مقدمة :

العدد المعقد : يعرف العدد المعقد $Z = (x, y)$ بانه زوج مرتب حيث انه x, y عددان حقيقيان والخاضعان لعمليتين الجمع والضرب :-

$$Z_1 = (x_1, y_1) \quad , Z_2 = (x_2, y_2)$$

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

اذا كان الجزء الحقيقي صفر اي انه $Z = (0, y)$ عندئذٍ يسمى العدد المعقد بانه خيالي صرف ويرمز للجزء الخيالي من Z بالرمز $I(z)$.

اذا كان الجزء الخيالي صفر اي انه $Z = (x, 0)$ عندئذٍ يسمى العدد المعقد بانه حقيقي صرف ويرمز للجزء الحقيقي من Z بالرمز $R(z)$.

ويمكن كتابة العدد المعقد $Z = (x, y)$ بالشكل :-

$$Z = x + yi \quad ; \quad x, y \in R \quad ; \quad i = \sqrt{-1}$$

$$i^1 = i \qquad i^2 = -1$$

$$i^3 = -i \qquad i^4 = 1$$

$$i^n = \begin{cases} i & 1 = \frac{n}{4} \text{ باقي قسمة} \\ -1 & 2 = \\ -i & 3 = \\ 1 & 0 = \end{cases}$$

امثلة :-

$$Z = 9 \Rightarrow R(z) = 9 \quad I(z) = 0$$

$$Z = -2i \Rightarrow R(z) = 0 \quad I(z) = -2$$

$$Z = 3 + 2i \Rightarrow R(z) = 3 \quad I(z) = 2$$

$$i^5 = i \; ; \; i^9 = i \; , \; i^{14} = -1 \; ; \; i^7 = -i$$

خواص العدد المعقد :-

① يكون العدد المعقد Z مساوياً للصفر اذا وفقط اذا كان كل من جزئيه الحقيقي والتخيلي مساوياً للصفر . اي انه

$$Z = 0 \Leftrightarrow Z = 0 + 0i \quad x = 0 \; , \; y = 0$$

② يتساوى العددان المعقدان اذا وفقط اذا كان جزئيهما الحقيقيان والخياليان متساويان اي يحقق

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \; ; \; y_1 = y_2$$

<u>مثال</u> :- جد قيم كل من x , y الحقيقية التي تحقق المعادلة :-

$$(x - y - 6) + i(y^2 - x) = 0$$

الحل : حسب خاصية (1)

$$x - y - 6 = 0 \qquad \& \qquad y^2 - x = 0$$

بجمع المعادلتين

$$y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow (y - 3)(y + 2) = 0$$

$$\Rightarrow y = 3 \Rightarrow 9 - x = 0 \Rightarrow x = 9 \qquad (9, 3)$$

$$\text{or } y = -2 \Rightarrow 4 - x = 0 \Rightarrow x = 4 \qquad (4, -2)$$

العمليات الاربعة على z :-

$$z_1 \mp z_2 = (x_1 \mp x_2) + i(y_1 \mp y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) * (x_2 + y_2 i)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

ملاحظة :-

① $N \subset \underbrace{\bar{N} \cup N^+}_{I} \subset Q \subset R \subset \mathbb{C}$

② حقيقي صرف $\times$ حقيقي صرف = حقيقي صرف

③ خيالي صرف $\times$ خيالي صرف = حقيقي صرف

④ خيالي صرف $\times$ حقيقي صرف = خيالي صرف

مرافق العدد المركب (يرمز له $\bar{z}$) : هو تغير اشارة الجزء الخيالي فقط :-

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$$

$$z = 5 \Rightarrow \bar{z} = 5 \quad ; \quad z = i \Rightarrow \bar{z} = -i$$

الموضوع : التاريخ : / / ٢٠٠

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i y_1}{x_2 + i y_2} * \frac{(x_2 - i y_2)}{(x_2 - i y_2)}$$ (بضرب في مرافق المقام)

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} \cdot \frac{x - yi}{x - yi} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

مثال :-

$z_1 = 2 + 3i \quad ; \quad z_2 = 1 - i$

$z_1 + z_2 = 3 + 2i \quad ; \quad z_1 - z_2 = 1 + 4i$

$z_1 \cdot z_2 = 5 + i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 - i} = \frac{(2 + 3i)(1 + i)}{1 + 1} = \frac{-1}{2} + \frac{5}{2} i$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{1 - i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$$

ملاحظة :-

$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$

بعض خواص المرافق :-

١- $z=0 \Rightarrow \bar{z}=0$

٢- $z=x+iy \Rightarrow \bar{z}=x-iy \quad \forall x,y \in R$

٣- $\bar{i}=-i \;;\; \bar{\bar{i}}=i$

٤- $\bar{\bar{z}}=z$

5- z خيالي صرف $\Rightarrow \bar{z}=-z$

6- z حقيقي صرف $\Rightarrow \bar{z}=z$

7- $z+\bar{z}=2x=2R(z)$

8- $z-\bar{z}=2yi=2i(I(z))$

9- $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$

10- $\overline{z_1 \mp z_2}=\bar{z}_1 \mp \bar{z}_2$

11- $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

12- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

بعض الصفات الجبرية للعدد ~~المعقد~~ المعقد :-

١- الجمع والضرب مغلقة على $\mathbb{C}$.

٢- الجمع والضرب توزيعية على $\mathbb{C}$.

٣- المحايد الجمعي في $\mathbb{C}$ هو الصفر.

~~٤~~- المحايد الضربي في $\mathbb{C}$ هو الواحد.

٤- النظير الجمعي للعدد z هو $-z$.

النظير الضربي للعدد $z \neq 0$ هو $\frac{1}{z}$.

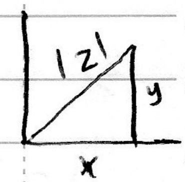
5 . الجمع والضرب عملية تبديلية على $\mathbb{C}$.

