التاريخ / / الموضوع

(7) Chi-square dist. توزيع مربع كاي

if $X \sim$ Gamma dist. with $\alpha = \frac{r}{2}$ and $\beta = 2$
where r is positive integer

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\frac{r}{2} \cdot 2^{\frac{r}{2}}} e^{\frac{-x}{2}} \quad , x \geq 0$$

$$E(X) = r \quad , V(X) = 2r \quad , M_x(t) = (1-2t)^{\frac{-r}{2}}$$

Ex:- $\Gamma\frac{5}{2}$ أوجد قيمة كاما

sol:-

$$\Gamma\frac{5}{2} = \Gamma\frac{3}{2}+1 = \frac{3}{2}\Gamma\frac{3}{2} = \frac{3}{2}\Gamma\frac{1}{2}+1 \Rightarrow$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

Ex:- $\int_0^\infty u e^{-u} du$

$$\Gamma\alpha = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \Rightarrow \Gamma\alpha = (\alpha-1)!$$

$$= \int_0^\infty u^{2-1} e^{-u} du \Rightarrow \Gamma 2 = (2-1)! = 1! = 1$$

1

Ex:- $\int_0^1 x^2 (1-x)^3 \, dx$

$$\beta(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \, dx$$

$$= \int_0^1 x^{3-1} (1-x)^{4-1} \, dx$$

$$\beta(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma\alpha \, \Gamma\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} \Rightarrow = \frac{\Gamma 3 \, \Gamma 4}{\Gamma(3+4)} = \frac{2!\,3!}{6!}$$

$$= \frac{2 \cdot \cancel{3!}}{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}} = \frac{1}{60}$$

توضيح :-

$$\Gamma\alpha = (\alpha-1)! \Rightarrow \Gamma 3 = (3-1)! = 2!$$
$$\Gamma 4 = (4-1)! = 3!$$

ملاحظة :-

$$\Gamma(n-1) = (n-1-1)! = (n-2)!$$

$$\Gamma(n+1) = (n+1-1)! = n!$$

$$\Gamma 0 = 1! = 1$$

Discrete Distributions التوزيعات المتقطعة

① Bernaul Dist. توزيع برنولي

$X \sim B(p)$ or $X \sim Ber(p)$

$$f(x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & , x = 0,1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

$E(x) = p$, $V(x) = pq$, $M_x(t) = (q + pe^t)$

② توزيع ذي الحدين

$X \sim b(n, p)$

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & , x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

$E(x) = np$, $V(x) = npq$, $M_x(t) = (q + pe^t)^n$

$\sigma x = \sqrt{npq}$

③ poisson dist. توزيع بوسون

$X \sim po(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & , x = 0, 1, \dots, \infty \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

$E(x) = \lambda$, $V(x) = \lambda$, $M_x(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

④ Geometric Dist. التوزيع الهندسي

$X \sim Geo(p)$

$$F(x) = \begin{cases} pq^x & , 0 < p < 1 \quad , x = 0, 1, \ldots, \infty \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{q}{p} \quad , V(X) = \frac{q}{p^2} \quad , M_x(t) = \frac{p}{1 - qe^t}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2021/10 / 26 التاريخ
يوم الثلاثاء

الموضوع المحاضرة الثالثة
د. غانم

Def:- X and y defined stochastically Independent iff

$h(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ and the conditional distribution

$$h(x|y) = \frac{h(x,y)}{g(y)} \quad , \quad h(y|x) = \frac{h(x,y)}{f(x)}$$

Def:- let $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ be ar. vs. sample of size

دالة الكثافة الاحتمالية

(n) have p.d.f. then the elements of the sample are

مستقلة

Considered random variables and theyare independent

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Def:- statistic (المؤشر الاحصائي) وزاري

A function of one or more random variables which

مجهول

does not depend on any unknown parameters is called

الاحصائية

statistic.

الموضوع التاريخ / /

Ex:-

① $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ statistic

وسط حسابي

② $S^2 = \frac{\sum (X_i-\bar{X})^2}{n-1}$ statistic

تباين

③ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ not statistic

لأنها تعتمد على معلمات مجهولة μ, σ

④ $S = \sqrt{S^2} \Rightarrow$ statistic

pop المجتمع	simple العينة
μ الوسط الحسابي	$\bar{X}$
σ^2 تباين	S^2
σ	S
ρ ارتباط	r

مشتقات التكامل

Derivative of Integrals (Leibni Z Rule)

① $\frac{d}{dx}\int_a^{x} f(u)\,du = f(x)$ تكامل المشتقة يساوي الدالة

(x ← متغير)

