الفصل الاول

الحسابات التقريبية والاخطاء

الخوارزمية:- مجموعة من التوجيهات لتنفيذ عمليات حسابية مصممة بصورة منتظمة لحل المسالة الرياضية بعد عدد محدد من الخطوات.

الحلول العددية:- هو استخدام خوارزمية معينة لحل مسالة معينة تسمح لنا بايجاد الحل لاية دقة مطلوبة باستخدام عدد محدد من الخطوات.

التحليل العددي:- هو الموضع المتعلق بدراسة الطرق المستخدمة في ايجاد الحلول العددية والنظريات المتعلقة بها.

مصادر الاخطاء:-

1- اخطاء الصياغة:- عندما يراد تحليل مسالة معينة بطريقة رياضية غالبا ما ناخذ نموذجا مبسطا يصف المشكلة الاساسية ومن اجل ذلك قد نلجا الى اهمال بعض العوامل والمؤثرات من اجل تبسيط النموذج وفي نفس الوقت لا تؤثر على المظهر الاساسي للمسالة :
2- اخطاء الصلبة:- ان استخدام البيانات التي ليس لها قيمة دقيقة (مضبوطة) في الصيغ الرياضية تؤدي الى نتائج غير دقيقةايضا مثل ($\pi = 3.14$).
3- اخطاء البتر:- هو الخطأ الناشئ عن استبدال عملية منتهية بعملية لانهائية اي قطع سلسلة رياضية بعد عدد من الحدود مثال ذلك $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$.
4- اخطاء التدوير:- ان الكثير من الاعداد تحتوي على مراتب عشرية غير منتهية فعند تقريب هذه المراتب العشرية يؤدي الى اخطاء في الناتج.
5- اخطاء القطع:- وهو الخطاء الناتج عن بتر رقم معين من مرتبة معينة .
6- اخطاء التراكمية:- تتضمن بعض الطرق العددية لحل المعادلات الرياضية تكرار مجموعة من العمليات الحسابية ولخطوات متعاقبة، فاذا وجد خطأ في احدى التكرارات فان هذا الخطأ سيزداد لاعتماد الحسابات على القيم التقريبية المحسوبة في الخطوات السابقة.

انواع الاخطاء:-

لتكن x^* القيمة التقريبية للقيمة الحقيقية x فانه يوجد نوعان من الاخطاء:

1- الخطا المطلق (Absolute Errors)

يعرف الخطأ المطلق بانه حاصل طرح القيمة التقريبية للعدد x^* من القيمة الحقيقية له x ويرمز له e_x حيث

$$e_x = |x - x^*|$$

2- الخطأ النسبي (Relative Error)

يعرف الخطأ النسبي بانه النسبة بين قيمة الخطأ المطلق والقيمة الحقيقية له x ويرمز له بالرمز δ_x حيث

$$\delta_x = \frac{e_x}{x}$$

تمثيل الاعداد:-

يمكن تمثيل الاعداد الحقيقية بالشكل التالي:-

$$547 = 5 * 10^2 + 4 * 10^1 + 7 * 10^0$$
$$0.0085 = 8 * 10^{-3} + 5 * 10^{-4}$$
$$34.63 = 3 * 10^1 + 4 * 10^0 + 6 * 10^{-1} + 3 * 10^{-2}$$

وبشكل عام فان

$$x = \sum_{i=0}^{n} a_i * 10^i + \sum_{i=1}^{m} b_i * 10^{-i}$$

الاخطاء في العمليات الحسابية:-

لتكن x^* هي قيمة تقريبية للقيمة الحقيقية x والخطأ المطلق e_x والخطأ النسبي δ_x. ولتكن y^* قيمة تقريبية للقيمة الحقيقية y والخطأ المطلق e_y والخطأ النسبي δ_y. فان الاخطاء على العمليات الحسابية يتم كما يلي:-

1- عملية الجمع:-

$$\begin{aligned} e_{x+y} &= (x + y) - (x^* + y^*) \\ &= (x - x^*) + (y - y^*) \\ &= e_x + e_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{x+y} &= \frac{e_{x+y}}{x + y} = \frac{1}{x + y}(e_x + e_y) \\ &= \frac{1}{x + y}(x\delta_x + y\delta_y) \end{aligned}$$

2- عملية الطرح:- (واجب)

3- عملية الضرب:-

$$\begin{aligned} e_{x*y} &= xy - x^*y^* \\ &= xy - (x - e_x)(y - e_y) \\ &= xy - (xy - xe_y - ye_x + e_xe_y) \\ &= xe_y + ye_x - e_xe_y \\ &= xe_y + ye_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{x*y} &= \frac{e_x}{x} + \frac{e_y}{y} \\ &= \delta_x + \delta_y \end{aligned}$$

4- عملية القسمة:- (واجب)

الفصل الثاني

حل المعادلات غير الخطية

Solution of non-linear equations

سوف نتطرق الى عدد من الطرق العددية التي تهدف الى ايجاد قيم تقريبية لجذر المعادلة $f(x) = 0$ اي الى قيمة x^* بحيث تكون الدالة $f(x^*)$ قريبة من الصفر $f(x^*) \cong 0$.

ان جميع الطرق العددية هذه تحتاج الى قيمة تقريبية اولية لجذر المعادلة المطلوب ايجاد حلها, وتسمى الطرق العددية المستخدمة لايجاد الجذور بالطرق التكرارية وهذه الطرق تحتاج الى الجذر الابتدائي x_0 وهذا يمكن الحصول عليه من خلال تحديد موقع الجذر اولا (الفترة التي تقع فيها الجذر) ومن ثم ناحذ قيمة مقبولة للجذر.

طرق ايجاد مواقع الجذور:-

1-طريقة الرسم:- Graphical method

a- اذا كانت الدالة رسمها تحتوي على منحني واحد فقط فان موقع الجذر يكون عند التقاء الدالة مع محور x .

b- اذا كانت الدالة تحتوي على منحنيين او اكثر اي يمكن كتابة الدالة $f(x) = 0$ بالصيغة $f_1(x) = f_2(x)$, حيث f_1, f_2 دالتين يسهل رسمهما فاذا تقاطع المنحنيين في النقطة (x^*, y^*) فان x^* تعتبر جذرا للمعادلة.

2-طريقة التحليل:- Analytical method

ان هذا الاسلوب في تعيين مواقع الجذور يعتمد بالاساس على مبرهنة القيمة الوسطى والتي تنص على:

اذا كانت f دالة مستمرة حقيقية في الفترة $[a, b]$ وكانت قيمة كل من $f(a), f(b)$ مختلفتين في الاشارة فنه يوجد على الاقل جذر حقيقي واحد في الفترة $[a, b]$.

ان اختيار فترة تقسيم صغيرة يؤدي الى دقة في استخراج مواقع الجذور وعند اختيار فترة تقسيم كبيرة فانه يؤدي الى فقدان بعض الجذور المطلوبة.

اما اذا كانت المعادلة المعطاة تحتوي على دوال مثلثية فلا يمكن تحديد عدد جذورها (الموجبة والسالبة)لانها دوال غير منتهية.

اما اذا كانت المعادلة كثيرة الحدود ذات متغير واحد فانه فالغالب يمكن تحديد عدد جذورها الموجبة والسالبة وان كيفية تحديد عدد الجدور الموجبة والسالبة يعتمد على مايلي:-

1- عدد الجذور الكلية لمتعددة الحدود يساوي قيمة اكبر قوى للمتغير.
2- عدد الجذور الموجبة يساوي عدد التغير الحاصل في اشارة $f(x)$.
3- عدد الجذور السالبة يساوي عدد التغير الحاصل في اشارة $f(-x)$.

مثال:- اوجد عدد ومواقع الجذور الموجبة والسالبة لما ياتي:-

1- $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x - 7}$

عدد الجذور الكلية =2

عدد الجذور الموجبة=1

عدد الجذور السالبة =1

$f(-x) = +x^2 + (-x) - 7$

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
+	-	-	-	-	-	-	+	+

2- $\boldsymbol{f(x) = 2x - cosx - 2}$

لايمكن تحديد عدد الجذور لوجود دالة مثلثية ضمن الدالة $f(x)$

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
-	-	-	-	-	+	+	+

الطرق العددية لحل المعادلات غير الخطية

سنستعرض في هذاالبند عددا من الطرق العددية لايجاد قيمة تقريبية لجذر المعادلة الغير خطية, كأن تكون كثيرة الحدود بمتغير واحد وذات قوى اكبر من (2) او معادلة معقدة يصعب حلها بالطرق الاعتيادية المعروفة.

1-طريقة تنصيف الفترات:- The Bisection method

لنفترض ان الفترة المغلقة $[a, b]$ معلومة, وان الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة وتحقق شرط التحليل (نظرية القيمة المتوسطة) اي ان الفترة المغلقة $[a, b]$ تحتوي على الاقل جذر واحد.

خوارزمية الطريقة:-

a) ايجاد قيمة x_0 من خلال الصيغة التالية $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$

b) ايجاد قيمة $f(x_0)$ بحيث

- اذا كانت $f(x_0) = 0$ فان x_0 هو جذر المعادلة
- اذا كانت $f(a_0).f(x_0) < 0$ فان $a_1 = a_0, x_0 = b_1$ اي ان الفترة التي تحتوي الجذر هي $[a_1, x_0]$ نحسب $x_1 = \frac{a_1+x_0}{2}$

- اذا كانت $f(a_0).f(x_0) > 0$ فان $b_1 = b_0, x_0 = a_1$ اي ان الفترة التي تحتوي الجذر هي $[x_0, b_1]$ نحسب $x_1 = \frac{x_0+b_1}{2}$

اذا كانت $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$ او $|f(x_{i+1})| < \epsilon$ فان x_{i+1} هو جذر المعادلة ونتوقف وبخلاف ذلك نعيد تكرار الخطوات السابقة الى ان نصل للقيمة المطلوبة $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$.

