A}{\text{عدد الحالات الكلية الممكنة في فضاء العينة } S}$$

وغالبا ما يشار إلى p على انه احتمال نجاح وقوع الحادثة A في حين أن فشل وقوع A هو $q = 1 - p$.

$$q = p(A^c) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - p \qquad , \qquad 0 \le p \le 1$$

مثال:– القي حجر نرد اوجد (1) احتمال الحصول على عدد زوجي (2) احتمال الحصول على عدد فردي (3) احتمال الحصول على عدد أولي (4) احتمال الحصول على عدد أولي وزوجي.

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

A = {الحصول على عدد زوجي} ={2,4,6}

B = {الحصول على عدد فردي} ={1,3,5}

C = {الحصول على عدد أولي} ={2,3,5}

D = {الحصول على عدد زوجي وزوجي} ={2}

$$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad p(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad p(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad p(D) = \frac{1}{6}$$

بديهيات الاحتمال

نفرض أن S فضاء عينة وان T مجموعة من الأحداث وان p دالة حقيقية معرفة على T. تسمى P دالة احتمال ويسمى العدد $P(A)$ احتمال الحدث A إذا تحققت البديهيات الآتية:

1. لكل حدث A فان $0 \le p(A) \le 1$.

2. $p(S) = 1$ (حدث مؤكد).

3. إذا كان A , B حدثين متنافيين أي $(A \cap B = \phi)$ فان :

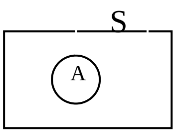
$$(A \; or \; B) = p(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

يمكن تعميم هذه البديهية كما يلي: إذا كانت الأحداث $A_1 , A_2 , A_3 ,........$ متنافية، $(A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j)$

فان $p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ....) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ...$

مبرهنة (1): إذا كانت ϕ المجموعة الخالية فان $p(\phi) = 0$.

البرهان: نفرض أن A أي حدث فيكون A, ϕ حدثان متنافيان، اي ان



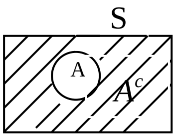
$$\therefore \; A \cup \phi = A$$
$$p(A \cup \phi) = p(A)$$

حسب بديهية (3) $\Rightarrow p(A) + p(\phi) = p(A)$

$$\Rightarrow P(\phi) = 0$$

مبرهنة (2): إذا كانت A^c هو الحدث المكمل للحدث A فان $p(A^c)=1-p(A)$

البرهان: من الممكن تجزئة فضاء العينة S إلى حدثين متنافيين هما A^c, A أي أن:



$S = A \cup A^c$

$p(S)=P(A\cup A^c)=P(A)+P(A^c)$

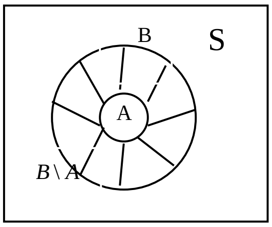
$\because p(S)=1$ حسب بديهية (2)

$\Rightarrow p(A)+p(A^c)=1$

$\therefore p(A^c)=1-p(A)$

مبرهنة (3): إذا كان $A \subset B$ فان $p(A)\leq p(B)$.

البرهان: من الممكن تجزئة الحدث B إلى حدثين متنافيين هما $B \setminus A\, ,\, A$



$\therefore B = A\cup B\setminus A \Rightarrow P(B)=P(A\cup B\setminus A)$

$\therefore P(B)=P(A)+P(B\setminus A)$ حسب بديهية (3)

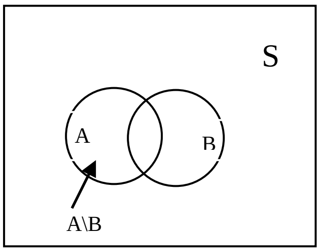
$\because 0\leq P(B\setminus A)\leq 1$ حسب بديهية (1)

$\Rightarrow P(A)\leq P(B)$

مبرهنة (4): إذا كان A, B حدثين فان

$$p(A \setminus B) = p(A) - P(A \cap B).$$

البرهان: من الممكن تجزئة الحدث A إلى حدثين متنافيين هما $A \cap B$, $A \setminus B$

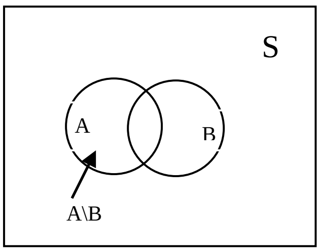


$$\therefore\ A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$
$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