② $\frac{d}{dx}\int_a^{\phi(x)} f(u)\,du = f(\phi(x)) \cdot \frac{d\phi(x)}{dx}$

($\phi(x)$ ← دالة)

نعوض القيمة العليا للتكامل مضروب في المشتقة

CASTLE Rasheed

الموضوع التاريخ / /

Ex:- $\int_{0}^{\frac{y-1}{3}} 2x\,dx$

$$\therefore g(y) = 2\left(\frac{y-1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}(y-1)$$

مشتقة داخل القوس

Theorem (1):- اذا كان IF X is arandom varible $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

ثابتة فإن $\boxed{\sigma^2 > 0}$, then the random varible $W = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

توزيع طبيعي قياسي

proof:- $R_X = \{X : -\infty < X < \infty\}$

Range (المدى)

when $X = \infty \Rightarrow W = \infty$

$X = -\infty \Rightarrow W = -\infty$

$\therefore R_{(y=w)} = \{W : -\infty < W < \infty\}$

حدا على

$$G(w) = p(W \leq w) = p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq w\right) = p(X \leq \sigma w + \mu)$$

دالة توزيع

$$= \int_{-\infty}^{\sigma w+\mu} f(x)\,dx$$

$$G(w) = \int_{-\infty}^{\sigma w+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}} \cdot dX$$

by (2) rule of leibniz

الموضوع اولاً نوضاقيمة X ← $\sigma W + \mu$ التاريخ / /

دالة الكثافة الاحتمالية $g(W) = \frac{1}{\cancel{\sigma}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\cancel{\sigma} W + \mu - \mu)^2}{\cancel{\sigma^2}}} \cdot \cancel{\sigma}$ ← مشتقة الأس بالنسبة المتغير W

$$g(W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}W^2} \sim (0,1)$$

دالة الكثافة الاحتمالية

Ex:- Let X be r.v. with p.d.f., $f(x) = 3x \quad (0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}})$

دالة الكثافة الاحتمالية و اسم التوزيع المعطى

let $y = 3x^2 + 10$, find $g(y)$, and give the name of dist. of Y.

ملاحظة $g(y) = $ p.d.f of y

دالة الكثافة الاحتمالية

Sol:- $R_x = \{0 < x < \sqrt{2/3}\}$

where $x = 0 \Rightarrow y = 10$

$x = \sqrt{2/3} \Rightarrow y = 3(2/3) + 10 \Rightarrow y = 12$

$R_y = \{10 < y < 12\}$

نأخذ الجذر الموجب فقط لأن فترة X موجبة ولو كانت الفترة سالبة لأخذنا الجذر السالب مداهي

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(3x^2 + 10 \leq y) = P\left(x \leq \mp\sqrt{\frac{y-10}{3}}\right)$$

$$G(y) = \int_0^{\sqrt{\frac{y-10}{3}}} 3x \, dx = \frac{3x^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{y-10}{3}}}$$

$$= \frac{\cancel{3}}{2}\left(\frac{y-10}{\cancel{3}}\right) = \frac{1}{2}(y-10)$$

$$g(y) = G'(y) = \underset{\uparrow}{\frac{1}{2}} \sim \underset{\downarrow}{U}(10, 12)$$

مشتقة منتظم

p.d.f of y uniform

$$= \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{12-10} = \frac{1}{2} , & 10 < X < 12 \\ 0 , & \text{otherwize} \end{cases}$$

طريقة ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية g(y)

① probability احتمال

② Transformal تحويل

③ momented دالة العزوم

2021/ 10 / 27 التاريخ　　　　　　الموضوع المحاضرة الرابعة

يوم الأربعاء　　　　　　د. أزهار

Theorem (2)

if X is arandom Variabl $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$
Then the random Variabl $V = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)}$.

proof:-

$R_x : \{X : -\infty < X < \infty\}$

$X \to -\infty \Rightarrow V \to \infty$

$X \to \infty \Rightarrow V \to \infty$

$R_V = \{V : 0 \leq V < \infty\}$

$G(v) = p(V \leq v)$

$= p\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \leq v\right)$

$\because V = W^2$

$= p(W^2 \leq v)$

$= p(-\sqrt{v} \leq W \leq \sqrt{v})$

توزيع طبيعي قياسي

$= \int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} f(w)\, dw \Rightarrow = 2\int_0^{\sqrt{v}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw$

من البرهنة السابقة نعرف W تتوزع توزيع طبيعي قياسي

$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{v})^2} \cdot \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}v} \Rightarrow (1)$