ملاحظة : $-z \neq \bar{z}$

القيمة المطلقة للعدد المركب $Z = X+iY$ (ويرمزلها بالرمز $|Z|$) :-

$$|Z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$$ وهو مقدار حقيقي غير سالب

$$Z = 3+4i \Rightarrow |Z| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$
$$Z = 3-4i \Rightarrow |Z| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



بعض خواص القيمة المطلقة :-

1) $|Z| = \sqrt{Z\cdot\bar{Z}}$

البرهان :

$$|Z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+yi)(x-yi)} = \sqrt{Z\cdot\bar{Z}}$$

2) $|Z| = |\bar{Z}|$

البرهان :-

$$|\bar{Z}| = \sqrt{(x^2)+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |Z|$$

or $|\bar{Z}| = \sqrt{\bar{Z}\cdot\bar{\bar{Z}}} = \sqrt{\bar{Z}\cdot Z} = |Z|$

(3) $|Z_1 - Z_2| = |Z_2 - Z_1|$

(4) $\frac{1}{2}(Z+\bar{Z}) = X \leq \sqrt{x^2+y^2} = |Z|$

5) $\frac{1}{2i}(Z-\bar{Z}) = y \leq (\sqrt{x^2+y^2}) = |Z|$

6) $|Z_1\cdot Z_2| = |Z_1|\cdot|Z_2|$

البرهان :

$$|Z_1\cdot Z_2| = \sqrt{Z_1\cdot Z_2\cdot\overline{Z_1\cdot Z_2}} = \sqrt{Z_1\cdot Z_2\cdot\bar{Z}_1\cdot\bar{Z}_2}$$

$$= \sqrt{Z_1\bar{Z}_1}\cdot\sqrt{Z_2\cdot\bar{Z}_2} = |Z_1|\cdot|Z_2|$$

7) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad ; z_2 \neq 0$

البرهان :-

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}\cdot\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}} = \sqrt{\frac{z_1\bar{z}_1}{z_2\bar{z}_2}} = \frac{\sqrt{z_1\bar{z}_1}}{\sqrt{z_2\bar{z}_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

8) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

البرهان :-

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{(z_1\bar{z}_2)}$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2R(z_1 z_2)$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$$

$$\therefore |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

9) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$ —— ⊛

البرهان :-

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_2| + |z_1 - z_2|$$

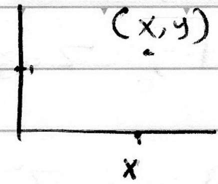
$$\therefore |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{—— (1)}$$

$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1|$$

$$\therefore |z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{—— (2)}$$

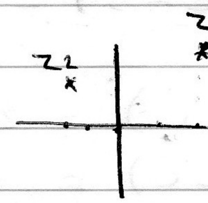
$$\therefore \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$$ من (2), (1)

التمثيل الهندسي للعدد المركب : $z = x + yi$



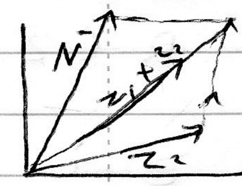
نعين النقطة (x, y)

مثال :



$z_1 = 2+3i$ $(2,3)$

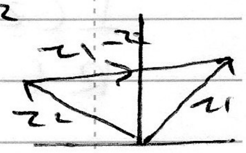
$z_2 = -2+i$ $(-2,1)$



$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2 , y_1 - y_2)$$

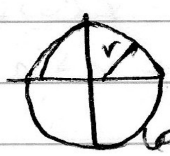
$z_1 - z_2$ يمثل متجه مبدئه النقطة z_2 ونهايته النقطة z_1



المسافة بين نقطتين ممثلتين بالعددين المركبين z_1 , z_2

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

$|z| = r$ تمثل مجموعة النقاط التي تقع على محيط الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r .



$|z| < r$ تمثل جميع النقاط التي تقع داخل الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r .

$|z - z_0| = r$ تمثل مجموعة النقاط التي تقع على محيط دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها r ؟ لماذا .

$$|z - z_0| = r \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r \Rightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

معادلة دائرة مركزها (x_0 , y_0) ونصف قطرها r .

امثلة :-

1) $|z - 1 + i| = 2 \Rightarrow |z - (1-i)| = 2$

$\Rightarrow z_0 = (1, -1) \quad , r = 2$

2) $|z+2i| = 1 \Rightarrow r = 1, \; z_0 = (0,-2)$.

3) $|z-5| = 3 \Rightarrow r = 3 \; ; \; z_0 = (5,0)$

مثال : ما هو مخطط المعادلة :-

$I(\bar{z}-i) = 2$

$R(\bar{z}-i) = 2$

$\bar{z}-i = x - iy - i = x + i(-y-1)$

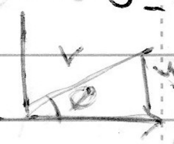
$I(\bar{z}-i) = -y-1 = 2 \Rightarrow -y = 3 \Rightarrow \boxed{y=-3}$

$R(\bar{z}-i) = x = 2 \Rightarrow \boxed{x=2}$

تحويل العدد المركب الى الصيغة القطبية .

$z = x + iy$

حسب نظرية فيثاغورث :-



$r = \sqrt{x^2+y^2} \; ; \; \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \; ; \; x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

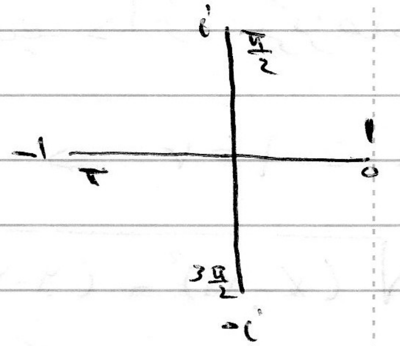
$z=0$ لا يمكن تحويله إلى الصيغة القطبية .

