الفصل الاول

الفضاء المتري : هو زوج مرتب من مجموعة غير خالية هي $\bar{X}$ مع دالة حقيقية d معرفة على $\bar{X} \times \bar{X}$ و لكل $x , y , z \in \bar{X}$ تحقق البديهيات الآتية

① عندما $x \neq y$ فان $d(x,y) > 0$
(تعني ان المسافة بين نقطتين لا يمكن ان تكون سالبة).

② $d(x,y) = 0 \iff x = y$
(تعني ان المسافة من نقطة الى نفسها تساوي صفر)

③ $d(x,y) = d(y,x)$ (تناظر)

④ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (متباينة مثلثية)

مثال : ليكن $X = R$ مجموعة الاعداد الحقيقية والدالة d معرفة بالصيغة $d(x,y) = |x-y|$
هل ان الفضاء (R,d) هو فضاء متري

الحل: نفرض ان $x, y, z \in R$ يجب ان نبرهن الشروط الاربعة

① عندما $x \neq y$ فان
لانها مطلقة $d(x,y) = |x-y| > 0$

② عندما $x = y$ فان
$d(x,y) = |x-y| = |x-x| = 0$
او $= |y-y| = 0$ (لان $x = y$)

$$d(x,y)=|x-y|=|-(y-x)|=|y-x|=d(y,x)$$ ③

④ $$d(x,y)=|x-y|=|x-z+z-y|$$
$$\le |z-y|+|x-z|$$
$$=d(x,z)+d(y,z)$$

مثال ②:- لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن d دالة معرفة على X بالشكل التالي :

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad x=y\\ 1 & \text{if} \quad x\neq y\end{cases}$$

هل ان (X,d) فضاء متري ؟

① عندما $x\neq y \Leftarrow d(x,y)=1>0$

② عندما $x=y \Leftarrow d(x,y)=0$

عندما $d(x,y)=0 \Leftarrow x=y$

③ $$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0 & y=x\\ 1 & y\neq x\end{cases}$$
$$=d(y,x)$$

④ لدينا 5 حالات

ⓐ $x=y=z \Rightarrow$

$$d(x,y)=0 \equiv d(x,z)+d(z,y)=0+0=0$$

(b) $x \neq y \neq z$

$d(x,y) = 1 < d(x,z) + d(z,y) = 1+1 = 2$

(c) $x \neq y = z$

$d(x,y) = 1 = d(x,z) + d(z,y) = 1+0 = 1$

(d) $x = y \neq z$

$d(x,y) = 0 < d(x,z) + d(z,y) = 1+1 = 2$

(e) $x = z \neq y$

$d(x,y) = 1 = d(x,z) + d(z,y) = 0+1 = 1$

$\therefore \; d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

مثال (3): لتكن $X = R^n$ الفضاء الإقليدي ذات البعد n
ولتكن d دالة معرفة بالشكل التالي :-

$$d : R^n \times R^n \longrightarrow R^+$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad , \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$
$$x_i, y_i \in R \quad \forall \quad 1 \le i \le n$$

اثبت ان (X, d) فضاء مترى ؟

الحل

(1) عندما $X \neq Y$ فهذا يعني ان $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (y_1, \dots, y_n)$
يوجد على الاقل $x_i \neq y_i$ لبعض $1 \le i \le n$

$$\therefore (x_i - y_i)^2 > 0 \Rightarrow \sum (x_i - y_i)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} > 0 \Rightarrow d(x,y) > 0$$

(2)
$$d(x,y) = 0 \iff \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = 0$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = 0$$

$$\iff (x_i - y_i)^2 = 0 \quad \forall \; 1 \le i \le n$$

$$\iff x_i - y_i = 0 \quad \forall \; 1 \le i \le n$$

$$\iff x_i = y_i \quad \forall \; 1 \le i \le n$$
$$\iff X = Y$$

3 :

$$d(x,y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$$

$$= \sqrt{\sum (-(y_i - x_i))^2}$$

$$= \sqrt{\sum (y_i - x_i)^2}$$

$$= d(y,x)$$

4

$$d(x,y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum (x_i - z_i + z_i - y_i)^2}$$