الموضوع التاريخ / /

$X \sim \chi^2_{(r)}$ توزيع مربع كاي

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma\frac{r}{2}\; 2^{\frac{r}{2}}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}}$$

if $(r=1)$

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma\frac{1}{2}\; 2^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\;\sqrt{2}} x^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-x}{2}}$$

$$\boxed{= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{-x}{2}}} \rightarrow (2)$$

From (1) , (2)

$V \sim \chi^2_{(1)}$

التاريخ / / الموضوع

توزيع المنتظم

Ex:- let r be r.v. from uniform dist. over the interval $[0,1]$, $g(y) = 1$, let $Z = -2\ln y$.
Find the dist. of Z and name it

proof:- $R_y = \{y : 0 \leq y \leq 1\}$

$\ln(0) = -\infty$
$\ln(1) = 0$

$y \to 0 \Rightarrow Z = -2\ln(0) \Rightarrow Z = \infty$

$y \to 1 \Rightarrow Z = -2\ln(1) \Rightarrow Z = 0$

$R_Z = \{Z : 0 < Z < \infty\}$

$G(Z) = p(Z \leq z)$

$= p(-2\ln y \leq z)$

ناخذ e للطرفين

$= p\left(\ln y \geq \frac{-1}{2} z\right) \Rightarrow = p\left(y \geq e^{\frac{-1}{2} z}\right)$

$= \int_{e^{\frac{-1}{2} z}}^{1} g(y)\, dy$

$= \int_{e^{\frac{-1}{2} z}}^{1} 1\, dy$

$= y \Big|_{e^{\frac{1}{2} z}}^{1}$

$\boxed{G(Z) = 1 - e^{-\frac{1}{2} z}}$

CASTLE Rasheed

الموضوع التاريخ / /

$$G'(Z) = g(Z) = 0 - \left(\frac{-1}{2}\right) e^{\frac{-1}{2}Z} = \frac{1}{2} e^{\frac{-1}{2}Z}$$

$$\therefore g(Z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{-1}{2}Z} & , Z \geq 0 \\ 0 & , \text{otherwize} \end{cases}$$

$$\therefore Z \sim \exp(\lambda) \quad , \lambda = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \lambda e^{-\lambda z}$$

The distribution of Z is Exponential distribution

التوزيع لـ Z هو توزيع الأسي

التاريخ / / الموضوع

Ex:- Find the p.d.f. of the following dist. which have the given moment generating function and $E(X)$, $V(X)$.

1) $M_x(t) = (1-2t)^{-10}$

Sol:-

$X \sim \chi^2_{(r)}$, $M_x(t) = (1-2t)^{-\frac{r}{2}}$

$\Rightarrow -\frac{r}{2} = -10 \Rightarrow r = 20$

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\frac{20}{2}\, 2^{\frac{20}{2}}} x^{\frac{20}{2}-1} \cdot e^{\frac{-x}{2}}$$

$E(x) = r = 20$, $V(X) = 2r = 40$

2) $M_x(t) = e^{3(e^t-1)} = e^{\lambda(e^t-1)} \Rightarrow \lambda = 3$

Sol:-

$X \sim po(\lambda)$, $\lambda = 3$

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^x e^{-3}}{x!}$$

$E(x) = \lambda = 3$

$V(x) = \lambda = 3$

3) $M_x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t\right)^5$

Sol:-

$X \sim b(n,p)$

$X \sim b(5, \frac{1}{2})$

$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \Rightarrow f(x) = \binom{5}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$, $x = 0,1,..,5$

$E(x) = np \Rightarrow E(x) = 5 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow E(x) = \frac{5}{2}$

$V(x) = npq \Rightarrow V(x) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow V(x) = \frac{5}{4}$

4) $M_x(t) = (1-6t)^{-10}$

Sol:-

$X \sim G(\alpha, \beta)$

$X \sim G(10, 6)$

$f(x) = \frac{1}{\Gamma\alpha \, \beta^\alpha} x^{\alpha-1} \cdot e^{\frac{-x}{\beta}}$, $x \geq 0$

$= \frac{1}{\Gamma 10 \; 6^{10}} x^{10-1} \cdot e^{\frac{-x}{6}}$, $x \geq 0$

$E(x) = \alpha B = (10)(6) = 60$

$V(x) = \alpha B^2 = (10)(6^2) = 360$

5) $M_x(t) = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}e^{t}}$

sol:-

$X \sim Geo(p)$, $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{2}{3}$

$P(x) = pq^{x}$

$P(x) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$

$E(x) = \dfrac{q}{p} \Rightarrow E(x) = \dfrac{2/3}{1/3} = 2$

$V(x) = \dfrac{q}{p^2} \Rightarrow V(x) = \dfrac{2/3}{(1/3)^2} = 6$

* ملاحظة :- اذا كان $(1-2t)^{-10}$ نستخدم مربع كاي لأن $\beta=2$

اما اذا كانت قيمة β لا يساوي 2 نستخدم طريقة كاما .