حسب بديهية (3) اي ان $\therefore P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

مبرهنة (5): إذا كان A, B حدثين فان $p(A \cup B) = p(A) + P(B) - P(A \cap B)$

البرهان: من الممكن تجزئة الحدث $A \cup B$ إلى حدثين متنافيين هما B , $A \setminus B$



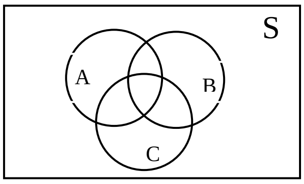
$$\therefore\ A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$
$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$$

من مبرهنة (4) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

نتيجة: إذا كان A, B, C أية أحداث فان

$$p(A\cup B\cup C)=p(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$



البرهان: نفرض أن $D=B\cup C$

$$P(D)=P(B\cup C)$$
$$P(D)=P(B)+P(C)-P(B\cap C) \qquad (1)$$
$$A\cup(B\cup C)=A\cup D$$
$$\therefore P(A\cup(B\cup C))=P(A\cup D)$$
$$=P(A)+P(D)-P(A\cap D) \qquad (2)$$
$$A\cap D=A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$\therefore P(A\cap D)=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)\ldots\ldots\ldots(3)$$

الآن نعوض(2) و (3) في(1):

$$\therefore P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(D)-P(A\cap D)$$
$$=P(A)+(P(B)+P(C)-P(B\cap C))-(P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C))$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

من الممكن تعميم المبرهنة (5) إلى r من الأحداث: افرض أن $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_r$ أحداثا فان

$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\ldots\cup A_r)=\sum_{i=1}^{r}P(A_i)-\sum_{i\neq j}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i\neq j\neq k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)+\ldots\ldots+(-1)^{r-1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\ldots\cap A_r)$$

الفضاء ذو الاحتمالات الغير المتساوية (الفضاء غير المنتظم): يسمى فضاء العينة المنتهي S بالفضاء ذو الاحتمالات الغير المتساوية إذا كانت احتمالات نقاط المعاينة غير متساوية. اي ان احتمالات العناصر في فضاء العينة (فضاء الاحتمال) غير متساوية جميعها.

مثـال:– افرض أن فضـاء العينـة S مكونـة مـن 4 عناصـر $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ أي من الـدوال الآتية تعرف فضاء احتمال على S.

$$(1)\quad p(a_1)=\frac{1}{2}\ ,\ p(a_2)=\frac{1}{2}\ ,\ p(a_3)=\frac{1}{3}\ ,\ p(a_4)=\frac{1}{5}$$
$$(2)\quad p(a_1)=\frac{1}{2}\ ,\ p(a_2)=\frac{1}{2}\ ,\ p(a_3)=\frac{-1}{3}\ ,\ p(a_4)=\frac{1}{2}$$
$$(3)\quad p(a_1)=\frac{1}{2}\ ,\ p(a_2)=\frac{1}{4}\ ,\ p(a_3)=\frac{1}{8}\ ,\ p(a_4)=\frac{1}{8}$$

(1) ليس فضاء احتمال وذلك لعدم تحقق البديهية الثانية من بديهيات الاحتمال.

(2) ليس فضاء احتمال وذلك لعدم تحقق البديهية الاولى من بديهيات الاحتمال.

(3) فضاء احتمال لأنه يحقق البديهية الاولى والثانية من بديهيات الاحتمال.

مثـال:– افرض أن B , A حدثان بحيث أن $p(B^c)=\frac{5}{8}$, $p(A\cup B)=\frac{3}{4}$, $p(A)=\frac{1}{2}$ اوجد احتمال: $p(A\cap B)$, $p(A^c\cap B^c)$, $p(A^c\cup B^c)$, $p(A\cup B^c)$.

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$
$$\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-p(A\cap B)\qquad\Rightarrow\ p(A\cap B)=\frac{1}{8}$$
$$p(A^c\cap B^c)=p(A\cup B)^c=1-p(A\cup B)=1-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}\qquad(4)$$
$$p(A^c\cup B^c)=p(A\cap B)^c=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$
$$p(A\cap B^c)=p(A)-p(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

مثـال:– فـي إحـدى بطـولات الشـطرنج تقـدم رجـلان M_1, M_2 وثـلاث سـيدات W_1, W_2, W_3 وكـان احتمال فوز الرجال متساوي واحتمال فوز السيدات متساوي أيضا ولكن احتمال فوز الرجل ضعف احتمال فوز السيدة في المباراة. المطلوب: (1) اوجد احتمال فوز إحدى السيدات بالبطولة. (2) إذا كان W_1, M_1 متزوجين فما هو احتمال أن يفوز احدهما بالبطولة؟

الحل/ فضـاء العينـة هـو $S = \{M_1, M_2, W_1, W_2, W_3\}$. بمـا ان احتمـال فـوز الرجـال متسـاوي، اذن $p(M_1) = P(M_2)$. بما ان احتمال فوز السيدات متساوي، اذن $p(W_1) = P(W_2) = P(W_3)$.