$1 = \cos(0) + i\sin(0)$

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$-1 = \cos(\pi) + i\sin\pi$

$-i = \cos(3\frac{\pi}{2}) + i\sin 3\frac{\pi}{2}$



الموضوع : التاريخ : / / ٢٠٠

مثال: حول $z = 1+i$ إلى الصيغة القطبية :-

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \qquad (1,1)$$ في الربع الاول

$$\therefore \quad z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$\theta = \arg(z)$ زاوية العدد المعقد

$\mathrm{Arg}(z)$ القيمة الاساسية لزاوية العدد المعقد وتكون محصورة بين $[-\pi, \pi]$

$$\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi \quad ; \quad k = 0, \mp 1, \mp 2$$

تمارين (1-1) ص17

1- أكتب الاعداد المعقدة الآتية بالصيغة $x+iy$ حيث ان $x,y \in R$ ،

أ- $(2+3i)^2$

$$(2+3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$$

ب-

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i\right)(3 - i) = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + i\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{13}{6} + \frac{3}{2}i$$

جـ-

$$\frac{1}{1-i} + \frac{1}{i} = \frac{1+i}{2} - i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

د

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

هـ-

$$\frac{7-6i}{2+3i} = \frac{(7-6i)(2-3i)}{4+9} = \frac{-4}{13} - \frac{33}{13}i$$

$\boxed{9}$

$$\frac{1+2i}{(2+i)^2} = \frac{1+2i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3-4i)}{9+16} = \frac{11}{25} + \frac{3}{25}i$$

س: اثبت ان العددين $z = 1 \mp i$ هما جذرا المعادلة

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z^2 - 2z + 1 = -1$$
$$\Rightarrow (z-1)^2 = -1 \Rightarrow z - 1 = \mp\sqrt{-1}$$
$$\Rightarrow z = 1 \mp i$$

∴ $z = 1 \mp i$ هما جذرا المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$ ،

س٢/ حل المعادلة $z^2 + z + 1 = 0$ بفرض ان $z = x + iy$ ثم جد قيم x, y الحقيقية ، $y \neq 0$ ،

let $z = x + iy \Rightarrow$

$$z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow (x+iy)^2 + x + iy + 1 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 2xyi - y^2 + x + iy + 1 = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 - y^2 + x + 1) + i(2xy + y) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \quad ; \quad (2x+1)y = 0$$
$$\because y \neq 0 \Rightarrow (2x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4} - y^2 - \frac{1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$$

س٤ :- برهن : ⓐ $I(iz) = R(z)$

ⓑ $R(iz) = I(z)$

البرهان :- $I(iz) = I(ix - y) = x = R(z)$

$R(iz) = R(ix - y) = -y = -I(z)$

س٥ : برهن

ⓐ $\overline{(\bar{z} + 3i)} = z - 3i \Rightarrow \bar{\bar{z}} - 3i = z - 3i$

ⓑ $\overline{iz} = -i\bar{z} \Rightarrow \bar{i}\,\bar{z} = -i\bar{z}$

ⓓ $\dfrac{\overline{(2+i)^2}}{3-4i} = 1 \Rightarrow \dfrac{\overline{(4 + 4i - 1)}}{3-4i} = \dfrac{3-4i}{3-4i} = 1$

س : - برهن اذا كان حاصل ضرب عددين معقدين يساوي صفر فان على الاقل أحد ~~العددين~~ هذين العددين المعقدين يساوي صفر اي انه اذا كان $z_1 z_2 = 0$ فاما $z_1 = 0$ أو $z_2 = 0$ او كلاهما صفران .

البرهان : - نفرض انه $z_1 z_2 = 0$ وان $z_1 \neq 0 \Leftarrow$

$\exists \frac{1}{z_1}$ s.t

$$z_1 z_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{z_1}(z_1 z_2) = 0$$

$$\Rightarrow z_2 = 0$$

واذا كان $z_2 \neq 0$ نحصل على انه $z_1 = 0$.

تمارين (٢-١) حلول : -

١- برهن $z(z_1 + z_2 + z_3) = zz_1 + zz_2 + zz_3$

البرهان : -

نفرض انه $z_4 = z_2 + z_3 \Leftarrow$

حسب الخاصية التوزيعية $z(z_1 + z_4) = zz_1 + zz_4$

$$= zz_1 + z(z_2 + z_3)$$

$$= zz_1 + zz_2 + zz_3$$

٢- برهن $(1+z)^2 = 1 + 2z + z^2$

البرهان : نفرض انه $z = x + iy \Leftarrow$

$$(1+z)^2 = (1 + x + iy)^2 = (1+x)^2 + 2(1+x)iy - y^2$$

$$= 1 + 2x + x^2 + 2iy + 2xiy - y^2$$

$$= 1 + 2x + 2iy + x^2 + 2ixy - y^2$$

$$= 1 + 2(x+iy) + (x+iy)^2$$

$$= 1 + 2z + z^2$$

٣ - برهن : $(z_1 z_2)(z_3 z_4) = (z_1 z_3)(z_2 z_4)$

البرهان : نفرض ان $z_5 = z_3 z_4$

حسب الخاصية التجميعية $(z_1 z_2) z_5 = z_1 (z_2 z_5)$

$= z_1 (z_2 (z_3 z_4)) = z_1 ((z_2 z_3) z_4)$

$= z_1 ((z_3 z_2) z_4) = z_1 (z_3 (z_2 z_4))$

let $z_6 = z_2 z_4$

$= z_1 (z_3 z_6) = (z_1 z_3) z_6 = (z_1 z_3)(z_2 z_4)$

س٦ : برهن ان العددين صفر، 1 هما العنصران المحايدان الوحيدان بالنسبة للجمع والضرب على التوالي ، اي انه برهن على وحدانية العنصر المحايد الجمعي والضربي .

البرهان : نفرض ان $e_1 \neq e_2$ محايدان جمعيان

$\because e_1$ عنصر محايد $\Rightarrow e_1 + e_2 = e_2$ — ①

$\because e_2$ عنصر محايد $\Rightarrow e_1 + e_2 = e_1$ — ②

from ①,② we get $\Rightarrow e_1 = e_2 = 0$

$\therefore$ المحايد الجمعي وحيد .