<u>مثال</u>:- باستخدام طريقة تنصيف الفترة جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية

$$f(x) = xlnx - 1, [1,2], \epsilon = 0.001$$

<u>الحل</u>:- تختبر فيما اذا كانت الفترة تحتوي على جذر للمعادلة

$f(1) = -1$

$f(2) = 0.33629436$

$f(1) * f(2) < 0$ يوجد جذر ضمن الفترة المعطاة

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$f(1.5) = -0.391802337$$

$$f(a_0).f(x_0) = (-1) * (-0.391802337) = 0.391802337 > 0$$

$$a_1 = x_0, b_1 = b_0 \Rightarrow [1.5,2]$$

$$|a_1 - b_1| = |1.5 - 2| = 0.5 > 0$$

$$x_1 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$$

$$f(1.75) = -0.020672371$$

$$f(a_1).f(x_1) = (-0.391802337) * (-0.020672371) = 0.008099483 > 0$$

$$a_2 = x_1, b_2 = b_1 \Rightarrow [1.75,2]$$

$$|a_2 - b_2| = |1.75 - 2| = 0.25 > \epsilon$$

$$x_2 = \frac{1.75+2}{2} = 1.875$$

$$f(1.875) = 0.178641836$$

$$f(a_2).f(x_2) = (-0.020672371)(0.178641836) = 0.00369295 < 0$$

$$a_3 = a_2, b_3 = x_2 \Rightarrow [1.75,1.875]$$

$$|a_3 - b_3| = |1.75 - 1.875| = 0.125 > \epsilon$$

$$x_3 = 1.8125\ , [1.75, 1.8125]$$
$$x_4 = 1.78123, [1.75, 1.78125$$
$$x_5 = 1.765625, [1.75, 1.765625]$$
$$x_6 = 1.7578125, [1.7578125, 1.765625]$$
$$x_7 = 1.76171875, [1.76171875, 1.765625]$$
$$x_8 = 1.763671875, [1.7671875, 1.763671875]$$
$$x_9 = 1.762625313$$

$|x_9 - x_8| = 0.000976562$

$x_9 = 1.762625313$ هو الجذر للمعادلة اعلاه بنسبة خطأ اقل من (0.001)

<u>واجب</u>:- باستخدام طريقة تنصيف الفترة جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية

$f(x) = x - cosx, [0,1], \epsilon = 0.02$

<u>الحل</u>:-

0	0.5	0.75	0.875	0.9375	0.96875	0.989375	1
-1	-0.5	-0.25	-0.125	-0.0623	-0.0311	-0.0154	0.0015

$$x_0 = \frac{0+1}{2} = 0.5, \quad [0.5, 1]$$

$$x_1 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75, \quad [0.75, 1]$$

$$x_2 = \frac{0.75+1}{2} = 0.875, \quad [0.875, 1]$$

$$x_3 = \frac{0.875+1}{2} = 0.9375, \quad [0.9375, 1]$$

$$x_4 = \frac{0.9375+1}{2} = 0.96875, \quad [0.96875, 1]$$

$$x_5 = \frac{0.96875+1}{2} = 0.984375, \quad [0.984375, 1]$$

$|x_5 - 1| < \epsilon \to\ x_5$ is the root

2-<u>طريقة الموضع الكاذب</u>:- The False Position method

تعتبر هذه الطريقة من الطرق القديمة لحساب جذور المعادلة الغير الخطية وهي تعتمد ايضا على نظرية القيمة المتوسطة.

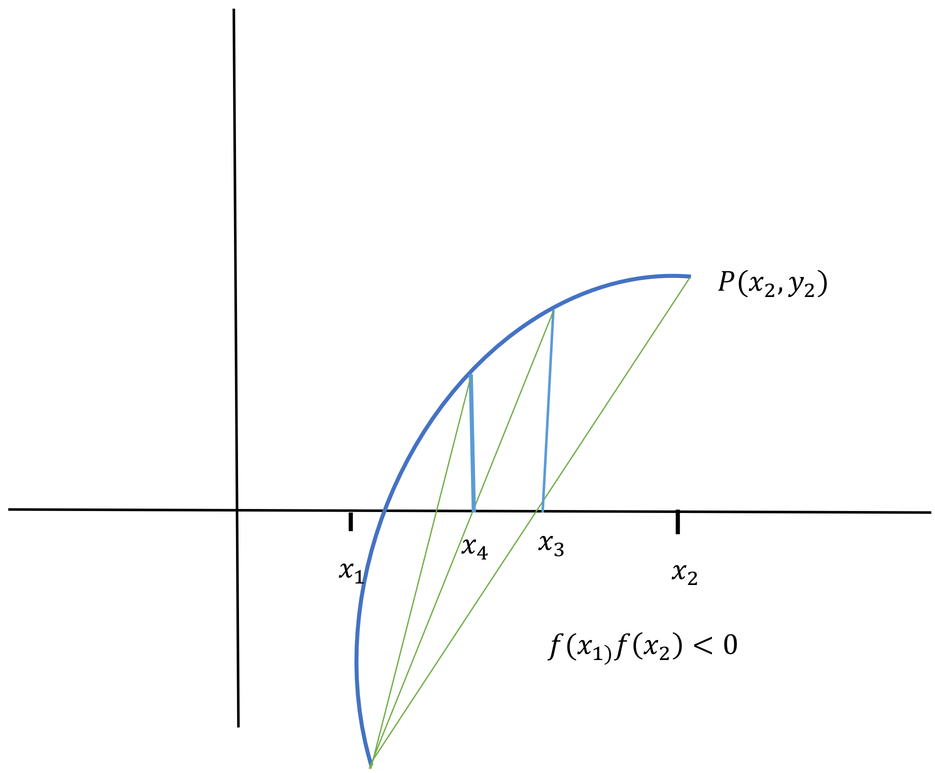
لتكن الدالة $f(x)$ لها جذر يقع في الفترة المغلقة $[x_1 , x_2]$, اي ان x_2, x_1 نقطتان على جانبي جذر المعادلة, نرسم مماس للمنحنيين يصل بين النقطتين $Q(x_1, y_1)$ و $P(x_2, y_2)$ فيقطع محور السيني في النقطة x_3. باستحدام معادلة المماس والتي هي:

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{0 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow (x_3 - x_2) = -\frac{y_2(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)}$$

$$\Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)}$$



فاذا كانت $f(x_1)f(x_2) = 0$ او $f(x_3) = 0$ فان x_3 هي جذر المعادلة.

اما اذا كانت $f(x_1)f(x_3) < 0$ فان جذر المعادلة يقع في $[x_1, x_3]$ اي نضع $x_2 = x_3$ ثم نحسب قيمة x_3 من جديد.

واذا كانت $f(x_1)f(x_3) > 0$ فان جذر المعادلة يقع في $[x_3, x_2]$ اي نضع $x_1 = x_3$ ثم نحسب قيمة x_3 من جديد.

وباعادة الخوارزمية اعلاه وبعد عدة تكرارات فاننا نتوقف عند الدقة المطلوبة (ϵ).

ويممكن وضع صيغة عامة لطريقة الموضع الكاذب وكمايلي:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{y_i(x_i - x_{i-1})}{(y_i - y_{i-1})}, i = 2,3, \ldots.$$

ان شرط التوقف لطريقة الموضع الكاذب يمكن كتابته على النحو التالي

$$|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$$

مثال:- باستخدام طريقة الموضع الكاذب جد الجذر التقريبي للدالة

a) $f(x) = xe^x - 1$ ضمن الفترة $[0,1]$ وبدقة $\epsilon = 0.05$

الحل:-

$x_1 = 0, \quad y_1 = -1$
$x_2 = 1, y_2 = 1.718$

$y_1 * y_2 < 0$ يوجد جذر ضمن الفترة المعطاة

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} = 1 - \frac{1.718(1-0)}{1.718+1} = 0.368$$

$$|x_3 - x_2| = 0.632 > \epsilon$$

$$y_3 = f(x_3) = -0.468, \; y_1 * y_3 > 0 \Rightarrow [0.368,1]$$

$$x_4 = x_3 - \frac{y_3(x_3 - x_2)}{y_3 - y_2} = 0.368 + \frac{0.468(0.368-1)}{-0.468-1.718} = 0.503$$

$$|x_4 - x_3| = 0.135 > \epsilon$$

$$y_4 = f(x_4) = -0.168, \; y_3 * y_4 > 0 \Rightarrow [0.503,1]$$

$$x_5 = x_4 - \frac{y_4(x_4 - x_3)}{y_4 - y_3} = 0.503 + \frac{0.168(0.503-1)}{-0.168-1.718} = 0.547$$

$$|x_5 - x_4| = 0.044 < \epsilon$$

x_5 هو الجذر المطلوب

$\epsilon = 0.02$ وبدقة $[1,2]$ ضمن الفترة $f(x) = x^6 - x - 1$ (b

الحل:-

$x_1 = 1, \quad y_1 = -1$
$x_2 = 2, \quad y_2 = 61$

$y_1 * y_2 < 0$ يوجد جذر ضمن الفترة المعطاة

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} = 2 - \frac{61(2-1)}{61+1} = 1.016$$

$|x_3 - x_2| = 0.984 > \epsilon$

$y_3 = f(x_3) = -0.916, \quad y_1 * y_3 > 0 \Rightarrow [1.016,2]$

$$x_4 = x_3 - \frac{y_3(x_3 - x_2)}{y_3 - y_2} = 1.016 + \frac{0.916(1.016-2)}{-0.916-61} = 1.031$$

$|x_4 - x_3| = 0.015 > \epsilon$

$y_4 = f(x_4) = -0.83, \quad y_3 * y_4 > 0 \Rightarrow [1.031,2]$

$$x_5 = x_4 - \frac{y_4(x_4 - x_3)}{y_4 - y_3} = 1.031 + \frac{0.83(1.031-2)}{-0.83-61} = 1.044$$

$|x_5 - x_4| = 0.013 < \epsilon$

x_5 هو الجذر المطلوب

واجب:- باستخدام طريقة الموضع الكاذب جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية
$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1, [-1,0], \epsilon = 0.00005$

3-طريقة القاطع:- Secant method

ان هذه الطريقة متشابهة الى طريقة الموضع الكاذب غير ان تقارب هذه الطريقة غير مؤكد ولكنها اذا تقاربت فان تقاربها يكون سريعا.