Let $a_i = x_i - z_i$ $\quad b_i = z_i - y_i$

$$= \sqrt{\sum (a_i + b_i)^2}$$

حسب متراجحة منكوفسكي

$$\leq \sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}$$

$$= \sqrt{\sum (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum (z_i - y_i)^2}$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

مثال ④: ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن d^* دالة معرفة بالشكل التالي :-

$$d^*: X \times X \longrightarrow R^+$$

$$(x,y) \longmapsto d^*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

اثبت ان (X, d^*) تمثل فضاء متري؟
او اثبت ان d^* تمثل دالة مترية على X ؟

البرهان: نفرض ان $d(x,y)$ فضاء متري :
اذا الشروط التالية متحققة :-

① عندما $x \neq y \Leftarrow d(x,y) > 0$

② عند $x = y \Longleftrightarrow d(x,y) = 0$

③ $d(x,y) = d(y,x)$

④ $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

الان نثبت ان d^* تحقق الشروط الاربعة :

①' عندما $x \neq y \Leftarrow$ $d^*(x,y) = \dfrac{d(x,y) > 0}{1+d(x,y) > 0}$

من الشرط ①

$\therefore d^*(x,y) > 0$

②'

$$d^*(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$$

$$\Longleftrightarrow d(x,y) = 0$$

من الشرط الثاني $\Longleftrightarrow x = y$

(3)'

$$d^*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

$$= \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}$$ من الشرط الثالث

$$= d^*(y,x)$$

(4)'

$$d^*(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \le \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$\le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

$$= d^*(x,z) + d^*(z,y)$$

الفصل الثاني : الفضاء التبولوجي

تعريف : لتكن $X \neq \emptyset$ ، ولتكن τ هي عائلة من مجموعات جزئية من X ، يقال ان τ تبولوجيا على X او ان (X,τ) فضاء تبولوجي اذا وفقط اذا تحقق الشروط (البديهيات) الثلاثة :

① $\emptyset, X \in \tau$

② $\bigcup_\lambda G_\lambda \in \tau \Leftarrow G_\lambda \in \tau, \forall \lambda \in \Lambda$

③ $\bigcap_{i=1}^{n} E_i \in \tau \Leftarrow E_i \in \tau \quad i = 1, 2, \ldots, n$

ملاحظة : تدعى عناصر ال τ بالمجموعات المفتوحة للفضاء التبولوجي .

مثال : لتكن $X = \{a, b, c\}$

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, X\}$

هل ان (X,τ) فضاء تبولوجي ؟

① $X, \emptyset \in \tau$

② $\emptyset \cup G_i = G_i \quad \forall i$

$\{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\} \in \tau$

$\{a\} \cup X = X \in \tau$

$\{a,b\} \cup X = \{a,b,c\} = X \in \tau$

3) $\emptyset \cap G_i = \emptyset \in \tau \quad \forall i$

$\{a\} \cap \{a,b\} = \{a\} \in \tau$

$\{a\} \cap \{a,b,c\} = \{a\} \in \tau$

$\{a,b\} \cap X = \{a,b\} \in \tau$

∴ (X,τ) فضاء تبولوجي

مثال: لتكن $X=\{a,b,c,d\}$ ، ولتكن

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, X\}$

هل أن τ تبولوجيا على X ؟

1) $\emptyset, X \in \tau$

2) $\emptyset \cup G_i = G_i \in \tau \quad \forall\, G_i \in \tau \quad i=1,2,\dots,5$

$\{a\} \cup \{b,c\} = \{a,b,c\} \in \tau$

$\{a\} \cup \{a,b,c\} = \{a,b,c\} \in \tau$

$\{a\} \cup X = X \in \tau$

$\{b,c\} \cup \{a,b,c\} = \{a,b,c\} \in \tau$

$\{b,c\} \cup X = X \in \tau$

$\{a,b,c\} \cup X = X \in \tau$

③ $\emptyset \cap G_i = \emptyset \in \tau \quad \forall\, G_i \in \tau\ ,\ i = 1, 2, \ldots, 5$

$\{a\} \cap \{b, c\} = \emptyset \in \tau$

$\{a\} \cap \{a, b, c\} = \{a\} \in \tau$

$\{a\} \cap X = \{a\} \in \tau$

$\{b, c\} \cap \{a, b, c\} = \{b, c\} \in \tau$

$\{b, c\} \cap X = \{b, c\} \in \tau$

$\{a, b, c\} \cap X = \{a, b, c\} \in \tau$

$\therefore$ (X, τ) فضاء تبولوجي.