نفرض $I_1 \neq I_2$ محايدات ضربيات

$\because I_1$ محايد ضربي $\Rightarrow I_1 I_2 = I_2$ — ①

$\because I_2$ محايد ضربي $\Rightarrow I_1 I_2 = I_1$ — ②

$\therefore I_1 = I_2 = 1$ $\therefore$ المحايد الضربي وحيد

تمارين (1-3) ص ١١ :-

① برهن ان $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}\,|2z+5|$

البرهان :

$|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = |2\bar{z}+5|\,|\sqrt{2}-i|$

$= |\overline{2z+5}|\sqrt{2+1} = \sqrt{3}\,|2z+5|$

② احسب

a) $\left|\frac{3i-2}{3-2i}\right| = \frac{|3i-2|}{|3-2i|} = \frac{\sqrt{4+9}}{\sqrt{9+4}} = 1$

b) $\left|\frac{1-4i}{4+3i}\right| = \frac{\sqrt{1+16}}{\sqrt{16+9}} = \frac{\sqrt{17}}{5}$

③ برهن

$\sqrt{2}\,|z| \geq |R(z)| + |I(z)|$

$\because (|x|-|y|)^2 \geq 0 \Rightarrow |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \geq 0$

$\Rightarrow |x|^2+|y|^2 \geq 2|x||y|$ نضيف $|x|^2+|y|^2$

$2(|x|^2+|y|^2) \geq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$

$\therefore 2(|x|^2+|y|^2) \geq [|x|+|y|]^2$

$\therefore \sqrt{2}\sqrt{|x|^2+|y|^2} \geq |R(z)| + |I(z)|$

$\therefore \sqrt{2}\,|z| \geq |R(z)| + |I(z)|$

س٦ :- برهن $|z_1|+|z_2| \geq |z_1 - z_2| \geq \big||z_1|-|z_2|\big|$

البرهان :

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$$

$$\therefore |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{—} ①$$

$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1|$$

$$\therefore |z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{—} ②$$

From ①, ② we get $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

now $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2|$
$= |z_1| + |z_2|$

س / اذا كان $z_2 \neq z_3$ برهن ان

$$\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{\big||z_2|-|z_3|\big|}$$

البرهان
(~~...~~)

$$\because \big||z_2| - |z_3|\big| \leq |z_2| + |z_3|$$

$$\therefore \frac{1}{|z_2+z_3|} \leq \frac{1}{\big||z_2|-|z_3|\big|} \quad * \ |z_1|$$

$$\therefore \frac{|z_1|}{|z_2+z_3|} \leq \frac{|z_1|}{\big||z_2|-|z_3|\big|}$$

س٦: برهن $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

(خاصية التوازي) م

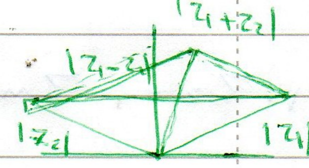
$\because |z| = \sqrt{z\,\bar{z}} \Rightarrow |z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2$

$= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} + (z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}$

$= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) + (z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)$

$= 2z_1\bar{z}_1 + \cancel{z_1\bar{z}_2} + \cancel{z_2\bar{z}_1} + 2z_2\bar{z}_2 - \cancel{z_1\bar{z}_2} - \cancel{z_2\bar{z}_1}$

$= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$



$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

برهنة :

البرهان :-

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= r_1 r_2 (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i[\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2])$

$= r_1 r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

$\therefore \arg(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

ولكن $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) \neq \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$

لاحظ اذا كان $z_1 = -1,\ z_2 = i \Rightarrow$

$\operatorname{Arg}(-1) = \pi \;;\; \operatorname{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{2} \;;\; \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$Arg(z_1)+Arg(z_2) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2} = Arg(z_1 z_2)$$

تعميم المبرهنة لـ n من الاعداد المعقدة :-

اذا كان :

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$\vdots$$

$$z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$

فان

$$z_1 . z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 r_3 \cdots r_n (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \cdots \cos\theta_n + i\sin\theta_n$$

$$= r_1 r_2 \cdots r_n (\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n$$

واذا كان لدينا

$$z = z_1 = z_2 = \cdots = z_n$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\therefore \cancel{r^n}(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cancel{r^n}(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\therefore \boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

مبرهنة ديموافر

الموضوع :   التاريخ :   /   /   ٢٠٠

مثال : جد $\cos 4\theta$, $\sin 4\theta$ بدلالة $\sin\theta$, $\cos\theta$.

الحل :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta \quad \text{[حسب مبرهنة ديموفير]}$$

$$\cos^4\theta + 4i\cos^3\theta\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta - 4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$$

بمساواة الجزء الحقيقي للطرفين نحصل على

$$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$$
$$= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) + (1-\cos^2\theta)^2$$
$$= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta + 6\cos^4\theta + 1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta$$
$$\therefore \cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

وبمساواة الجزء التخيلي للطرفين نحصل على

$$\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$$
$$= 4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$
$$= 4\cos\theta\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)$$

ملاحظة : اذا ضرب العدد المعقد z بـ i فان متجه العدد يدور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ عكس عقارب الساعة والسبب هو

$$iz = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(r(\cos\theta + i\sin\theta)\right)$$
$$= r\left[\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r[\cos\theta + i\sin\theta]} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \cdot \frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{[(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2))]}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

صيغة أويلر :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \, e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad ; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} \quad ; \quad z^n = r^n e^{in\theta}$$

القوى والجذور :

١- اذا كان n عدد صحيح موجب نستخدم مبرهنة ديموفري

$$Z^n = r^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

٢- اذا كان n عدد صحيح سالب ايضاً نستخدم مبرهنة ديموفري
السبب هو :-

بما ان n سالبة فان (n-) عدد موجب

$$Z^n = (Z^{-1})^{-n} = (\frac{1}{r} e^{-i\theta})^{-n} = (\frac{1}{r})^{-n} (e^{-i\theta})^{-n}$$

$$= (r^{-1})^{-n} (e^{-i\theta})^{-n} = r^n e^{in\theta}$$

مثال ! احسب $(1+i)^8$ ، $(1+i)^{-8}$ ؟

باستخدام مبرهنة ديموفري !

let $Z = 1+i \Rightarrow x = 1 \quad , y = 1$ الربع الاول

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(1) \Rightarrow$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore Z = \sqrt{2} (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$Z^8 = (\sqrt{2})^8 (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^8 = 2^4 \cos 8\frac{\pi}{4} + i\sin 8\frac{\pi}{4}$$

$$= 16 (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16 (1) = 16$$

$$Z^{-8} = (\sqrt{2})^{-8} (\cos -8\frac{\pi}{4} + i\sin -8\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{16}$$

يمكن ايجاد جذور الاعداد المعقدة فمثلاً ايجاد جذور المعادلة

$$Z^n = 1 \quad ; \Rightarrow r^n e^{in\theta} = 1 . e^{i.0}$$

يتساوى عددان معقدان اذا وفقط اذا تساوت قيمتاهما المطلقة وتساوت زاويتاهما بمضاعفات 2π .