افرض أن احتمال فوز السيدة $= p \Leftarrow$ احتمال فوز الرجل $= 2p$، حسب البديهية 2 من بديهيات الاحتمال يكون:

$$p(M_1) + p(M_2) + p(W_1) + p(W_2) + p(W_3) = 1$$
$$2p + 2p + p + p + p = 1 \quad \Rightarrow \quad 7p = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{7}$$

$\therefore$ احتمال فوز السيدة $p = \frac{1}{7} \quad \Leftarrow$ احتمال فوز الرجل $2p = \frac{2}{7}$.

.1 $$\boldsymbol{p(W_1 \cup W_2 \cup W_3) = p(W_1) + p(W_2) + p(W_3) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}}$$

.2 $$\boldsymbol{p(W_1 \cup M_1) = p(W_1) + p(M_1) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}}$$

مثال:– صنع حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور العدد متناسبا مع العدد نفسه (مثلا احتمال ظهور 6 هو ضعف احتمال ظهور 3) افرض أن A تمثل ظهور عدد زوجي، B عدد أولي، C عدد فردي.

المطلوب (1) صف فضاء الاحتمال(اوجد احتمال كل نقطة). (2) اوجد $P(A),P(B),P(C)$.

(3) اوجد احتمال كل من: أ. أن يظهر عدد أولي أو عدد زوجي. ب. أن يظهر عدد أولي و فردي. ج. أن يقع A ولا يقع B.

الحل/ فضاء العينة هو $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

(1) $P(1)=P \quad , \quad P(2)=2P \quad , \quad P(3)=3P \quad , \quad P(4)=4P \quad , \quad P(5)=5P \quad , \quad P(6)=6P$

$\therefore P+2P+3P+4P+5P+6P=1$

$\therefore 21P=1 \Rightarrow P=\frac{1}{21}$

$\therefore P(1)=P=\frac{1}{21}\ , P(2)=2P=\frac{2}{21}\ , P(3)=3P=\frac{3}{21}\ , P(4)=4P=\frac{4}{21}\ , P(5)=5P=\frac{5}{21}\ , P(6)=6P=\frac{6}{21}$

(2) $A=\{2,4,6\} \quad , \quad B=\{2,3,5\} \quad , \quad C=\{1,3,5\}$

$P(A)=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}$

$P(B)=P(2)+P(3)+P(5)=\frac{2}{21}+\frac{3}{21}+\frac{5}{21}=\frac{10}{21}$

$P(C)=P(1)+P(3)+P(5)=\frac{1}{21}+\frac{3}{21}+\frac{5}{21}=\frac{9}{21}$

(3) (أ) $\boldsymbol{A\cup B=\{2,3,4,5,6\}}$

$\boldsymbol{P(A\cup B)=P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=\frac{2}{21}+\frac{3}{21}+\frac{4}{21}+\frac{5}{21}+\frac{6}{21}=\frac{20}{21}}$

or $\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap C)=\frac{12}{21}+\frac{10}{21}-\frac{2}{21}=\frac{20}{21}}$

or $\boldsymbol{P(A\cup B)=1-(A\cup B)^c=1-P(1)=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}}$

(ب) $\boldsymbol{B\cap C=\{3,5\}\Rightarrow P(B\cap C)=P(3)+P(5)=\frac{3}{21}+\frac{5}{21}=\frac{8}{21}}$

(ج) $\boldsymbol{B^c=\{1,4,6\} \quad , \quad A\cap B^c=\{4,6\}}$

$\boldsymbol{P(A\cap B^c)=P(4)+P(6)=\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{10}{21}}$

مثال:– تتسابق ثلاث جياد C , B , A معا فإذا كان احتمال فوز A هو ضعف احتمال فوز B واحتمال فوز B ضعف احتمال فوز C فما هو احتمال فوز كل منهم.

الحل/ نفرض احتمال فوز C هو $p(C)=p$. اذن $p(B)=2p(C)=2p$ و $p(A)=2p(B)=4p$.