Transformation of Random Varibles

1) Transformation of Discrete r.vs.

(a) one Varible

Def:- let $f(x)$ be the p.d.f of r.v.s and $y = u(x)$ is a one-one transformation then p.d.f of y is given by

$g(y) = f(\phi(y))$ when $\phi(y) = x$ is the inverse of transformation

Ex:- let X be r.v with p.d.f $f(x) = \frac{1}{3}$, $x = 1, 2, 3$, let $y = 3x+2$, find $g(y)$?

Sol:- $R_x = \{x : 1, 2, 3\}$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \rightarrow y=5 \\ x=2 \rightarrow y=8 \\ x=3 \rightarrow y=11 \end{array}\right\} R_y = \{y : y = 5, 8, 11\}$$

$y = 3x+2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{y-2}{3} \leftarrow \phi(y)}$ معكوس

$f(x) = \frac{1}{3}$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , y = 5, 8, 11 \\ 0 & , \text{otherwize} \end{cases}$$

(n, p)

Ex(2):- let $X \sim b(3, \frac{1}{3})$ and $y = X^2$. find $g(y)$?

Sol:-

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \quad , \; x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$= \binom{3}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-x}$$

$$y = X^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{y} \leftarrow \phi(y)}$$ معكوس

$$R_y = \{ y : y = 0, 1, 4, \dots \}$$

$$g(y) = \binom{3}{\sqrt{y}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{y}} \left(1 - 1/3\right)^{3-\sqrt{y}} \quad , \; y = 0, 1, 4, \dots$$

وزاري M

Ex(3):- let $X \sim b(n, p)$, $y = n - X$ find $g(y)$?
what the name of dist^n of y?

Sol:-

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \quad , \; x = 0, 1, \dots, n$$

$X = 0 \rightarrow y = n$

$X = 1 \rightarrow y = n - 1$

$\vdots \qquad \vdots$

$X = n \rightarrow y = 0$

$$y = n - x \Rightarrow \boxed{x = n - y \leftarrow \phi(y)}$$ معكوس

$$g(y) = \binom{n}{n-y} p^{n-y} \cdot q^{n-(n-y)}$$

$$g(y) = \binom{n}{n-y} p^{n-y} \cdot q^{y}$$ توافيق

$$= \frac{n!}{(n-y)! \cdot (n-(n-y))!} p^{n-y} \cdot q^{y}$$

$$= \frac{n!}{y!\,(n-y)!} p^{n-y} \cdot q^{y}$$

$$= \binom{n}{y} q^{y} \cdot p^{n-y}$$

$$y \sim b(n, q)$$

Mp

EX(4):- let X be r.v with p.d.f $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$, $x = 1, 2, 3, \dots$,

$$y = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is even} \\ -1 & \text{if } x \text{ is odd} \end{cases}$$

Find $g(y)$?

sol:- $R_x = \{x : x = 1, 2, 3, \dots\}$ معطى

$R_y = \{y = -1, 1, -1, 1, \dots\}$

$g(y) = p(Y = y)$ مساواة لان قيم y تكون ثابتة

التاريخ / / الموضوع

$g(y) = p(y=1) = p(X=2 \text{ or } X=4 \text{ or } X=6 \text{ or} \ldots)$

~~or $p(y=-1) = p(X=1, \text{ or } X=3 \text{ or } X=5 \text{ or} \ldots)$~~

نحن نختار $= p(X=2) + p(X=4) + p(X=6) + \ldots$

$g(y) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^6 + \ldots$

$= \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \ldots$ Geometric series

r, a, $S = \frac{a}{1-r}$

الاساس مجموع

$r = \frac{1/81}{1/9} \Rightarrow r = \frac{1}{9}$

$g(y) = \frac{1/9}{1 - 1/9} = \frac{1/9}{8/9} = \boxed{\frac{1}{8}}$

مجموع الاحتمالات $p(y=1) + p(y=-1) = 1$

$\frac{1}{8} + p(y=-1) = 1 \Rightarrow p(y=-1) = \frac{7}{8}$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , \text{if } y=1 \\ \frac{7}{8} & , \text{if } y=-1 \\ 0 & , \text{otherwize} \end{cases}$$

To find $g(y)$?   طرق ايجاد $g(y)$

① probability

② Transformation
- متقطع
- مستمر

③ moment

H.W

Q/ if X r.v with $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x = 1, 2, 3$

find p.d.f of $y = x^3$?