الصيغة العامة لهذه الطريقة هي:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{y_i(x_i - x_{i-1})}{(y_i - y_{i-1})}, i = 2,3, \ldots.$$

مع شرط التقارب $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$

مثال:- باستخدام طريقة القاطع جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية

$$f(x) = xlnx - 1, [1,2], \epsilon = 0.005$$

الحل:-

$x_1 = 1, \qquad y_1 = -1$
$x_2 = 2, \qquad y_2 = 0.3862$

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} = 2 - \frac{0.3862(2-1)}{0.3862 + 1} = 1.7213$$

$|x_3 - x_2| = 0.2787 > \epsilon$

$x_2 = 2, \qquad y_2 = 0.3862$
$x_3 = 1.7213, \qquad y_3 = -0.0651$

$$x_4 = x_3 - \frac{y_3(x_3 - x_2)}{y_3 - y_2} = 1.7213 + \frac{0.0651(1.7213 - 2)}{-0.0651 - 0.3862} = 1.7613$$

$|x_4 - x_3| = 0.04 > \epsilon$

$x_3 = 1.7213, \qquad y_3 = -0.0651$
$x_4 = 1.7613, \qquad y_4 = -0.003$

$$x_5 = x_4 - \frac{y_4(x_4 - x_3)}{y_4 - y_3} = 1.7613 + \frac{0.003(1.7613 - 1.7213)}{-0.003 + 0.0651} = 1.9275$$

$|x_5 - x_4| = 0.2062 > \epsilon$

$x_4 = 1.7613, \qquad y_4 = -0.003$
$x_5 = 1.9275, \qquad y_5 = 0.2648$

$$x_6 = x_5 - \frac{y_5(x_5 - x_4)}{y_5 - y_4} = 1.9275 - \frac{0.2648(1.9275 - 1.7213)}{0.2648 + 0.003} = 1.72359$$

$|x_6 - x_5| = 0.00377 < \epsilon,\quad x_6$ is the root

واجب:- باستخدام طريقة القاطع جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية

a) $f(x) = sinx - x^2 - x + 1, [1,2], \epsilon = 0.001$

b) $f(x) = xe^x - 1, [0,1], \epsilon = 0.05$

4-طريقة نيوتن - رافسون:- Newton-Raphson method

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق في $[a,b]$ ولتكن x_0 قيمة اولية للجذر فان قيمة الجذر الجديد هو $x_1 = x_0 + h$ حيث ان h قيمة التصحيح في قيمة x

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_0 + h)$$

وباستخدام صيغة تايلر عن النقطة x_0 فان

$$f(x_1) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots$$

لتكن x_1 قريبة من الجذر بالنسبة الى x_0 فانه يمكن كتابة $f(x_1) \approx 0$ هذا يعني

$$f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) = 0$$

عند بتر المتسلسلة بعد الثاني نحصل على

$$f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_0)f'(x_0) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

وبصورة عامة فان

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad , i = 0,1, \ldots$$

نتوقف عن التكرار عندما $|x_{i+1} - x_i| \le \epsilon$

4-طريقة نيوتن – رافسون المحسنة:- Improvement Newton-Raphson method

وباستخدام سلسلة تايلر ايضا مع بتر هذه السلسلة بعد الحد الثالث نحصل على

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - \frac{f^2(x_0) f''(x_0)}{2f'^3(x_0)} \quad , i = 0,1, \dots$$

مثال:- باستخدام طريقة نيوتن-رافسون جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1, [0,1], \epsilon = 0.0001$$

الحل :- اولا نشتق الدالة بحيث $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$ ومن ثم نوجد قيمة اولية من خلال تقسيم الفترة وذلك

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 0.5$$

$$f(x_0) = -0.125$$

$$f'(x_0) = 1.75$$

$$f''(x) = 6x - 2 \Rightarrow f''(x_0) = 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.5 - \frac{-0.125}{1.75} = 0.57143$$

$$|x_1 - x_0| = |0.57143 - 0.5| = 0.0714 > \epsilon$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.57143 - \frac{0.00213}{1.84} = 0.56984$$

$$|x_2 - x_1| = |0.56984 - 0.57143| = 0.00158 > \epsilon$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.56984 - \frac{-0.0000005}{1.83447} = 0.56984$$

$$|x_3 - x_2| =< \epsilon$$

x_3 هو الجذر المطلوب

مثال:- باستخدام طريقة نيوتن-رافسون جد قيمة تقريبية لجذر المعادلة التالية

$$f(x) = xe^x + x^2 - 5, [1,2], \epsilon = 0.003$$

الحل :- اولا نشتق الدالة بحيث $f'(x) = (x+1)e^x + 2x$ ومن ثم نوجد قيمة اولية من خلال تقسيم الفترة وذلك

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 1.5$$

$$f(x_0) = 3.973$$

$$f'(x_0) = 14.204$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.22$$

$$|x_1 - x_0| = |1.22 - 1.5| = 0.28 > \epsilon$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.158$$

$$|x_2 - x_1| = |1.158 - 1.22| = 0.062 > \epsilon$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.155$$

$|x_3 - x_2| = |1.155 - 1.158| = 0.003 \leq \epsilon$, x_3 is the root

مثال:- باستخدام طريقة نيوتن-رافسون جد الجذر النوني للعدد $a > 0$

الحل:-

$$x = \sqrt[n]{a}$$

$$x^n = a$$

$$f(x) = x^n - a$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$\therefore x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^n - a}{nx_i^{n-1}}$$

واجب:- بدون استخدام عامل القسمة اقترح صيغة تكرارية لايجاد مقلوب العدد $a > 0$

5-الصيغة التكرارية للنقطة الصامدة:- The fixed point iterative method

تعد هذه الطريقة من الطرق الجيدة لايجاد جذور المعادلات الغير خطية وذات متغير واحد. لتكن $f(x)=0$ دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وتحتوي على جذر حقيقي في هذه الفترة

- اعادة ترتيب المعادلة $f(x)=0$ وذلك بابقاء متغير واحد x عند يسار المساواة وتحويل كافة المتغيرات عند يمين المساواة اي بمعنى $x=g(x)$ حيث ان $g(x)$ تعتبر كدالة جديدة لـ x وتختلف عن $f(x)$.
- ناخذ مشتقة $g(x)$ اي $\acute{g}(x)$.
- نقوم بالتعويض بقيمة الجذر الاولي والتي يمكن الحصول عليها من خلال تقسيم الفترة $[a,b]$ اي ايجاد $\acute{g}(x_0)$.
- اختبار مدى دقة الصيغة المقترحة في الوصول للحل وذلك بتطبيق الصيغة $|\acute{g}(x_0)|<1$:
  - فاذا كانت الصيغة اعلاه صحيحة فان الصيغة $g(x)$ توصلنا الى الحل الصحيح (الجذر المطلوب) ونكمل الحل باستخدام الصيغة التكرارية لـ $g(x)$ والتي هي:
  $$x_{i+1}=g(x_i)\ \ ,i=0,1,2,\dots$$
  - اما اذا كانت قيمة $|\acute{g}(x_0)|\geq 1$ فان الصيغة $g(x)$ لا توصلنا الى الحل الصحيح عندئذ نقوم بايجاد صيغة اخرى.
- شرط التوقف: نتوقف عن تكرار عملية ايجاد الحل باستخدام الشرط $|x_{i+1}-x_i|<\epsilon$

مثال:- باستخدام طريقة النقطة الصامدة جد جذر المعادلة $x^2-x-3=0$ علما ان $x_0=2.5$.

الحل:-

$$x=1+\frac{3}{x}=g_1(x)$$

$$x=x^2-3=g_2(x)$$

$$x=\frac{1}{8}(9x-x^2+3)=g_3(x)$$

$$x=\frac{x^2+3}{2x-1}=g_4(x)$$

n	$x_{n+1}=g_1(x_n)$	$x_{n+1}=g_2(x_n)$	$x_{n+1}=g_3(x_n)$	$x_{n+1}=g_4(x_n)$
0	2.5	2.5	2.5	2.5
1				
2				
3				
4				
5	2.30892	$7.41*10^{13}$	2.30770	2.302772

ان الصيغة g_1 , g_3 , g_4 تعطي قيم متقاربة بينما اعطت الصيغة g_2 قيم متباعدة عن الجذرلماذا؟

مثال:- باستخدام طريقة النقطة الصامدة جد جذر المعادلة $4x^2 - 2x - 1 = 0$ في الفترة $[0,1]$, $\epsilon = 0.005$

الحل:-

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 0.5$$

$$4x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 - 2x \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1-2x}$$

$$g_1'(x_0) = \pm\frac{1}{2\sqrt{1-2x}}$$

$g_1'(x) = \pm\frac{1}{2\sqrt{1-1}} \Rightarrow$ الصيغة لاتوصلنا للحل

$$4x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 - 4x^2 \Rightarrow x = \frac{1-4x^2}{2}$$

$$g_2(x) = \frac{1}{2} - 2x^2$$

$$g_2'(x) = -4x \Rightarrow g_2'(x_0) = -2$$

$$\Rightarrow |g_2'(x_0)| = 2 > 1$$

$$4x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x(4x+2) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4x+2}$$

$$g_3(x) = \frac{1}{4x+2}$$

$$g_3'(x) = \frac{4}{(4x+2)^2} \Rightarrow g_2'(x_0) = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow |g_2'(x_0)| = \frac{1}{4} < 1$$

باستخدام الصيغة التكرارية $x_{n+1} = g(x_n)$ فان $x_{i+1} = \frac{1}{(4x_i+2)}$ وعليه فان

$$x_1 = \frac{1}{(4x_0 + 2)} = \frac{1}{(4 * 0.5 + 2)} = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{(4x_1 + 2)} = \frac{1}{(4 * 0.25 + 2)} = \frac{1}{3}$$

$$|x_2 - x_1| = 0.08 > \epsilon$$

$$x_3 = 0.3$$

$$|x_3 - x_2| = 0.03 > \epsilon$$

$$x_4 = 0.313$$

$$x_5 = 0.308$$

$$|x_5 - x_4| = 0.005 = \epsilon$$

$\therefore$ x_5 is the root

<u>شرط تقارب طريقة نتوتن –رافسون:-</u>

ان صيغة نيوتن-رافسون تتمثل بالشكل التالي:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\acute{f}(x_n)}, \qquad n = 1,2,3, \ldots.$$

وعند ملاحظة الصيغة العامة للطريقة التكرارية للنقطة الصامدة $x_{n+1} = g(x_n)$ فان صيغة نيوتن-رافسون تكافئه

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{\acute{f}(x)}$$

وبما ان شرط التقارب للطريقة التكرارية للنقطة الصامدة هي $|g'(x_0)| < 1$ فان

$$\acute{g}(x) = 1 - \frac{\acute{f}(x)\acute{f}(x) - f(x)f''(x)}{\left[\acute{f}(x)\right]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{\left[\acute{f}(x)\right]^2}$$

وبهذا يكون شرط التقارب هو $\left|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{\left[\acute{f}(x_0)\right]^2}\right| < 1$

<u>واجب:-</u> اثبت بان حلول الامثلة السابقة التي تم حلها باستحدام طريقة نيوتن-رافسون متقاربة

6- <u>طريقة القسمة التركيبية</u>:- The synthetic division method

نفرض ان x^* تخمين لجذر المعادلة الاتية $f(x) = 0$. اذا كانت الدالة $f(x)$ هي متعددة حدود من الدرجة n عندئذ يمكن كتابتها كما يلي