$\therefore r^n = 1 \quad ; n\theta = 0 + 2k\pi \quad = 2k\pi$

$\therefore \theta = \frac{2k\pi}{n}$

$\therefore Z^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad ; k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

وبشكل عام :-

$$\left[Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \right]$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

مثال :- حل المعادلة $Z^3 = 1$ ؟

الحل المعادلة : $Z = 1^{\frac{1}{3}}$ ؛

$Z = 1^{\frac{1}{3}} = (\cos 0 + i\sin 0)^{\frac{1}{3}} \qquad n = 3,\ \theta = 0,\ k = 0, 1,$

$Z_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$

$Z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$Z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$Z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

تمارين (1-4) :- ① برهن $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \arg(Z_1) - \arg(Z_2)$

البرهان :-

$Z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad ; \quad Z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

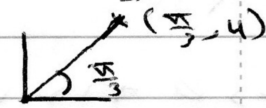
$\therefore \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

س / اكتب العددين الآتيين بالصيغة القطبية ثم مثلها بالرسم :

أ- $z = 2 + 2\sqrt{3}\, i$

$x = 2 \quad , y = 2\sqrt{3} \quad ; r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$



$\therefore z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب- $z = -5 + 5i$ (الربع الثاني $\pi - \theta$)

$x = -5 \quad , y = 5 \quad ; \theta = \tan^{-1}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{4}$

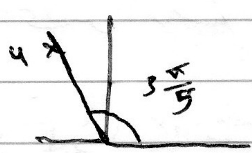
$r = \sqrt{x^2+y^2} = 5\sqrt{2}$

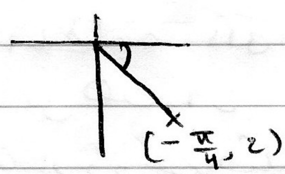
$\therefore z = 5\sqrt{2}\left(\cos 3\frac{\pi}{4} + i\sin 3\frac{\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2}\, e^{i3\frac{\pi}{4}}$

س٢ : مثل العددين الآتيين على الرسم :

أ- $4e^{\frac{3\pi}{5}i}$

ب- $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$





س٣ : حقق صحة المتطابقات الآتية بـ استعمال مبرهنة ديموافر :

أ) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

الحل :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta \quad --- ①$

$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$

$--- ②$

0 | 1
1 | 1 1
2 | 1 2 1
3 | 1 3 3 1

من ①, ② نحصل

$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3[1-\sin^2\theta]\sin\theta - \sin^3\theta$

$\therefore \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

now $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,[1-\cos^2\theta]$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

ب :

$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$?

$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta$ --- ①

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$= \cos 5\theta + i\sin 5\theta$ --- ②

$\therefore \cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$ $\therefore$

وبفتح $\sin^2\theta$ و $\sin^4\theta$ باستخدام $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

نحصل على

$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

س : اذا كانت القيمة المطلقة لكل من الأعداد المعقدة z,w,v تساوي واحد ، برهن ان مواقعها الهندسية على المستوي xy تكون رؤوس مثلث متساوي الاضلاع اذا وفقط اذا كان $z^2+v^2+w^2 = zv + zw + vw$

تمارين (1-5) : جد قيمة واحدة لزاوية العدد المعقد z عندما :

أ- $z = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$

$z = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{1+3}$

$= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ الربع الثاني

$r = \frac{1}{2}\sqrt{1+3} = 1$; $\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = 2\frac{\pi}{3}$

$\therefore z = \cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}$

ب) $Z = \frac{i}{-2(1+i)}$

ج / الـ

$Z = -\frac{1}{2}\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{4}(-1-i)$

$r = +\frac{1}{4}\sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\theta = \tan^{-1}(1) = \pi + \frac{\pi}{4} = 5\frac{\pi}{4}$

$\theta = 2k\pi + \theta$; لما $k = 0 \Rightarrow \theta = 5\frac{\pi}{4}$ قيمة واحدة لزاوية Z

جـ) الربع الرابع $Z = (\sqrt{3} - i)^2 = 3 - 2\sqrt{3}i - 1 = 2(1 - \sqrt{3}i)$

$r = 2\sqrt{1+3} = 4$; $\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = 5\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = 5\frac{\pi}{3}$

س / باستعمال الاحداثيات القطبية برهن :

أ) $i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = (\sqrt{3} + i)^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$

الحل

$(\sqrt{3} + i)^2 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2i\sqrt{3}$

ب) $(-1+i)^7 = -8(1+i)$ الربع الثاني

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\theta = \tan^{-1}(-1) \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{4}$

$\therefore Z = (-1+i)^7 = (\sqrt{2})^7\left(\cos 3\frac{\pi}{4} + i\sin 3\frac{\pi}{4}\right)^7$

$= (\sqrt{2})^7\left(\cos 21\frac{\pi}{4} + i\sin 21\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^7\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= -2^3(1+i) = -8(1+i)$

$2/ \quad (1+i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1+i\sqrt{3})$ الربع الاول

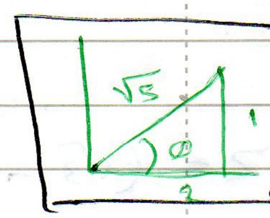
Sol: let $z = 1+i\sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{1+3} = 2$

$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore z^{-10} = 2^{-10}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-10} = 2^{-10}\left(\cos 10\frac{\pi}{3} - i\sin 10\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2^{-10}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{-11}(-1+\sqrt{3}i)$

$5/ \quad \frac{5i}{2+i} = 1+2i.$ (وضح)



$\frac{5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{5}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)} = \sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