مثال: ليكن $X = \{a, b, c, d\}$, ليكن

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, X\}$

هل ان (X, τ) فضاء تبولوجي

① $\emptyset, X \in \tau$

② $\emptyset \cup G_i = G_i \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, 6$

$G_i \cup X = X \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, 6 \quad \tau \Rightarrow G_i \subseteq X \ \because$

$\{a\} \cup \{a, c\} = \{a, c\} \in \tau$

$\{a\} \cup \{c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau$

$\{a\} \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\} \in \tau$

$\{a,c\} \cup \{c,d\} = \{a,c,d\} \in \tau$

$\{a,c\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\} \in \tau$

$\{c,d\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\} \in \tau$

(3) $\phi \cap G_i = \phi \quad \forall\, i = 1,2,\dots,6 \quad G_i \in \tau$

$G_i \cap X = G_i \quad \forall\, i = 1,2,\dots,6 \quad G_i \subseteq X \;\therefore$

$\{a\} \cap \{a,c\} = \{a\}$

$\{a\} \cap \{c,d\} = \phi$

$\{a\} \cap \{a,c,d\} = \{a\}$

$\{a,c\} \cap \{c,d\} = \{c\} \notin \tau$

$\therefore\ (X,\tau)$ τ ليس تبولوجيا على X

مثال (4): لتكن $X=\{a,b,c\}$ جد جميع التبولوجيا على X بحيث تشكل هذه التبولوجيا على X فضاءً تبولوجياً.

$\tau_1=\{\phi, X\}$. تبولوجيا تافهة

$\tau_2=\{\phi, \{a\}, X\}$

$\tau_3=\{\phi, \{b\}, X\}$

$\tau_4=\{\phi, \{c\}, X\}$

$\tau_5=\{\phi, \{a,b\}, X\}$

$\tau_6=\{\phi, \{a,c\}, X\}$

$\tau_7=\{\phi, \{b,c\}, X\}$

$\tau_8=\{\phi, \{a\}, \{a,b\}, X\}$

$\tau_9=\{\phi, \{a\}, \{a,c\}, X\}$

$\tau_{10}=\{\phi, \{b\}, \{a,b\}, X\}$

$\tau_{11}=\{\phi, \{b\}, \{b,c\}, X\}$

$\tau_{12}=\{\phi, \{c\}, \{a,c\}, X\}$

$\tau_{20}=\{\phi, \{c\}, \{a,b\}, X\}$

$\tau_{21}=\{\phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, X\}$

$\tau_{22}=\{\phi, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, X\}$

$\tau_{23}=\{\phi, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$

$\tau_{13} = \{\emptyset, \{c\}, \{b,c\}, X\}$

$\tau_{14} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$

$\tau_{15} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, X\}$

$\tau_{16} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, X\}$

$\tau_{20} = \{\emptyset, \{c\}, \{a,b\}, X\}$

$\tau_{17} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$ تبولوجيا العامة

$\tau_{18} = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, X\}$, $\tau_{19} = \{\emptyset, \{b\}, \{a,c\}, X\}$

ملاحظة: ان اتحاد تبولوجيتين على مجموعة لا يكونه بالضرورة تبولوجيا على المجموعة نفسها.

مثال: لتكن $X = \{a,b,c\}$ ولتكن

$\tau_1 = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

$\tau_2 = \{\emptyset, \{b\}, X\}$

هل ان $\tau_1 \cup \tau_2$ تبولوجيا على X

$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$

$\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$

$\therefore$ $\tau_1 \cup \tau_2$ ليس تبولوجيا على X

ولكن

$\tau_1 \cap \tau_2 = \{\emptyset, X\}$ $\tau_1 \cap \tau_2$ هو تبولوجيا على X

مبرهنة: ان تقاطع عائلة من التبولوجيات على مجموعة يكون تبولوجيا على المجموعة نفسها.