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

ومعاملاتها حقيقية وبقسمة المعادلة على $(x - x^*)$ نحصل على

$$\frac{f(x)}{(x - x^*)} = b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \cdots + b_{m-1} + \frac{b_m}{(x - x^*)}$$

$$f(x) = (x - x^*)(b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}) + b_m$$

بالمقارنة بين المعادلتين الاولى والاخيرة نحصل على

$$a_0 = b_0$$

$$b_k = a_k - x^*b_{k-1}, k = 1,2, \dots, m$$

ويمكن كتابتها كما يلي

$$a_0 = b_0$$

$$b_k = a_k + x^*b_{k-1}, k = 1,2, \dots, m$$

وان قيمة الدالة $f(x)$ عند النقطة x^* تساوي b_m اي ان $f(x^*) = b_m$

نفرض ان

$$g(x) = b_0x^{m-1} + b_1x^{m-2} + \cdots + b_{m-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - x^*)g(x) + b_m$$

$$f'(x) = (x - x^*)g'(x) + g(x)$$

$$f'(x^*) = g(x^*)$$

بنفس الاسلوب نحصل على

$$c_0 = b_0$$

$$c_k = b_k + x^*c_{k-1}, k = 1,2, \dots, m-1$$

وان قيمة الدالة $g(x)$ عند النقطة x^* تساوي c_{m-1} اي ان $g(x^*) = c_{m-1}$ (كيف \ واجب)

اي ان

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b_m}{c_{m-1}} =$$

صيغة نيوتن – رافسون لمتعددة الحدود.

يمكن تلخيص الطريقة بالخوارزمية الاتية:-

1- نفرض ان x_0 هي نقطة البداية
2- نحسب $c_0 = b_0 = a_0$ ومن ثم نحسب $b_k = a_k + x^* b_{k-1}, k = 1,2,\dots,m$ وايضا $c_k = b_k + x^* c_{k-1}, k = 1,2,\dots,m-1$
3- نحسب $x_{n+1} = x_n - \frac{b_m}{c_{m-1}}$
4- نكرر الخطوات 2 و 3 حتى نحصل على قيمة تقريبية لجذر المعادلة

a_i	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{m-1}	a_m
$x_0 b_{i-1}$		$x_0 b_0$	$x_0 b_1$	$\dots$	$x_0 b_{m-2}$	$x_0 b_{m-1}$
b_i	b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_{m-1}	b_m
$x_0 c_{i-1}$		$x_0 c_0$	$x_0 c_1$	$\dots$	$x_0 c_{m-2}$	
	c_0	c_1	c_2	$\dots$	c_{m-1}	

<u>مثال:-</u> باستخدام طريقة القسمة التركيبية جد جذر المعادلة $x^3 - x^2 + 2x + 5 = 0$ علما ان $x_0 = -1$

<u>الحل:-</u>

a_i	1	-1	2	5
$x_0 = -1$		-1	2	-4
b_i	1	-2	4	1
$x_0 = -1$		-1	3	
	1	-3	7	

$$\therefore\ x_1 = x_0 - \frac{b_m}{c_{m-1}} = -1 - \frac{1}{7} = -1.14286$$

a_i	1	-1	2	5
$x_0 = -1.14286$		-1.14286	2.44899	-5.08457
b_i	1	-2.14286	4.44899	-0.08457
$x_0 = -1.14286$		-1.14285	3.75511	-0.0103
	1	-3.28571	8.2041	

$$\therefore\ x_2 = x_1 - \frac{b_m}{c_{m-1}} = -1.14285 + 0.0103 = -1.13515$$

حل منظومة المعادلات غير الخطية:-

Solution for system of non-linear equation

سوف نتطرق في هذا الموضوع على حل منظومة مكونة من معادلتين لمتغييرين فقط.

لتكن $f(x,y)=0, g(x,y)=0$ معادلتين والحل المضبوط لهما هو (x,y) ولتكن (x_0,y_0) الحل التقريبي الاولي.

1-<u>الطريقة التكرارية</u>:- The iterative method

علينا تحويل المعادلتين الى الصيغتين $x=F(x,y)$ و $y=G(x,y)$ ولاختبار الصيغتين يجب ان يتحقق الشرط التالي:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|<1 \ \& \ \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|<1$$

بعد اختبار الصيغتين فان القانون العام للطريقة التكرارية هي:

$$x_{i+1}=F(x_i,y_i)$$

$$y_{i+1}=G(x_i,y_i), \quad i=0,1,\ldots$$

وشرط التوقف يكون

$$|x_{i+1}-x_i|<\epsilon \ \ or \ \ |y_{i+1}-y_i|<\epsilon$$

<u>مثال</u>:- جد حل لمنظومة المعادلات $f(x,y)=x^2+y^2-25=0$ و $g(x,y)=x^2-y^2-7=0$ عند القيمة $[3,4]$ و لثلاث تكرارات

<u>الحل</u>:-

$$x^2+y^2-25=0 \Rightarrow y=\sqrt{25-x^2}=G(x,y)$$

$$x^2-y^2-7=0 \Rightarrow x=\sqrt{y^2+7}=F(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0\,,\frac{\partial G}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{y^2+7}}\,,\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|=0+\frac{3}{4}<1$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| = \frac{4}{\sqrt{23}} + 0 < 1$$

∴ الصيغة صحيحة وذلك لتحقق الشرطين

∴ الصيغة العامة للمسالة هي:

$$x_{i+1} = \sqrt{y_i^2 + 7} \qquad y_{i+1} = \sqrt{25 - x_i^2}$$

$$x_1 = \sqrt{y_0^2 + 7} = \sqrt{23} = 4.796 \qquad y_1 = \sqrt{25 - x_0^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_2 = \sqrt{y_1^2 + 7} = 4.796 \qquad y_2 = \sqrt{25 - x_1^2} = \sqrt{16} = 1.414$$

$$x_3 = \sqrt{y_2^2 + 7} = 3.0 \qquad y_3 = \sqrt{25 - x_2^2} = \sqrt{16} = 1.414$$

2-<u>الصيغة التعجيلية (المطورة)</u>:- The modify formula

$$x_{i+1} = F(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = G(x_{i+1}, y_i), \quad i = 0,1, \dots$$

في المثال السابق

$$F(x, y) = \sqrt{y^2 + 7}$$

$$G(x, y) = \sqrt{25 - x^2}$$

فان الصيغة العامة باستخدامالصيغة المطورة هي:

$$x_{i+1} = F(x_i, y_i) \qquad y_{i+1} = G(x_{i+1}, y_i)$$

$$x_{i+1} = \sqrt{y_i^2 + 7} \qquad y_{i+1} = \sqrt{25 - x_{i+1}^2}$$

$$x_1 = 4.796 \qquad y_1 = 1.414$$

$$x_2 = 3 \qquad y_2 = 4$$

$$x_3 = 4.796 \qquad y_3 = 1.414$$

مثال:- باستخدام طريقة التكرارية جد حل لمنظومة المعادلات $f(x,y) = x + 3logx - y^2 = 0$
و $g(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$ عند القيمة $[3.5,2.5]$ و $\epsilon =$
0.002

الحل:-

$$x + 3logx - y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x + 3logx} = G(x,y)$$

$$2x^2 - xy - 5x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{xy + 5x - 1} = F(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y + 5}{2\sqrt{2}\sqrt{xy + 5x - 1}}\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{2}\sqrt{xy + 5x - 1}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1 + \frac{3}{x}}{2\sqrt{x + 3logx}}\,, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| = 0.589 + 0.41 < 1$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| = 0.27 + 0 < 1$$

الصيغة العامة هي:

$$x_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x_i y_i + 5x_i - 1} \qquad y_{i+1} = \sqrt{x_{i+1} + 3logx_{i+1}}$$

$x_1 = 3.553$ $\qquad$ $y_1 = 2.281$

$x_2 = 3.526$ $\qquad$ $y_2 = 2.273$

$x_3 = 3.510$ $\qquad$ $y_3 = 2.268$

$x_4 = 3.501$ $\qquad$ $y_4 = 2.266$

$|y_4 - y_3| = 0.002 = \epsilon$

The solution is (3.501, 2.266)

برهان شرط التقارب $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| < 1$ **&** $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| < 1$

نفرض ان (λ, μ) هو جذر لمنظومة المعادلات $f(x,y) = 0, g(x,y) = 0$ عندئذ فان

$$\lambda = F(\lambda, \mu)$$
$$\mu = G(\lambda, \mu)$$

باستخدام الصيغة التكرارية نحصل على

$$x_1 = F(x_0, y_0)$$
$$y_1 = G(x_0, y_0)$$

بالطرح نحصل على

$$x_1 - \lambda = F(x_0, y_0) - F(\lambda, \mu)$$
$$y_1 - \mu = G(x_0, y_0) - G(\lambda, \mu)$$

باستخدام سلسلة تايلر على الدالة $F(x_0, y_0)$ و $G(x_0, y_0)$ فان

$$F(x_0, y_0) = F(\lambda, \mu) + (x_0 - \lambda)\frac{\partial F}{\partial x} + (y_0 - \mu)\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$G(x_0, y_0) = G(\lambda, \mu) + (x_0 - \lambda)\frac{\partial G}{\partial x} + (y_0 - \mu)\frac{\partial G}{\partial y}$$

بالتعويض نحصل

$$x_1 - \lambda = (x_0 - \lambda)\frac{\partial F}{\partial x} + (y_0 - \mu)\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$y_1 - \mu = (x_0 - \lambda)\frac{\partial G}{\partial x} + (y_0 - \mu)\frac{\partial G}{\partial y}$$

$$L = max\left\{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|\right\}$$

بالتعويض ايضا نحصل

$$|x_1 - \lambda| + |y_1 - \mu| \le L(|x_0 - \lambda| + |y_0 - \mu|)$$

وبصورة عامة فان

$$|x_{n+1} - \lambda| + |y_{n+1} - \mu| \le L^n(|x_0 - \lambda| + |y_0 - \mu|)$$

فاذا كان ت قيمة L اقل من واحد فان طرف الايمن من الصيغة اعلاه سوف تقترب من الصفر عندئذ فان

$$x_{n+1} \Rightarrow \lambda$$
$$y_{n+1} \Rightarrow \mu$$

وهذا يعني ان شرط التقارب لصيغة التكرارية هي: $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| < \mathbf{1}$ **&** $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| < \mathbf{1}$

الفصل الثالث

الحلول العددية لمنظومة المعادلات الخطية

Numerical Solution for system linear equations

ان كثير من المسائل في بعض الحالات العلمية وفي التحليل العددي يتطلب حلها معرفة ببعض طرق الحلول العددية لمنظومة المعادلات الخطية.