$= \sqrt{5}\cdot\left[-\sin(-\theta) + i\cos(-\theta)\right]$

$= \sqrt{5}\left[\sin\theta + i\cos\theta\right]$

$= \sqrt{5}\left[\frac{1}{\sqrt{5}} + i\frac{2}{\sqrt{5}}\right] = \boxed{1+2i}$

ملاحظة $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$

س٢ / في كل مما يأتي جد كل الجذور وخطط مواقعها على الرسم

let $z = \sqrt{2i}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2i)^{\frac{1}{2}}$ _P

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)\right)$

$k = 0, 1$

$k=0 \Rightarrow z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i$

$k=1 \Rightarrow z=\sqrt{2}\left(\cos 5\frac{\pi}{4}+i\sin 5\frac{\pi}{4}\right)=-1-i$

$z=(-1)^{\frac{1}{3}}=(\cos\pi+i\sin\pi)^{\frac{1}{3}}$ ؟ $(-1)^{\frac{1}{3}}$ (ب

$=\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) \;;\; k=0,1,2$

$k=0 \Rightarrow z_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k=1 \Rightarrow z_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$k=2 \Rightarrow z_3=\cos 5\frac{\pi}{3}+i\sin 5\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

let $z=(-i)^{\frac{1}{3}}=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$ ؟ $(-i)^{\frac{1}{3}}$ (د

$=\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right)$

$k=0,1,2$

let $k=0,\; z_1=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

$k=1,\; z_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$

$k=2,\; z_3=\cos 7\frac{\pi}{6}+i\sin 7\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

let $z^6=8=8(\cos 0+i\sin 0)$ ؟ $(8)^{\frac{1}{6}}$ (ﻫ

$\Rightarrow z=8^{\frac{1}{6}}(\cos 0+i\sin 0)^{\frac{1}{6}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi k}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)$

$k=0,1,2,3,4,5$

$z_0=\sqrt{2}(\cos 0+i\sin 0)=\sqrt{2}$

$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}i)$

$z_2=\sqrt{2}\left(\cos 2\frac{\pi}{3}+i\sin 2\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\sqrt{3}i)$

$z_3=\sqrt{2}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\sqrt{2}$

$z_4=\sqrt{2}\left(\cos 4\frac{\pi}{3}+i\sin 4\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}i)$

$$z_5 = \sqrt{2}\left(\cos 5\frac{\pi}{3} + i\sin 5\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)$$

س٤/ جد قيم كل الجذور للمقادير :

أ- $\sqrt{i}$.

$$z = \sqrt{i} = \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) \quad k = 0, 1$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

$$z_1 = \cos 5\frac{\pi}{4} + i\sin 5\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

ب) $\sqrt{-i}$.

$$z = \sqrt{-i} = \left(\cos -\frac{\pi}{2} + i\sin -\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \cos\frac{2k\pi - \frac{\pi}{2}}{2} + i\sin\left(\frac{2k\pi - \frac{\pi}{2}}{2}\right), \quad k = 0, 1$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$$

$$z_1 = \cos 3\frac{\pi}{4} + i\sin 3\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - 1)$$

ج) $(1+i)^{\frac{1}{2}}$

$$z^2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore z = 2^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\pi}{8} + k\pi + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right)\right] \quad , \quad k = 0, 1$$

$k = 0$

$$\Rightarrow z_1 = 2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\pi}{8} i}$$

$$k = 1 \Rightarrow z_2 = 2^{\frac{1}{4}} e^{9\frac{\pi}{8} i}$$

د) $\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$ ؟

$Z=\sqrt{\frac{1}{2}}\,(-1+i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$ الربع الثاني

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos \frac{\pi}{3}+k\pi + i\sin\frac{\pi}{3}+k\pi\right.$

$k=0,1, \Rightarrow Z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos 4\frac{\pi}{3} + i\sin 4\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

هـ) $\sqrt[4]{-1}$.

$Z = (-1)^{\frac{1}{4}} = (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{4}}$

$= \left[\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right]$ $k=0,1,2,3$

$Z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$; $Z_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $Z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

و) $\sqrt[4]{i}$:

$Z = \sqrt[4]{i} = \left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right]^{\frac{1}{4}}$

$\therefore Z_k = \cos\left[\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right] + i\sin\left[\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right]$; $k=0,1,2,3$

$Z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\frac{\pi}{8}$; $Z_1 = e^{5\frac{\pi}{8}i}$; $Z_2 = e^{9\frac{\pi}{8}i}$

$Z_3 = e^{13\frac{\pi}{8}i}$

ز) $\sqrt[4]{-i}$.

$Z = \sqrt[4]{-i} = \left[\cos -\frac{\pi}{2} + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{4}}$

$= \cos\frac{2k\pi - \frac{\pi}{2}}{4} + i\sin\left(\frac{2k\pi - \frac{\pi}{2}}{4}\right)$ $k=0,1,2,3$

$\therefore Z_0 = e^{-i\frac{\pi}{8}}$; $Z_1 = e^{3\frac{\pi}{8}i}$, $Z_2 = e^{7\frac{\pi}{8}i}$, $Z_3 = e^{11\frac{\pi}{8}i}$

س5 / برهن $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{(n+2)/2} \cos n\frac{\pi}{4}$

Proof: L.H.S:-

$(1+i)^n + (1-i)^n = (\sqrt{2})^n(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^n$
$+ (\sqrt{2})^n(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))^n$

$= (\sqrt{2})^n(\cos n\frac{\pi}{4} + \cancel{i\sin n\frac{\pi}{4}} + \cos n\frac{\pi}{4} - \cancel{i\sin n\frac{\pi}{4}})$

$= 2^{\frac{n}{2}}(2\cos n\frac{\pi}{4}) = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos n\frac{\pi}{4} = 2^{\frac{n+2}{2}}\cos n\frac{\pi}{4}$
$= R.H.S.$

س / لكل الارتباطات المختلفة في العلاقات برهن :

أ) $\left(\frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$

Let

$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$
$\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = 2\frac{\pi}{3}$

$\therefore z_1 = \cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3} \Rightarrow z_1^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

$z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $r = \sqrt{x^2+y^2} = 1$, $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = 4\frac{\pi}{3}$