حسب البديهية 2:

$$p+2p+4p=1 \quad \Rightarrow 7p=1 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{1}{7}$$
$$\therefore\ p(C)=\frac{1}{7} \qquad , \qquad p(B)=\frac{2}{7} \qquad , \qquad p(A)=\frac{4}{7}$$

مثال:– يتسابق ثلاث طلبة C , B , A في السباحة، إذا كان احتمال فوز A يساوي احتمال فوز B واحتمال فوز A ضعف احتمال فوز C اوجد: (1) احتمال فوز كل منهم (2) احتمال فوز A أو B (3) احتمال فوز B أو C.

الحل/ نفرض احتمال فوز C هو $p(C)=p$. اذن $p(A)=p(B)=2p(C)=2p$. حسب البديهية 2

من بديهيات الاحتمال يكون:

$$\textbf{(1)} \qquad P(A)+P(B)+P(C)=1$$
$$\Rightarrow 2P(C)+2P(C)+P(C)=1$$
$$\Rightarrow 5P(C)=1 \quad \Rightarrow \quad P(C)=\frac{1}{5}$$
$$\therefore\ P(A)=\frac{2}{5} \qquad , \qquad P(B)=\frac{2}{5} \qquad , \qquad P(C)=\frac{1}{5}$$
$$\textbf{(2)} \qquad P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$$
$$\textbf{(3)} \qquad P(B)+P(C)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

مثـال:– صنعت قطعة نقود بحيث يكون احتمال ظهور الصورة ضعف احتمال ظهور الكتابة في الرمية الواحدة. اوجد $P(T)$ و $P(H)$.

الحل/ افرض أن احتمال ظهور الكتابة $P(T)=p$ $\Leftarrow$ احتمال ظهور الصورة $P(H)=2p$، حسب البديهية 2 من بديهيات الاحتمال يكون:

$$p(T)+p(H)=1$$
$$p+2p+=1 \;\Rightarrow\; 3p=1 \;\Rightarrow\; p=\frac{1}{3}$$

$\therefore$ احتمال ظهور الكتابة $P(T)=p=\frac{1}{3}$ $\Leftarrow$ احتمال ظهور الصورة $P(H)=2p=\frac{2}{3}$

مثال:– صنع حجر نرد بحيث يكون احتمال ظهور الاعداد الزوجية متساوي واحتمال ظهور الاعداد الفردية متساوي واحتمال ظهور اي عدد زوجي ضعف احتمال ظهور اي عدد فردي. اوجد احتمال (1) ظهور عدد زوجي. (2) ظهور عدد اولي (3) ظهور عدد فردي. (4) ظهور عدد فردي اولي.

الحل/ فضاء العينة هو $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. بما ان احتمال ظهور الاعداد الزوجية متساوي، اذن $p(2)=P(4)=p(6)$. بما ان احتمال ظهور الاعداد الفردية متساوي، اذن $p(1)=P(3)=P(5)$.

افرض أن احتمال ظهور اي عدد فردي $= p$ $\Leftarrow$ احتمال ظهور اي عدد زوجي $= 2p$، حسب البديهية 2 من بديهيات الاحتمال يكون:

$$p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=1$$
$$p+2p+p+2p+p+2p=1 \;\Rightarrow\; 9p=1 \;\Rightarrow\; p=\frac{1}{9}$$

$\therefore$ احتمال ظهور الاعداد الفردية $p(1)=P(3)=P(5)=\frac{1}{9}$ $\Leftarrow$ احتمال ظهور الاعداد الزوجية

$$p(2)=P(4)=P(6)=\frac{2}{9}$$

$$A=\{2,4,6\} \quad , \quad B=\{2,3,5\} \quad , \quad C=\{1,3,5\}$$

1) $P(A)=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

2) $P(B)=P(2)+P(3)+P(5)=\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$

3) $P(C)=P(1)+P(3)+P(5)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

4) $B\cap C=\{3,5\}\Rightarrow P(B\cap C)=P(3)+P(5)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$

الفضاء ذو الاحتمالات المتساوية (الفضاء المنتظم): يسمى فضاء العينة المنتهي S بالفضاء ذو الاحتمالات المتساوية إذا كان لكل نقطة معاينة نفس الاحتمال مثلا إذا احتوى S على n من النقاط فان احتمال كل نقطة هو $\frac{1}{n}$ وإذا احتوى الحدث A على r من النقاط فان احتمال A هو $P(A)=\frac{r}{n}$.