يمكن كتابة المنظومة العامة المتكونة من n من المعادلات الخطية والتي تحتوي على n من المجاهيل ومن الدرجة الاولى بالشكل التالي:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

حلها ينقسم الى ثلاث حالات:

1- اذا كانت عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل, فان المنظومة لها حل ولكن ليس حلا وحيدا.
2- اذا كانت عدد المعادلات اكثر من عدد المجاهيل, فان المعادلات قد لايكون لها حل على الاطلاق.
3- اذا كانت عدد المعادلات متساوي عدد المجاهيل, فان المنظومة لها حل وحيد.

ان الحلول العددية لهذا النظام يتكون من نمطين مختلفين:

النمط الاول:- الطرق المباشرة Direct method

النمط الثاني:- الطرق التكرارية Iterative method

الطرق المباشرة Direct method

1- طريقة كَاوس للحذف Gaussian Elimination method

تعتبر من ابسط الطرق المباشرة لحل المنظومة المعادلات الخطية ويمكن توضيحها بما يلي:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

يمكن كتابة المعادلات اعلاه بالشكل التالي

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & . & & . \\ & & . & & . \\ & & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

1- نحول المصفوفة اعلاه الى مصفوفة مثلثية عليا وذلك باتباع ما يلي:

a) تصفير قيمة $a_{m1}, \dots a_{31}, a_{21}$ من المعادلات اي ما تحت القطر الرئيسي بشكل متتالي بالصيغة $m_1 = \frac{-a_{21}}{a_{11}}$ بضرب في الصف الاول وبجمع مع الصف الثاني وكذلك $m_2 = \frac{-a_{31}}{a_{11}}$ بضرب في الصف الاول وبجمع مع الصف الثالث وهكذا تصبح المصفوفة بالشكل التالي:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \acute{a}_{22} & \dots & \acute{a}_{2n} & \acute{b}_2 \\ 0 & \acute{a}_{32} & \dots & \acute{a}_{3n} & \acute{b}_3 \\ & & . & & . \\ & & . & & . \\ 0 & \acute{a}_{m2} & \dots & \acute{a}_{mn} & \acute{b}_m \end{array}\right]$$

b) تصفير قيمة $\acute{a}_{m2}, \dots \acute{a}_{42}, \acute{a}_{32}$ حيث نجد $\acute{m}_1 = \frac{-\acute{a}_{32}}{a_{22}}$ يضرب في السطر الثاني ويجمع مع السطر الثالث وايضا نجد $\acute{m}_2 = \frac{-\acute{a}_{42}}{a_{22}}$ ويضرب في السطر الثاني ويجمع مع السطر الرابع وهكذا حتى تصبح المصفوفة بالشكل التالي:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \acute{a}_{22} & \dots & \acute{a}_{2n} & \acute{b}_2 \\ & & & & \acute{b}_3 \\ & & . & & . \\ & & . & & . \\ 0 & 0 & \dots & \acute{}a_{mn} & \acute{b}_m \end{array}\right]$$

2- نحل المنظومة المثلثية العليا الجديدة بطريقة التعويض التراجعي

$$x_n = \frac{\acute{b}_m}{\acute{a}_{mn}}$$

.

.

.

$$x_2 = \frac{1}{\acute{a}_{22}}(\acute{b}_2 - \acute{a}_{23}x_3 - \ \dots - \acute{a}_{2n}x_n)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}\, x_2 - \ \dots - a_{1n}x_n)$$

<u>مثال:-</u> باستخدام طريقة كاوس للحذف جد حل لمنظومة المعادلات

$$\begin{aligned} 3x_1 - \ x_2 + \ 2x_3 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_1 - \ 2x_2 - \ x_3 &= \ 2 \end{aligned}$$

<u>الحل:-</u>

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

بضرب $m_1 = \frac{-1}{3}$ في الصف الاول ويجمع مع الصف الثاني و بضرب $m_2 = \frac{-2}{3}$ في الصف الاول ويجمع مع الصف الثالث ينتج

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & 7 \\ 0 & -4/3 & -7/3 & -6 \end{array}\right]$$

بضرب $m_1 = \frac{4}{7}$ في الصف الثاني ويجمع مع الصف الثالث ينتج

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow -x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 2$$

$$\frac{7}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = 7 \Rightarrow x_2 + 2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$3x_x - 1 + 4 \Rightarrow x_x = 3$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (3,1,2)$$

2- طريقة كَاوس جوردن Gauss- Jordan method

تعد هذه الطريقة من الطرق المباشرة وهي مشابه الى حد كبير لطريقة كَاوس للحذف لحل منظومة من المعادلات $Ax = b$ والاختلاف بينهما هو ان الحل في طريقة كَاوس جوردن يتم تحويل المصفوفة الى مصفوفة قطرية ولهذا نحصل مباشرة على الحل النهائي لمجموعة المعادلات ولاتحتاج لتطبيق التعويض التراجعي.

مثال:- باستخدام طريقة كَاوس جوردن جد حل لمنظومة المعادلات

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

الحل:-

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} 3r_2 + r_1 \to r_2 \\ -2r_1 + 3r_3 \to r_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & -1 & -7 & -21 \\ 0 & -4 & -7 & -18 \end{array}\right] -\frac{1}{7}r_2 \to r_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -18 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_2 + r_1 \to r_1 \\ 4r_2 + r_3 \to r_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{3}r_1 \to r_1 \\ -\frac{1}{3}r_3 \to r_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} -r_3 + r_1 \to r_1 \\ -r_3 + r_2 \to r_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (3,1,2)$$

واجب:- باستخدام طريقة گاوس للحذف / گاوس جوردن جد حل لمنظومة المعادلات

$$\begin{aligned} 2x-6y-\ z\ &=-12 \\ 5x\ -y+2z&=29 \\ -3x-4y+\ z&=\ 5 \end{aligned}$$

الطرق التكرارية Iterative method

تمتاز هذه الطرق ببساطتها وسهولة برمجتها حيث ان الخطا يكون صغيرا جدا. وان من اهم الطرق التكرارية التي سوف نتطرق اليها هي :-

1- طريقة جاكوبي Jacobi method

تعد من اول الطرق التكرارية التي استخدمت لايجاد الحل العددي وهي طريقة سهلة الاستخدام ولكنها بطيئة في الوصول الى الحل الصحيح. لتكن لدينا منظومة المعادلات التالية

$$\begin{gathered} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\quad\dots\quad\dots \\ \dots\quad\dots\quad\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{gathered}$$

بحيث ان $a_{11},a_{22},\dots,a_{mn}\neq 0$ يمكن اعادة صياغة المعادلات الخطية اعلاه بالشكل الذي يسمح لنا ايجاد قيمة x_1 من المعادلة الاولى وقيمة x_2 من المعالدلة الثانية وهكذا الى قيمة x_n من المعادلة (n) وكالاتي:

$$\begin{gathered} x_1=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3-\cdots-a_{1n}x_n) \\ x_2=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1-a_{23}x_3-\cdots-a_{2n}x_n) \\ \dots\quad\dots\quad\dots \\ \dots\quad\dots\quad\dots \\ x_n=\frac{1}{a_{mn}}(b_m-a_{m1}x_1-a_{m2}x_2-\cdots-a_{mn-1}x_{n-1}) \end{gathered}$$

نفرض ان الحل الابتدائي هو $(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ عندئذن نحصل على اول تقريب جديد للقيم $(x_1^1,x_2^1,\dots,x_n^1)$ من خلال تعويضها بمنظومة المعادلات اعلاه وحسب ما يلي

$$x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0 - \cdots - a_{1n}x_n^0)$$
$$x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0 - \cdots - a_{2n}x_n^0)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$x_n^1 = \frac{1}{a_{mn}}(b_m - a_{m1}x_1^0 - a_{m2}x_2^0 - \cdots - a_{mn-1}x_{n-1}^0)$$

نستخدم القيم جديد من التكرار الاول $(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ لايجاد قيم التكرار الثاني وهكذا.
الصيغة العامة لطريقة جاكوبي التكرارية هي

$$x_i^{(k+1)} = (\, b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} a_{ij}x_j^k)/a_{ii},\ n = 1,2,\ldots$$

نتوقف عندما $\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| \leq \epsilon$ وان شرط التقارب للوصول الى الحل الصحيح هو
$$max \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

2- طريقة گاوس - سيدل Gauss-Seidel method

تعتبر طريقة گاوس-سيدل تحسين لطريقة جاكوبي, حيث تستخدم التقريبات الجديدة المحسوبة x_i^{k+1} بمجرد حسابها دون الانتظارالى دورة ثانية.

نفترض ان النظام الخطي المراد حله هو:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

فان قيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ من المعادلات اعلاه تستخرج من خلال الصيغة التالية

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{mn}}(b_m - a_{m1}x_1^{(k+1)} - a_{m2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{mn-1}x_{n-1}^{(k+1)})$$

الصيغة العامة لطريقة گاوس - سيدل التكرارية هي

$$x_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij}x_j^{k})/a_{ii},\ n = 1,2,\dots$$

نتوقف عندما $\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| \le \epsilon$ وان شرط التقارب للوصول الى الحل الصحيح هو

$$max \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

<u>**مثال:-**</u> باستخدام طريقة جاكوبي / گاوس - سيدل جد حل لمنظومة المعادلات

$$\begin{aligned} 10x_1 + \ x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 \ + 10x_2 + x_3 &= 12 \\ x_1 + \ x_2 + \ 10x_3 &= \ 12 \end{aligned}$$

حيث ان $x_1^0 = x_2^0 = \ x_3^0 = 0$ ولثلاث تكرارات.