$\therefore z_2 = \cos 4\frac{\pi}{3} + i\sin 4\frac{\pi}{3} \Rightarrow z_2^3 = \cos 4\pi + i\sin 4\pi$
$= 1$

ب) $(\mp\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i)^6$:

$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow z_1^6 = 1$

$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 2\frac{\pi}{3} + i\sin 2\frac{\pi}{3} \Rightarrow z_2^6 = 1$

$z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 4\frac{\pi}{3} + i\sin 4\frac{\pi}{3} \Rightarrow z_3^6 = 1$

$z_4 = +\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow z_4^6 = 1$

الموضوع : التاريخ : / / ٢٠٠

س7 : اذا كان w,z عددين محققين وكان $|w|=1$ برهن

$$\left|\frac{w-z}{1-\bar{w}z}\right|=1$$

البرهان :

$$\left|\frac{w-z}{1-\bar{w}z}\right|^2=\frac{(w-z)\overline{(w-z)}}{(1-\bar{w}z)\overline{(1-\bar{w}z)}}=\frac{(w-z)(\bar{w}-\bar{z})}{(1-\bar{w}z)(1-w\bar{z})}$$

$$=\frac{w\bar{w}-w\bar{z}-z\bar{w}+z\bar{z}}{1-w\bar{z}-\bar{w}z+w\bar{w}z\bar{z}}=\frac{1-w\bar{z}-z\bar{w}+z\bar{z}}{1-w\bar{z}-\bar{w}z+z\bar{z}}$$

$$=1$$

س8 : اذا كانت $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ جد الجزء الحقيقي والخيالي للمقدار $\frac{1-z}{1+z}$ ؟

$$\frac{1-z}{1+z}=\frac{1-r(\cos\theta+i\sin\theta)}{1+r(\cos\theta+i\sin\theta)}*\frac{1+r\cos\theta-ir\sin\theta}{1+r\cos\theta-ir\sin\theta}$$

$$=\frac{(1-ri\sin\theta-r\cos\theta)(1-ri\sin\theta+r\cos\theta)}{(1+r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{(1-ri\sin\theta)^2-r^2\cos^2\theta}{1+2r\cos\theta+r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1-2ir\sin\theta-r^2\sin^2\theta-r^2\cos^2\theta}{1+2r\cos\theta+r^2}$$

$$=\frac{1-r^2}{1+r^2+2r\cos\theta}+i\left[\frac{-2r\sin\theta}{1+r^2+2r\cos\theta}\right]$$

$$\therefore\ R\left(\frac{1-z}{1+z}\right)=\frac{1-r^2}{1+r^2+2r\cos\theta}\ ;\ I\left(\frac{1-z}{1+z}\right)=\frac{-2r\sin\theta}{1+r^2+2r\cos\theta}$$

س٩ جد جميع جذور المعادلة

$$(z+i)^n + (z-i)^n = 0 \quad ; \quad z \neq i$$

الحل :-

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = -1 \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = (-1)^{\frac{1}{n}}$$

$$z+i = z(-1)^{\frac{1}{n}} - i(-1)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$$

$$z\left((-1)^{\frac{1}{n}} - 1\right) = i\left[1 + (-1)^{\frac{1}{n}}\right]$$

$$z = \frac{i\left[1+(-1)^{\frac{1}{n}}\right]}{(-1)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

س١٠ اذا كان w_n $(w_n \neq 1)$ هو احد الجذور النونية للواحد برهن ان :

$$1 + w_n + w_n^2 + \dots + w_n^{n-1} = 0$$

البرهان : باستخدام المتطابقة

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} \quad \forall z \neq 1$$

وبتطبيق ذلك على $(w_n \neq 1)$ عندما $n-1$ نحصل على انه

$$1 + w_n + w_n^2 + \dots + w_n^{n-1} = \frac{1 - w_n^n}{1 - w_n} = \frac{1-1}{1-w_n} = 0$$

لان w_n هو احد الجذور النونية للواحد $\Leftarrow w_n^n = 1$

ولاثبات صحة المتطابقة نستخدم نظرية الاستقراء الرياضي

① $n = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1-z}{1-z}$

2) $n = 1 \Rightarrow 1 + z = \frac{1-z^2}{1-z} = \frac{(1+z)\cancel{(1-z)}}{\cancel{(1-z)}}$

3) $n = 2 \Rightarrow 1 + z + z^2 = \frac{1-z^3}{(1-z)} = 1 + z + z^2$

let $n = p$ صحيحة ; $1+z+z^2+\dots+z^p = \dfrac{1-z^{p+1}}{1-z}$

- كيف ان نثبت انه عندما $n = p+1$ صحيحة

$$\underbrace{1+z+z^2+\dots+z^p}+z^{p+1} = \frac{1-z^{p+1}}{1-z}+z^{p+1}$$

$$= \frac{z^{p+1}-z^{p+2}+1-z^{p+1}}{(1-z)} = \frac{1-z^{p+2}}{(1-z)}$$

س / اذا كانت $1, w, w^2$ الجذور التكعيبية للواحد , برهن انه :-

a) $(1+w^2)^4 = w$?

الحل $1+w^2+w=0 \Rightarrow 1+w^2=-w$

$$\therefore (1+w^2)^4 = (-w)^4 = w^4 = w^3 \cdot w = w$$

b) $(1-w+w^2)(1+w-w^2) = (-2w)(-2w^2) = 4w^3 = 4$

c) $(1-w)(1-w^2)(1-w^4)(1-w^5) = 9$

L.H.S $(1-w)^2(1-w^2)^2 = (1-2w+w^2)(1-2w^2+w)$

$$= (-3w)(-3w^2) = 9$$

س / اذا كانت $z = \rho e^{i\phi}$ برهن ان $|e^{iz}| = e^{-\rho\sin\phi}$

$$e^{iz} = e^{i\rho e^{i\phi}} = e^{i\rho(\cos\phi+i\sin\phi)} = e^{\rho(-\sin\phi+i\cos\phi)}$$

$$= e^{-\rho\sin\phi}\, e^{\rho i\cos\phi}$$

$$\therefore |e^{iz}| = e^{-\rho\sin\phi}\sqrt{\cos^2\rho\cos\phi+\sin^2\rho\cos\phi} = e^{-\rho\sin\phi}$$