البرهان: لنفرض ان $\{\tau_i : i \in I\}$ عائلة من التبولوجيات على X
سوف نثبت ان $\bigcap \tau_i$ هو تبولوجيا على X.
اي يجب ان تحقق البديهيات الثلاثة:

① بما ان $\phi, X \in \tau_i$ لكل $i \in I$ $\Leftarrow$ τ_i تبولوجيا على X
لذلك

$$\phi, X \in \bigcap \tau_i$$

② نفرض ان لكل $i \in I$ $G_\lambda \in \tau_i$ لكل $\lambda \in \Lambda$
بما ان $\bigcup_\lambda G_\lambda \in \tau_i$ لان τ_i تبولوجيا لكل $i \in I$

$$\therefore \bigcup_\lambda G_\lambda \in \bigcap_i \tau_i$$

③ نفرض ان لكل $i \in I$ $G_\lambda \in \tau_i$ لكل λ
$1 \le \lambda \le n$ منتهية

$$\bigcap_\lambda G_\lambda \in \tau_i$$

لان τ_i تبولوجيا على X لكل $i \in I$

$$\therefore \bigcap_\lambda G_\lambda \in \bigcap_i \tau_i \quad (1 \le \lambda \le n)$$

$\therefore \bigcap_i \tau_i$ هو تبولوجيا على X

نقطة الغاية : ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً و $A \subseteq X$
يقال عن النقطة $x \in X$ انها نقطة غاية لـ A
اذا وفقط اذا تحقق الشرط التالي :
لكل مجموعة مفتوحة G تحتوي على النقطة x يكون

$$A \cap G - \{x\} \neq \phi$$

اي انه كل مجموعة مفتوحة G تحتوي على x يجب
ان تحتوي على نقطة في A تختلف عن x :

المجموعة المشتقة : ليكن $A \subseteq X$ نرمز لمجموعة كل نقاط
غاية المجموعة A بالرمز $d(A)$ وتسمى بالمجموعة
المشتقة اي ان

$$d(A) = \{x : x \text{ هي نقطة غاية للمجموعة } A\}$$

مثال : ليكن $X = \{a, b, c, d, e\}$

$$\tau = \{\phi, \{a\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$$

$$A = \{a, b, c\} \quad , \quad B = \{b, c, d\}$$

اوجد $d(A)$, $d(B)$

الحل : نختبر جميع نقاط المجموعة X واختبار النقطة a
يكون بالقانون

$$A \cap G - \{a\} \neq \phi$$

اي جميع المفتوحات (G) الحاوية على a هي

$\{a\}, \{a, b, d\}, X$

$$A \cap \{a\} - \{a\} = \{a\} - \{a\} = \emptyset$$

$$a \notin d(A)$$

لا نأخذ بقية الجوارات المفتوحة الأخرى لأنها لو أخذناه
أحدى الجوارات المفتوحة لا تحقق تتوقف.

أما جميع المفتوحة التي تحتوي على b هي
$\{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d, e\}, X$

$$A \cap G - \{b\} \neq \emptyset$$

$$A \cap \{b, d\} - \{b\} = \{b\} - \{b\} = \emptyset$$

$$\therefore b \notin d(A)$$

أما جميع المفتوحة التي تحتوي على c هي

$\{b, c, d, e\}, X$

$$A \cap G - \{c\} \neq \emptyset$$

$$\{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} - \{c\} = \{b, c\} - \{c\}$$
$$= \{b\} \neq \emptyset$$