<u>الحل:-</u>

$$\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right| = \left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{1}{10}\right| = 0.2$$

$$\left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| = \left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{1}{10}\right| = 0.2$$

$$\left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| = \left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{1}{10}\right| = 0.2$$

$$max\{0.2, 0.2, 0.2\} = 0.2 < 1 \Rightarrow convergence$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_2^k - x_3^k\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_1^k - x_3^k\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_1^k - x_2^k\right)$$

$$k = 0$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^0 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 0 - 0) = 1.2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^0 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 0 - 0) = 1.2$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^0 - x_2^0) = \frac{1}{10}(12 - 0 - 0) = 1.2$$

$k = 1$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^1 - x_3^1) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 1.2) = 0.96$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^1 - x_3^1) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 1.2) = 0.96$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^1 - x_2^1) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 1.2) = 0.96$$

$k = 2$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^2 - x_3^2) = \frac{1}{10}(12 - 0.96 - 0.96) = 1.008$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^2 - x_3^2) = \frac{1}{10}(12 - 0.96 - 0.96) = 1.008$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{10}(12 - 0.96 - 0.96) = 1.008$$

By Gauss-Seidel

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_2^k - x_3^k\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_1^{(k+1)} - x_3^k\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(12 - x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)}\right)$$

$k = 0$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^0 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 0 - 0) = 1.2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^1 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 0) = 1.08$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^1 - x_2^1) = \frac{1}{10}(12 - 1.2 - 1.08) = 0.972$$

$k = 1$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_2^0 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 1.08 - 0.972) = 0.9948$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^2 - x_3^0) = \frac{1}{10}(12 - 0.9948 - 0.972) = 1.00332$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}(12 - x_1^2 - x_2^2) = \frac{1}{10}(12 - 0.9948 - 1.00332) = 1.000188$$

<u>مثال</u>:- باستخدام طريقة جاكوبي / گاوس - سيدل جد حل لمنظومة المعادلات

$$\begin{aligned} 4x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 \ - 7x_2 + 10x_3 &= 2 \\ x_1 + \ \ 3x_2 - \ x_3 &= \ 8 \end{aligned}$$

حيث ان $x_1^0 = 1, x_2^0 = 3, \ x_3^0 = 2$ ولثلاث تكرارات.

الفصل الرابع

التعديل الداخلي

Interpolating polynomials

اذا كان لدينا مجموعة منتهية من قيم دالة غير معروفة $f: f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n),$ ونريد تخمين قيمة الدالة عند نقطة ما x^* . فاذا كانت x^* واقعة ضمن مدى النقاط $\{x_i\}$ فان عملية التخمين تسمى بالاندراج وبعكس ذلك فان العملية تسمى عندئذ بالاستكمال وهناك طرق عديدة لايجاد هذه الدالة:

1- طريقة الرسم :- وهي من الطرق القديمة, وبالرغم من استخدامها في عملية تعديل الدالة فانها تعتبر طريقة ضعيفة.
2- طريقة لاكرانج (Lagrange method):- وهي طريقة شائعة الاستعمال نحصل فيها على متعددة الحدود والتي تمثل تقريب جيد للدالة.

لتكن f دالة مستمرة في الفترة $[a, b]$ ومعرفة عند النقاط x_0, x_1, x_2 اي ان

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$

لتقدير قيمة الدالة f في نفططة واحدة x^* فان صيغة لاكرانج تكتب بالشكل التالي

$$L_0(x^*) = \frac{(x^* - x_1)(x^* - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x^*) = \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x^*) = \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

اي ان

$$p(x^*) = L_0(x^*)f(x_0) + L_1(x^*)f(x_1) + L_2(x^*)f(x_2)$$

وبشك عام فان

$$f(x) \cong p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_i}{x - x_i} \right) \right\} f(x_j)$$

وتسمى هذه الصيغة بطريقة لاكرانج.

ملاحظة:- تستخدم هذه الطريقة للدوال متساوية وغير متساوية المسافة بين القيم.

مثال:- باستخدام طريقة لاكرانج جد قيمة الدالة

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	1	2	5

خمن الدالة عند $p(3), p(5)$

الحل:-

$$p(x^*) = L_0(x^*)f(x_0) + L_1(x^*)f(x_1) + L_2(x^*)f(x_2) + L_3(x^*)f(x_3)$$

$$L_0(x^*) = \frac{(x^* - x_1)(x^* - x_2)(x^* - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x^* - 1)(x^* - 2)(x^* - 4)}{(0 - 1)(0 - 2)(0 - 4)}$$

$$L_1(x^*) = \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_2)(x^* - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x^* - 0)(x^* - 2)(x^* - 4)}{(1 - 0)(1 - 2)(1 - 4)}$$

$$L_2(x^*) = \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x^* - 0)(x^* - 1)(x^* - 4)}{(2 - 0)(2 - 1)(2 - 4)}$$

$$L_3(x^*) = \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x^* - 0)(x^* - 1)(x^* - 2)}{(4 - 0)(4 - 1)(4 - 2)}$$

$$\begin{aligned}\therefore p(x^*) = &-\frac{1}{8}(x^* - 1)(x^* - 2)(x^* - 4) + \frac{1}{3}(x^*)(x^* - 2)(x^* - 4) \\ &-\frac{1}{2}(x^*)(x^* - 1)(x^* - 4) + \frac{5}{24}(x^*)(x^* - 1)(x^* - 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(3) &= -\frac{1}{8}(2)(1)(-1) + \frac{1}{3}(3)(1)(-1) - \frac{1}{2}(3)(2)(-1) + \frac{5}{24}(3)(2)(1) \\ &= \frac{1}{4} - 1 + 3 + \frac{5}{4} = \frac{14}{4} = 3.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p(5) &= -\frac{1}{8}(4)(3)(1) + \frac{1}{3}(5)(3)(1) - \frac{1}{2}(5)(4)(1) + \frac{5}{24}(5)(4)(3) \\ &= -1.5 + 5 - 10 + 12.5 = 6\end{aligned}$$

مثال:- باستخدام طريقة لاكرانج جد قيمة الدالة

x	0	1	3	4
$f(x)$	-1	0	8	15

خمن الدالة عند $p(3.3)$

الحل:-

$$p(x^*) = L_0(x^*)f(x_0) + L_1(x^*)f(x_1) + L_2(x^*)f(x_2) + L_3(x^*)f(x_3)$$

$$L_0(x^*) = \frac{(x^*-1)(x^*-3)(x^*-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = \frac{-1}{12}(x^*-1)(x^*-3)(x^*-4)$$

$$L_1(x^*) = \frac{(x^*-0)(x^*-3)(x^*-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{1}{6}(x^*)(x^*-3)(x^*-4)$$

$$L_2(x^*) = \frac{(x^*-0)(x^*-1)(x^*-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = \frac{-1}{6}(x^*)(x^*-1)(x^*-4)$$

$$L_3(x^*) = \frac{(x^*-0)(x^*-1)(x^*-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = \frac{1}{12}(x^*)(x^*-1)(x^*-3)$$

$$\therefore \quad p(x^*) = \frac{1}{12}(x^*-1)(x^*-3)(x^*-4) - \frac{8}{6}(x^*)(x^*-1)(x^*-4) + \frac{15}{12}(x^*)(x^*-1)(x^*-3) = x^2 - 1$$

$$p(3.3) = 9.89$$

3- حساب الفروقات المنتهية (Calculus of Finite Differences):-

لتكن لدينا مجموعة البيانات $x_0, x_1, \dots, x_n$ حيث ان $x_i = x_0 + ih, i = 0,1,\dots,n$ وان قيم الدالة عند هذه النقاط هي $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ على الترتيب ويمكن كتابتها على النحو التالي $y_0, y_1, \dots, y_n$ عندئذن يمكن تعريف الفرق الاول كما يلي

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, i = 0,1,\dots,n-1$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_0 &= \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) \\ &= \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ &y_2 - y_1 - (y_1 - y_0) \\ &y_2 - 2y_1 - y_0\end{aligned}$$

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

$$\Delta^k y_i = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j y_{i+k-j}$$

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3			
x_4	y_4				

مثال:- اكتب جدول الفروقات للدالة $f(x) = x^3$ علما ان $x = 0, 1, 2, 3, 4$

الحل:-

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	0	1	6	6	0
1	1	7	12	6	
2	8	19	18		
3	27	37			
4	64				

4- الفروقات التقدمية (Forward Differences):-

يعرف الفرق التقدمي الاول كما يلي:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

حيث ان Δ هو المؤثر التقدمي

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta y_0 \\ &= (1+\Delta)y_0 \end{aligned}$$

$$y_2 = (1+\Delta)^2 y_0$$

$$\vdots$$

$$y_m = (1+\Delta)^m y_0$$

باستخدام مفكوك ذي الحدين نحصل

$$y_m = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

حيث ان $m = \frac{x_m - x_0}{h}$ وتسمى هذه الصيغة بطريقة الفروقات التقدمية للتعديل الداخلي (نيوتن-التقدمية).

مثال:- اكتب جدول الفروقات للدالة $f(x) = x^3 - 1$ علما ان $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ثم جد تخمين الدالة عند $f(0.5)$

الحل:-

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	-1	1	6	6	0
1	0	7	12	6	
2	7	19	18		
3	26	37			
4	63				

$$h = 1, m = \frac{0.5-0}{1} = 0.5$$

$$f(0.5) = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$= -1 + 0.5(1) + \frac{0.5(0.5-1)}{2!}(6) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!}(6)$$

$= -1 + 0.5 - 0.125(6) + 0.0625(6) = -0.875$

$f(0.5) = (0.5)^3 - 1 = -0.875$

تكون صيغة نيوتن-التقدمية للتعديل الداخلي متقاربة عندما $|m| < 1$

5- الفروقات التراجعية (Backward Differences):-

يعرف الفرق التراجعي الاول كما يلي:

$\nabla y_1 = y_1 - y_0$

$\nabla y_2 = y_2 - y_1$

$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$

$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1}) = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$

وبصورة عامة

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j y_{i-j}$$

بما ان

$y_{i-1} = (1 - \nabla) y_i$

$\therefore y_i = (1 - \nabla)^{-1} y_{i-1} \dots \dots \dots . (1)$

وان

$\Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1}$

$y_i = (1 + \Delta) y_{i-1} \dots \dots \dots . (2)$

من العلاقة (1) و(2) نحصل على

$(1 + \Delta) = (1 - \nabla)^{-1}$

وبصورة عامة فان

$(1 + \Delta)^m = (1 - \nabla)^{-m}$

$\therefore y_m = (1-\nabla)^{-m} y_0$

او

$$y_m = y_0 + m\nabla y_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \cdots$$

تسمى هذه الصيغة بطريقة الفروقات التراجعية للتعديل الداخلي (نيوتن-التراجعية).