مثال:– صندوق يحتوي على (8) كرات، ثلاثة بيضاء والأخرى حمراء سحبت كرتان بصورة عشوائية اوجد الاحتمال (1) أن تكون الكرتان من نفس اللون (2) واحدة حمراء والأخرى بيضاء (3) كلاهما حمراء.

الحل/ تكون الكرتان من نفس اللون اذا كانت الكرتان حمراء $R_1\cap R_2$ او الكرتان بيضاء $W_1\cap W_2$.
اذن يكون لدينا:

$$(1)\quad p(\text{الكرتان من نفس اللون})=P(R_1\cap R_2)\cup P(W_1\cap W_2)$$

$$=P(R_1\cap R_2)+P(W_1\cap W_2)$$

$$=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{10}{28}+\frac{3}{28}=\frac{13}{28}$$

احتمال ان تكون واحدة حمراء والأخرى بيضاء هو

$$p(R\cap W)=\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{15}{28} \qquad (2)$$

احتمال ان تكون الكرتان حمراء هو

$$p(R_1\cap R_2)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{10}{28} \qquad (3)$$

مثال:– سحبت ورقة بطريقة عشوائية من بين 50 ورقة مرقمة بالأرقام 1 إلى 50 اوجد احتمال أن يكون العدد المسحوب: (1) يقبل القسمة على 5 (2) أولي (3) ينتهي بالرقم 2.

الحل/ (1) يوجد 10 ارقام تقبل القسمة على 5 من بين الارقام 1 إلى 50. اذن

$p($ العدد يقبل القسمة 5 $)=\frac{\binom{10}{1}}{\binom{50}{1}}=\frac{1}{5}$

(2) يوجد 15 رقم اولي بين الارقام 1 إلى 50. اذن

$p($العدد اولي$)=\frac{\binom{15}{1}}{\binom{50}{1}}=\frac{3}{10}$

(3) يوجد 5 ارقام تنتهي بالرقم 2 بين الارقام 1 إلى 50. اذن

$p($ العدد ينتهي بالرقم 2 $)=\frac{\binom{5}{1}}{\binom{50}{1}}=\frac{1}{10}$

مثال:– سحبت ورقتان بطريقة عشوائية من بين 10 أعداد مرقمة من 1 إلى 10 ما هو احتمال أن يكون مجموعهما فرديا اذا: 1. تم سحب الورقتين معا 2. تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى بدون إحلال. 3. تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى مع الإحلال.

الحل/(1) يوجد $\binom{10}{2}=45$ طريقة مختلفة لسحب ورقتين من 10.

يكون المجموع فرديا إذا كانت إحدى الورقتين عدد زوجي والأخرى عدد فردي.

يوجد $\binom{5}{1}=5$ طريقة لسحب عدد زوجي. ويوجد $\binom{5}{1}=5$ طريقة لسحب عدد فردي. اذن يوجد $5\times5=25$ طريقة لسحب ورقتين مجموعهما فردي. اذن احتمال أن يكون مجموعهما فرديا تم سحب الورقتين معا هو $p=\frac{25}{45}=\frac{5}{9}$

2. يوجد $9\times10=90$ طريقة لسحب ورقتين بدون إحلال.

يوجد $5\times5=25$ طريقة لسحب ورقتين مجموعهما فردي الأولى زوجي والثانية فردي.

يوجد $5\times5=25$ طريقة لسحب ورقتين مجموعهما فردي الأولى فردي والثانية زوجي.

اذن عدد الطرق الكلية لحدوث الحدث $25+25=50$. اذن احتمال أن يكون مجموعهما فرديا اذا تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى بدون إحلال هو $p=\frac{50}{90}=\frac{5}{9}$

3. يوجد $10\times10=100$ طريقة لسحب ورقتين من 10 أوراق واحدة بعد الأخرى مع الإحلال. عدد الطرق الكلية لحدوث الحدث هو $25+25=50$. اذن احتمال أن يكون مجموعهما فرديا اذا تم سحب الورقتين ورقة بعد الأخرى مع الإحلال هو $P=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$

مثال:– فصل دراسي فيه 10 طلاب أسمائهم على $A, B, C, \ldots$ إذا اختيرت بطريقة عشوائية لجنة مكونة من ثلاثة طلبة من هذا الفصل فأوجد احتمال ان يكون : (1) A في اللجنة (2) A وB في اللجنة (3) A أوB في اللجنة.