AL ETKAN

س١٢/ باستعمال مبرهنة ديموافر برهن :

$$1+2\cos\theta+2\cos 2\theta+2\cos 3\theta+\cdots+2\cos n\theta=\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{\sin\theta/2}$$

س١٤ اذا كان $z=e^{it}$ برهن ان $z^n+z^{-n}=2\cos nt$

$$(e^{it})^n+(e^{-it})^n=\cos nt+\cancel{i\sin nt}+\cos nt-\cancel{i\sin nt}$$
$$=2\cos nt$$

اسئلة خارجية على الفصل الاول :

س/ باستخدام الاستقراء الرياضي برهن الصيغة ذات الحدين :

$$(1+z)^n=1+\frac{n}{1!}z+\frac{n(n-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}z^k+\cdots+z^n \text{ , } n\in Z^+$$

الحل : عندما $n=0 \Leftarrow$ $(1+z)^0=1$ ✓

عندما $n=1 \Leftarrow$

$1+z=1+\frac{1}{1!}z=1+z$ ✓

عندما $n=2 \Leftarrow$

$(1+z)^2=1+2z+z^2$ — ①

$1+2z+\frac{2(2-1)}{2!}z^2=1+2z+z^2$ — ②

$\Rightarrow$ ① = ② ✓

نفرض انه صحيحة اي انه $n=p$

$$(1+z)^p=1+\frac{p}{1!}z+\frac{p(p-1)}{2!}z^2+\cdots+\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!}z^k+z^p$$

يجب ان نثبت انه عندما $n=p+1$ صحيح

$$(1+z)^{p+1} = (1+z)^p (1+z)$$

$$= \left(1 + \frac{p}{1!} z + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \cdots + \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!} z^k + \cdots + z^p\right) \cdot (1+z)$$

$$= 1 + \frac{p}{1!} z + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \cdots + \frac{p(p-1)(p-2)(\cdots(p-k+1)}{k!} z^k + \cdots + z^p$$

$$+ z + \frac{p}{1!} z^2 + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \cdots + \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-k+1)}{k!} z^{k+1} + \cdots + z^{p+1}$$

$$= 1 + \frac{(p+1)}{1!} z + p z^2 \left[\frac{p-1}{2} + 1\right] + \cdots + z^{p+1}$$

$$= 1 + \frac{(p+1)}{1!} z + \frac{p(p+1)}{2!} z^2 + \cdots + \frac{(p+1)(p)(p-1)\cdots+(p-k+2)}{k!} z^k + z^{p+1}$$

∴ صحيحة ، وبهذا تم البرهان .

س / $\overline{(z^4)} = (\bar{z})^4$ ؟

Proof: $\overline{(z^4)} = \overline{(z.z.z.z)}$
$= \bar{z}.\bar{z}.\bar{z}.\bar{z} = (\bar{z})^4$

س٢/ في كل حالة ارسم مجموعة النقاط المعينة بالشروط المعطاة :-

a) $|z-1+i| = 1$ $r=1$ $C(1,-1)$ دائرة

تمثل مجموعة النقاط التي تقع على محيط الدائرة .

b) $|z+i| \leq 3$ $r = 3$ $C(0,-1)$

مجموعة النقاط التي تقع داخل وعلى الدائرة .

س٦ / ليكن R عدداً موجباً وليكن z_0 عدداً عقدياً معلوماً أثبت ان معادلة الدائرة التي نصف قطرها R ومركزها z_0 تكتب بالصيغة :

$$|z|^2 - 2Re(\bar{z}_0 z) + |z_0|^2 = R^2$$

الحل :- الصيغة العامة لمعادلة الدائرة هي $|z - z_0| = R$

$$|z - z_0|^2 = R^2 \Rightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R$$

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = R^2$$

$$|z|^2 - \underbrace{(z\bar{z}_0 + \overline{(z\bar{z}_0)})}_{\text{علاقة}} + |z_0|^2 = R^2$$

$$|z|^2 - 2Re(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$$

س5 / اثبت ان $\arg\bar{z} = \arg z$ عندما $z \neq 0$, حدد الشروط الاضافية التي تحتاجها لـ z بحيث ان $Arg(\bar{z}) = Arg z$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad ; \quad \bar{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

$$\arg(\bar{z}) = -\theta = -\arg z$$

ويجب ان لا تكون z عدد حقيقي سالب لكي تكون $Arg\,\bar{z} = -Arg\,z$

س٦ / اذا كان $z_1 . z_2 \neq 0$ استخدام الصيغة القطبية لاثبات

$$\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi \Longleftrightarrow Re(z_1\bar{z}_2) = |z_1| . |z_2|$$

$$n \in Z \; ; \; \theta_1 = \arg(z_1) \; ; \; \theta_2 = \arg(z_2)$$

البرهان :- نفرض ان ~~θ_1~~ $\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$ الآن

$$z_1\bar{z}_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

$z_1\bar{z}_2 = r_1r_2(\cos 2n\pi + i\sin 2n\pi)$ من الفرض نحصل على انه

$\because \sin 2n\pi = 0 \quad \forall n\in Z$

$= r_1r_2 \cos 2n\pi$

$\therefore |z_1\bar{z}_2| = r_1r_2\cos 2n\pi = Re(z_1\bar{z}_2) = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

الآن : نفرض انه

$Re(z_1\bar{z}_2) = |z_1|\cdot|z_2|$

$r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2) = \sqrt{r_1^2\cos^2\theta_1 + r_1^2\sin\theta_1^2}\cdot\sqrt{r_2^2\cos^2\theta_2 + r_2^2\sin^2\theta_2}$

$\Rightarrow r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2) = r_1r_2 \Rightarrow \cos(\theta_1-\theta_2) = 1$

$\Rightarrow \theta_1-\theta_2 = 2n\pi$ وهو المطلوب

س7 / برهن على ان $\left|\frac{a+ib}{b+ia}\right| = 1$ لكل $a,b\in R$

$$\left|\frac{a+bi}{b+ai}\right| = \frac{|a+ib|}{|b+ia|} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b^2+a^2}} = 1$$