مثال:- اكتب جدول الفروقات للدالة $f(x) = log_{10}^{x}$ لقيم $x = 1000\ to\ 1050$ ثم جد تخمين الدالة عند $y = log_{10}^{1044}$ اذا علمت ان $h = 10$

الحل:-

x_i	y_i	∇	∇^2	∇^3
1000	3.00000	0.00432	−0.00004	−0.0001
1010	3.00432	0.00428	−0.00005	0.000023
1020	3.00860	0.00423	−0.000027	−0.00002
1030	3.01283	0.004120	−0.000074	
1040	3.017033	0.004156		
1050	3.021189			

$$h = 10, m = \frac{1044-1050}{10} = -0.6$$

$$log_{10}^{1044} = 3.021189 + (-0.6)(0.004156 + \frac{(-0.6)(-0.6+1)}{2!}(-0.000074)$$
$$+ \frac{(-0.6)(-0.6+1)(-0.6+2)}{3!}(-0.00002) = 3.01887005$$

واجب:- اكتب جدول الفروقات للقيم التالية وجد تخمين $f(0.5), f(4.8)$

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
y	*0*	*-1*	*8*	*135*	*704*	*2375*

6- الفروقات المركزية (Central Differences):-

لتكن لدينا

$$\delta y_{i+1/2} = y_{i+1} - y_i$$

$$\delta^2 y_{i+1/2} = \delta\left(\delta y_{i+1/2}\right)$$
$$= \delta(y_{i+1} - y_i)$$
$$= \delta y_{i+1} - \delta y_i$$

$$\delta y_{i+1/2} = \Delta y_i = \nabla y_{i+1}$$

$$\delta^2 y_i = \delta y_{i+1/2} - \delta y_{i-1/2}$$
$$= y_{i+1} - y_i - (y_i - y_{i-1})$$
$$= y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

x_i	y_i	δ	δ^2	δ^3	δ^4
x_{-2}	y_{-2}	$\delta y_{-3/2}$	$\delta^2 y_{-2}$	$\delta^3 y_{-3/2}$	$\delta^4 y_{-2}$
x_{-1}	y_{-1}	$\delta y_{-1/2}$	$\delta^2 y_{-1}$	$\delta^3 y_{-1/2}$	$\delta^4 y_{-1}$
x_0	y_0	$\delta y_{1/2}$	$\delta^2 y_0$	$\delta^3 y_{1/2}$	$\delta^4 y_0$
x_1	y_1	$\delta y_{3/2}$	$\delta^2 y_1$	$\delta^3 y_{3/2}$	$\delta^4 y_1$
x_2	y_2		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_2$

$$\delta y_{1/2} = \Delta y_0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\delta y_1 = y_{3/2} - y_{1/2}$$

$$\delta^2 y_1 = \delta\left(y_{3/2} - y_{1/2}\right)$$
$$= y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$= \Delta^2 y_0 \ldots\ldots\ldots. (2)$$

$$\delta^3 y_{3/2} = \Delta^3 y_0 \ldots\ldots. (3)$$

باستخدام صيغة نيوتن-التقدمية للتعديل الداخلي نحصل على

$$y_m = y_0 + \delta y_{1/2} + \frac{m(m-1)}{2!}\delta^2 y_1 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\delta^3 y_{3/2} + \cdots$$

$$y_0 = \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_1$$

$$= \frac{1}{2}(y_0 + y_1) - \frac{1}{2}(y_1 - y_0)$$

$$= \frac{1}{2}(y_0 + y_1) - \frac{1}{2}\delta y_{1/2} \dots \dots . . (1)$$

$$\delta^2 y_1 = \frac{1}{2}\delta^2 y_0 - \frac{1}{2}\delta^2 y_0 + \frac{1}{2}\delta^2 y_1 + \frac{1}{2}\delta^2 y_1$$

$$= \frac{1}{2}\delta^2(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}\delta^2(y_1 - y_0)$$

$$= \frac{1}{2}\delta^2(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}\delta^3 y_{1/2} \dots \dots \dots \dots (2)$$

$$\delta^3 y_{3/2} = \delta^3 y_{3/2} - \delta^3 y_{1/2} + \delta^3 y_{1/2}$$

$$= \delta^3\left(y_{3/2} - y_{1/2}\right) + \delta^3 y_{1/2}$$

$$= \delta^3 \delta y_1 + \delta^3 y_{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\delta^4(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}\delta^5 y_{1/2} + \delta^3 y_{1/2} \dots \dots . . (3)$$

نعرف المؤثر الاتي:

$$\mu y_{i+1/2} = \tfrac{1}{2}(y_i + y_{i+1})$$

ويسمى مؤثر المعدل

$$\mu y_{1/2} = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)$$

$$\therefore y_0 = \mu y_{1/2} - \frac{1}{2}\delta y_{1/2}$$

$$\delta^2 y_1 = \frac{1}{2}\ \mu \delta^2 y_{1/2} + \frac{1}{2}\delta^3 y_{1/2}$$

$$\delta^3 y_{3/2} = \frac{1}{2}\ \mu \delta^4 y_{1/2} + \delta^3 y_{1/2} + \frac{1}{2}\delta^5 y_{1/2}$$

$$\therefore y_m = \mu y_{1/2} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\delta y_{1/2} + \frac{m(m-1)}{2!}\,\mu\delta^2 y_{1/2} + \frac{m\left(m - {}^{1}/_{2}\right)(m-2)}{3!}\delta^3 y_{3/2} + \frac{m(m-1)(m^2-1)(m-2)}{4!}\mu\delta^4 y_{1/2} + \cdots$$

تسمى هذه الصيغة بطريقة الفروقا المركزية للتعديل الداخلي وتسمى ايضا بطريقة بيسل.

مثال:- اكتب جدول الفروقات ومن ثم خمن قيمة الدالة عند النقطة $f(32)$

الحل:-

x_i	y_i	δ	δ^2	δ^3	δ^4
10	0.9848	−0.451	−0.0286	0.0023	0.0007
20	0.9397	−0.0737	−0.0263	0.003	0.0009
30	0.866	−0.1	−0.0233	0.0039	
40	0.766	−0.12	−0.0194		
50	0.6427				

$$m = 0.2, \qquad x_m = 32, \quad x_0 = 30$$

$$\mu y_{1/2} = \frac{1}{2}(y_0 + y_1) = 0.816$$

$$\delta y_{1/2} = -0.1 = (y_1 - y_0)$$

$$\mu\delta^2 y_{1/2} = \frac{1}{2}(\delta^2 y_0 + \delta^2 y_1) = -0.0248$$

$$\delta^3 y_{3/2} = 0.003$$

$$\cos(32) = \mu y_{1/2} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\delta y_{1/2} + \frac{m(m-1)}{2!}\,\mu\delta^2 y_{1/2} + \frac{m\left(m - {}^{1}/_{2}\right)(m-2)}{3!}\delta^3 y_{3/2}$$
$$= 0.816 + (-0.3)(-0.1) + \frac{0.2(-0.8)}{2!}(-0.0248) + \frac{0.2(-0.3)(-0.8)}{3!} = 0.8482$$

7- الفروقات المنتهية النسبية (Divide Finite Differences):-

تعد هذه الطريقة من الطرق التي تتعامل مع النقاط غير متساوية الابعاد. يعرف الفرق النسبي من الرتبة الاولى كما يلي:

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, i = 0,1,2, \dots, n-1$$

وذو المرتبة الثانية

$$\Delta^2 y_i = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{x_{i+2} - x_i}, i = 0,1,2, \dots, n-2$$

وذو الرتبة k

$$\Delta^k y_i = \frac{\Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i}{x_{i+k} - x_i}, i = 0,1,2, \dots, (n-k)$$

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3
x_0	y_0	$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$	$\Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0}$	$\Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$
x_1	y_1	$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1}$	$\Delta^3 y_1 = \frac{\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1}{x_4 - x_1}$
x_2	y_2	$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	$\Delta^2 y_2 = \frac{\Delta y_3 - \Delta y_2}{x_4 - x_2}$	
x_3	y_3	$\Delta y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$		
x_4	y_4			

الصيغة العامة للفروقات النسبية للتعديل الداخلي يمكن كتابتها كل التالي:

$$\begin{aligned} y_m = y_0 &+ (x_m - x_0)\Delta y_0 + (x_m - x_0)(x_m - x_1)\Delta^2 y_0 \\ &+ (x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_2)\Delta^3 y_0 + \cdots \end{aligned}$$

مثال:- اكتب جدول الفروقات ومن ثم خمن قيمة الدالة عند النقطة $f(0.5), f(5)$ اذا علمت ان $y = x^3$
لقيم $x = 0, 1, 3, 4$

الحل:-

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3
0	0	1	4	1
1	1	13	8	
3	27	37		
4	64			

$$f(x_m) = y_0 + (x_m - x_0)\Delta y_0 + (x_m - x_0)(x_m - x_1)\Delta^2 y_0$$
$$+ (x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_2)\Delta^3 y_0$$

$$f(0.5) = 0 + (0.5 - 0)(1) + (0.5 - 0)(0.5 - 1)(4) + (0.5 - 0)(0.5 - 1)$$
$$(0.5 - 3)(1) = 0.125$$

$$f(5) = 0 + (5 - 0)(1) + (5 - 0)(5 - 1)(4) + (5 - 0)(5 - 1)$$
$$(5 - 3)(1) = 125$$

مثال:- اكتب جدول الفروقات ومن ثم خمن قيمة الدالة عند النقطة $f(2), f(-1)$ اذا علمت ان
$y = x^3 + x - 1$ لقيم $x = -2, 0, 1, 4, 5$

الحل:-

x_i	y_i	Δ	Δ^2	Δ^3
-2	-11	5	-1	1
0	-1	2	5	1
1	1	22	10	
4	67	62		
5	129			

$$f(x_m) = y_0 + (x_m - x_0)\Delta y_0 + (x_m - x_0)(x_m - x_1)\Delta^2 y_0$$
$$+ (x_m - x_0)(x_m - x_1)(x_m - x_2)\Delta^3 y_0$$

$$f(\mathrm{x}) = -11 + (x + 2)(5) + (x + 2)(x - 0)(-1) + (x + 2)(x - 0)(x - 1)(1)$$

الفصل الخامس

الاشتقاق العددي والتكامل العددي

Numerical Differentiation and Numerical Integration

في الفصل الرابع تحدثنا عن ايجاد قيمة الدالة f عند نقطة معينة ويجب مراعاة اذا كانت قيم x متساوية الابعاد او مختلفة الابعاد. فاذا كانت متساوية الابعاد تحل بطريقة نيوتن التقدمية والتراجعية والمركزية وحسب موقع النقطة x^* . اما في هذا الفصل فالمطلوب ايجاد المشتقة عند النقطة x^* اي $f(x^*)$ فنحتاج معرفة صيغة الدالة اولا وبعدها مشتقة الدالة ومن ثم نعوض قيمة x^*.