$$(1)\quad P(A)=\frac{\binom{1}{1}\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3}{10} \qquad P(B)=\frac{\binom{1}{1}\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{3}{10}$$

$$(2)\quad P(A\cap B)=\frac{\binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

$$(3)\quad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}-\frac{1}{15}=\frac{8}{15}$$

مثال:– فصل دراسي فيه عشرة رجال وعشرين سيدة بحيث كانت أعين نصف الرجال ونصف السيدات بنية اللون. اختير احد أعضاء الفصل بطريقة عشوائية ما هو احتمال: (1) أن يكون الشخص المختار رجل (2) أن يكون الشخص المختار رجل أو له عينان بنيتان.

الحل/ افرض أن A تمثل الرجال وB تمثل السيدات وC تمثل العيون البنية

$$(1)\quad p(A)=\frac{10}{30} \quad , \quad p(B)=\frac{20}{30} \quad , \quad p(C)=\frac{15}{30}$$

$$(2)\quad p(A\cup C)=p(A)+p(C)-p(A\cap C)=\frac{10}{30}+\frac{15}{30}-\frac{5}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$

مثال:- اختيرت ثلاث مصابيح كهربائية بطريقة عشوائية من بين 15 مصباح خمسة منها معيبة. اوجد احتمال أن يكون: (1) جميعها سليمة (2) واحد فقط معيب (3) واحد على الأقل معيب (4) اثنان على الأكثر سليمة.

الحل/

$$(1)\ p(\text{الثلاث وحدات سليمة}) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$$

$$(2)\ (\text{واحد فقط معيب}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{225}{455} = \frac{45}{91}$$

(3) افرض أن x متغير يمثل عدد المصابيح المعيبة في العينة المسحوبة

$$p(\text{واحد على الأقل معيب}) = p(x \geq 1) = p(x=1 \quad or \quad x=2 \quad or \quad x=3)$$

$$= p(x=1) + p(x=2) + p(x=3)$$

$$= \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{5}{2}\binom{10}{1}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{67}{91}$$

(4) افرض أن y متغير يمثل عدد المصابيح السليمة في العينة المسحوبة

$$p(\text{اثنان على الأكثر سليمة}) = p(y \leq 2) = p(y=2 \quad or \quad y=1 \quad or \quad y=0)$$

$$= p(y=2) + p(y=1) + p(y=0)$$

$$= \frac{\binom{10}{2}\binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{2}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{67}{91}$$

مثال:- في فصل دراسي عشرة طالبات ثلاث منهن عيونهن زرقاء اختيرت طالبتان بصورة عشوائية اوجد احتمال أن يكون: (1)عيون الطالبتين زرقاء (2) عيون الطالبتين ليست زرقاء (3) على الأقل طالبة واحدة عينها زرقاء.

الحل/

(1) p(عيون الطالبتين زرقاء) $= \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{1}{15}$

(2) p(عيون الطالبتين ليست زرقاء) $= \dfrac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{7}{15}$

(3) p(على الأقل واحدة) = p(طالبة) + p(طالبتين)

$$= \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$$

طريقة اخرى: p(على الأقل واحدة) = p(طالبة) + p(طالبتين)

حسب البديهية الثانية من بديهيات الاحتمال يكون لدينا:

p(صفر طالبة) + p(طالبة واحدة) + p(طالبتين) = 1

p(صفر طالبة) + p(على الأقل طالبة واحدة) =1

p(على الأقل واحدة) =1 − p(صفر طالبة) $= 1 - \dfrac{7}{15} = \dfrac{8}{15}$

مثال:– من بين 120 طالب، يدرس الفرنسية 60 طالب والاسبانية 50 طالب ويدرس الاسبانية والفرنسية معا 20. إذا اختير طالب بطريقة عشوائية اوجد احتمال (1) أن يكون هذا الطالب من دارسي اللغة الفرنسية أو اللغة الاسبانية. (2) أن لا يكون من دارسي اللغة الفرنسية أو اللغة الاسبانية.

الحل/ يدرس الفرنسية (F) 60 طالب ويدرس الاسبانية (S) 50 طالب ويدرس الاسبانية والفرنسية معا $F \cap S = 20$

$$(1)\quad P(F \cup S) = P(F) + P(S) - P(F \cap S) = \frac{60}{120} + \frac{50}{120} - \frac{20}{120} = \frac{3}{4}$$

$$(2)\quad P\left((F \cup S)^c\right) = 1 - P(F \cup S) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$