- ❖ **الاشتقاق العددي:-**

1. الاشتقاق العددي عندما تكون البيانات غير متساوية الابعاد:-

- طريقة لاكرانج Lagrang method

$$P_n((x)) = \sum_{j=0}^{n} \left\{ \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right\} f(x_j)$$

مثال:- من خلال جدول البيانات التالية جد قيمة الدالة $f\acute{}(4)$ باستخدام طريقة لاكرانج

x	0	0.5	1
y	e^0	$e^{0.5}$	e^1

الحل:-

$$L_0(x) = \frac{(x-0.5)(x-1)}{(0-0.5)(0-1)} = (2x-1)(x-1)$$
$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(0.5-0)(0.5-1)} = 4x(1-x)$$
$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-0.5)}{(1-0)(1-0.5)} = x(2x-1)$$
$$P_2(x) = (2x-1)(x-1)e^0 + 4x(1-x)e^{0.5} + x(2x-1)e^1$$
$$= 2x^2 - 3x + 1 + 4xe^{0.5} - 4x^2e^{0.5} + 2x^2e^1 - xe^1$$
$$= 2x^2(1 - 2e^{0.5} + e^1) + x(4e^{0.5} - 3 - e^1) + 1$$
$$= 1 + 3.08981x + 0.62741x^2$$

$$P_2(\acute{x}) = 3.08981 + 1.25482x$$

2. الاشتقاق العددي عندما تكون البيانات متساوية الابعاد:-

- طريقة نيوتن التقدمية:

$$y_m = y_0 + m\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$x_m = x_0 + mh, \;\; x_t = x_0 + th \Rightarrow \frac{dx}{dt} = h$$

$$y_t = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{1}{h}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}[\Delta y_0 + \left(t - \frac{1}{2}\right)\Delta^2 y_0 + (\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{3})\Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$t = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

وهي صيغة نيوتن التقدمية للاشتقاق العددي.

- **التكامل العددي:-**

1. التكامل العددي للعقد غير متساوية الابعاد:-

- طريقة لاكرانج:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x)f(x_j)$$

$$= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + \cdots + L_n(x)f(x_n)$$

$$I(f) = \int_a^b P_n(x)$$

$$= f(x_0)\int_a^b L_0(x)dx + f(x_1)\int_a^b L_1(x)dx + f(x_2)\int_a^b L_2(x)dx + \cdots + f(x_n)\int_a^b L_n(x)dx$$

2. التكامل العددي للعقد متساوية الابعاد:-

- طريقة نيوتن التقدمية:

$$x_t = x_0 + th$$
$$dx = dt$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\int_0^n f(x_t)dt$$

$$x_n = b, x_0 = a, h = \frac{b-a}{n}$$

- طريقة شبه المنحرف *Trapezium method*:

تتظمن هذه الطريقة اخذ نقطتين وهي $[x_0, x_1]$ اي ان $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ (الفترة $[0,1]$ بالنسبة للمتغير t)

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\int_{x_0}^{x_1}\left(f(x_0) + t\Delta f(x_0) + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \cdots\right)$$

$$= h\left[tf(x_0) + \frac{t^2}{2}\Delta f(x_0) + \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4}\right)\Delta^2 f(x_0) + \cdots\right]_0^1$$

$$= h\left[f(x_0) + \frac{1}{2}\Delta f(x_0) - \frac{1}{12}\Delta^2 f(x_0) - \frac{1}{24}\Delta^3 f(x_0) + \cdots\right]$$

$$I_1(f) = h\left[f(x_0) + \frac{1}{2}\Delta f(x_0)\right]$$

$$= h\left[f(x_0) + \frac{1}{2}(f(x_0+h) + f(x_0))\right]$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)], [x_0, x_1]$$ وهي صيغة شبه المنحرف للتكامل العددي

$$I_2(f) = \frac{h}{2}[f_1 + f_2], [x_1, x_2]$$

$$I_3(f) = \frac{h}{2}[f_2 + f_3], [x_2, x_3]$$

$$I_n(f) = \frac{h}{2}[f_{n-1} + f_n], [x_{n-1}, x_n]$$

$$I(f) = I_1(f) + I_2(f) + \cdots + I_n(f)$$

$$\therefore I(f) = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

وهي صيغة شبه المنحرف المركبة.

- طريقة سمبسون *Simpson method*:

تستخدم هذه الطريقة صيغة نيوتن-التقدمية في الفترة $[x_0, x_2]$ (اي في الفترة $[0,2]$ بالنسبة للمتغير t) وتسمى هذه الطريقة بالطريقة ذات الثلاث نقاط.

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = h\int_0^2 f(x_t)dt$$

$$= h\int_0^2 \left[f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \cdots\right]dt$$

$$= h\left[tf_0 + \frac{t^2}{2}\Delta f_0 + \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4}\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{6}\right)\Delta^3 f_0 + \cdots\right]_0^2$$

$$= h\left[2f_0 + 2\Delta f_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 f_0 + 0\Delta^3 f_0 + \frac{1}{90}\Delta^4 f_0 + \cdots\right]$$

$$\therefore\ I(f) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2]$$

وهي صيغة سمبسون للتكامل العددي.

$$I_1(f) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2],\ \ [x_0, x_2]$$

$$I_2(f) = \frac{h}{3}[f_2 + 4f_3 + f_4],\ \ [x_2, x_4]$$

$$I_3(f) = \frac{h}{3}[f_4 + 4f_5 + f_6],\ \ [x_4, x_6]$$

$$\therefore\ I_n(f) = \frac{h}{3}[f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n],\ \ [x_{n-2}, x_n]$$

وبشكل عام فان

$$I(f) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + 4\sum_{i=1}^{n/2} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f_{2i} + f_n\right]$$

تسمى هذه الصيغة بصيغة سمبسون المركبة.

مثال:- جد قيمة تقريبية للتكامل التالي $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ اذا علمت ان $n = 6$

الحل:-

$$a = 0, b = 1, h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6}$$

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
y	1	0.973	0.9	0.8	0.692	0.59	0.5

1-by Trapezium

$$I(f) = \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6]$$

$$= \frac{1}{12}[1 + 2(0.973) + 2(0.9) + 2(0.8) + 2(0.692) + 2(0.59) + 0.5]$$

$$= 0.784$$

2-by Simpsons

$$S_I(f) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6]$$

$$= \frac{1}{18}[1 + 4(0.973) + 2(0.9) + 4(0.8) + 2(0.692) + 4(0.59) + 0.5]$$

$$= 0.785$$

مثال:- جد قيمة تقريبية للتكامل التالي $\int_0^1 3x^2 dx$ اذا علمت ان $n = 10$

الحل:-

$$a = 0, b = 10, h = \frac{b-a}{n} = 1$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	3	12	27	48	75	108	147	192	243	300

1-by Trapezium

$$I(f) = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \cdots + 2f_8 + 2f_9 + f_{10}]$$

$$= \frac{1}{2}[0 + 6 \ldots \ldots + 486 + 300]$$

$$= 1005$$

2-by Simpsons

$$S_I(f) = \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_8 + 4f_9 + f_{10}]$$

$$= \frac{1}{3}[0 + 12 + 54 + \cdots + 300]$$

$$= 1000$$

واجب:- جد قيمة تقريبية للتكامل التالي $\int_{-2}^{2} cosx\ dx$ اذا علمت ان $n = 5$.

الفصل السادس

الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية

Numerical Solution of Ordinary Differential Equations

تعرف المعادلة التفاضلية الاعتيادية كما يلي: $y' = f(x, y)$

اذا اعطى الشرط $y(x_0) = y_0$

وتسمى المسالة عندئذ بمسالة القيم الابتدائية (Initial value Problems)

1) طريقة متسلسلة تيلر: Taylor's series method

تعرف متسلسلة تيلر عند النقطة x_0 كما يلي:

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \cdots$$

ومن اجل حل مسالة القيمة الابتدائية باستخدام الصيغة اعلاه نجد اولا حل المعادلة عندما $x = x_1$.

فاذا كانت النقاط المطلوب ايجاد حل المسالة عندها متساوية الابعاد, اي ان $x_i = x_0 + ih$ فتكون الصيغة اعلاه كما يلي:

$$y(x_1) = y(x_0) + hy_n'(x_0) + \frac{h^2}{2!}y''(x_0) + \cdots$$

وبصورة عامة

$$y_{n+1} = y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2!}y_n'' + \cdots$$

مع شرط التوقف $|y_{n+1} - y_n| < \epsilon$

وتسمى هذه الصيغة بطريقة متسلسلة تيلر.

<u>**مثال:-**</u> باستخدام متسلسلة تيلر جد حل المعادلة التفاضلية $y' = x - y, y(0) = 1$ حيث $h = 0.1$

<u>الحل</u>:-

$$x_0 = 0, y_0 = 1$$

$$y' = x_0 - y_0 = 0 - 1 = -1$$

$$y'' = 1 - y' \Rightarrow y_0'' = 2$$

$$y_0''' = -2$$

$$\therefore y_1 = 1 + (0.1)(-1) + \frac{(0.1)^2}{2}(2) + \frac{(0.1)^3}{6}(-2) + \frac{(0.1)^4}{24}(2) = 0.9096$$

$$y_2 = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2!}y_1'' + \frac{h^3}{3!}y_1''' \frac{h^4}{4!}y_1''''$$

$$y_2 = 0.91 + (0.1)(-0.81) + \frac{(0.1)^2}{2}(1.81) + \frac{(0.1)^3}{6}(-1.81) + \frac{(0.1)^4}{24}(1.81)$$
$$= 0.838$$

2) طريقة اويلر: Euler's method

ان الصيغة العامة لطريقة اويلر تكتب كما يلي:

$$y_{n+1} = y_n + hy_n'$$

مع شرط التوقف $|y_{n+1} - y_n| < \epsilon$

مثال:- باستخدام طريقة اويلر جد حل المعادلة التفاضلية $y' = x - y, y(0) = 1$ حيث $h = 0.1$

الحل:-

$$y_1 = y_0 + hy_0'$$
$$= 1 + (0.1)(-1)$$
$$= 0.9$$

$$y_2 = y_1 + hy_1'$$
$$= 0.9 + (0.1)(0.1 - 0.9)$$
$$= 0.82$$

مثال:- باستخدام طريقة اويلر جد حل المعادلة التفاضلية $y' = x + y, y(0) = 1$ حيث $h = 0.02, y(x) = 2e^x - x - 1$

الحل:-

x_n	y_n	y_n'
0	1.0000	1.0000
0.02	1.0200	1.0200
0.04	1.0408	1.0404
0.06	1.0624	1.0612
0.08	1.0848	1.0824
0.1	1.1081	1.1040