$$\{a, b, c\} \cap X = \{c\} = \{a, b, c\} - \{c\} = \{a, b\} \neq \emptyset$$

$$\therefore c \in d(A)$$

المجموعات المفتوحة التي تحتوي على d هي

$\{b,d\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d,e\}, X$

$A \cap G - \{d\} \neq \phi$

$A \cap \{b,d\} - \{d\} = \{b\} - \{d\} = \{b\} \neq \phi$

$A \cap \{a,b,d\} - \{d\} = \{a,b\} - \{d\} = \{a,b\} \neq \phi$

$A \cap \{b,c,d,e\} - \{d\} = \{b,c\} - \{d\} = \{b,c\} \neq \phi$

$A \cap X - \{d\} = A - \{d\} = A \neq \phi$

$\therefore d \in d(A)$

المجموعات المفتوحة التي تحتوي على e هي

$\{b,c,d,e\}, X$

$A \cap G - \{e\} \neq \phi$

$A \cap \{b,c,d,e\} - \{e\} = \{b,c\} - \{e\} = \{b,c\} \neq \phi$

$A \cap X - \{e\} = A - \{e\} = A \neq \phi$

$\therefore e \in d(A)$

$\therefore d(A) = \{c,d,e\}$

الآن نجد $d(B)$

$B = \{b, c, d\}$

$J = \{\emptyset, \{a\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$

المجاميع المفتوحة التي تحتوي على a هي

$\{a\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d, e\} = X$

$B \cap \{a\} - \{a\} = \emptyset - \{a\} = \emptyset$

$a \notin d(B)$

المجاميع المفتوحة التي تحتوي على b هي

$\{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d, e\}, X$

$B \cap \{b, d\} - \{b\} = \{b, d\} - \{b\} = \{d\} \neq \emptyset$

$B \cap \{a, b, d\} - \{b\} = \{d\} \neq \emptyset$

$B \cap \{b, c, d, e\} - \{b\} = \{d, c\} \neq \emptyset$

$B \cap X - \{b\} = B - \{b\} = \{c, d\} \neq \emptyset$

$\therefore\ b \in d(B)$

المجموعات التي تحوي c هي

$\{b, c, d, e\}, X$

$B \cap \{b, c, d, e\} - \{c\} = B - \{c\} = \{b, d\} \neq \emptyset$

$B \cap X - \{c\} = B - \{c\} = \{b, d\} \neq \emptyset$

$\therefore c \in d(B)$

المجموعات التي تحوي d هي

$\{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d, e\}, X$

$B \cap \{b, d\} - \{d\} = \{b\} \neq \emptyset$

$B \cap \{a, b, d\} - \{d\} = \{b\} \neq \emptyset$

$B \cap \{b, c, d, e\} - \{d\} = \{b, c\} \neq \emptyset$

$B \cap X - \{d\} = \{b, c\} \neq \emptyset$

$d \in d(B)$

المجموعات التي تحوي e هي

$\{b, c, d, e\}, X$

$B \cap \{b, c, d, e\} - \{e\} = B \neq \emptyset$

$B \cap X - \{e\} = B \neq \emptyset$

$e \in d(B)$

$d(B) = \{b, c, d, e\}$

المجموعات المغلقة: ليكن (X,τ) فضاء توبولوجي. يقال للمجموعة $E\subseteq X$ بأنها مغلقة اذا احتوت على جميع نقاط غايتها اي ان:-

$$d(E)\subseteq E$$

مثال: ليكن $X=\{a,b,c,d\}$

$$\tau=\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},X\}$$

$$E=\{a,d\}$$

هل ان E مغلقة؟

الحل: نجد اولاً نقاط الغاية للمجموعة E من خلال الصيغة نفرض ان $x\in X$ لكل مجموعة مفتوحة G تحتوي x يجب ان نحصل على انه

$$E\cap G-\{x\}\neq\emptyset \Leftrightarrow x\in d(E)$$

الآن $a\in X$

والمجاميع المفتوحة التي تحتوي على a هي

$$\{a\},\{a,b,c\},X$$

$$E\cap\{a\}-\{a\}=\{a\}-\{a\}=\emptyset$$

$$\therefore a\notin d(E)$$

$$b\in X$$

المجاميع المفتوحة التي تحتوي على b هي

$$\{b,c\},\{a,b,c\},X$$

$$E\cap\{b,c\}-\{b\}=\{b\}-\{b\}=\emptyset$$

$$\therefore b\notin d(E)$$

$c \in X$

المجاميع المفتوحة التي تحتوي على c هي

$\{b,c\}, \{a,b,c\}, X$

$E \cap \{b,c\} - \{c\} = \emptyset - \{c\} = \emptyset$

$\therefore c \notin d(E)$

$d \in X$

المجاميع المفتوحة التي تحتوي على d هي

X

$E \cap X - \{d\} = \{a,d\} - \{d\} = \{a\} \neq \emptyset$

$\therefore d \in d(E)$

$\therefore d(E) = \{d\} \subseteq E = \{a,d\}$

$\therefore$ E مجموعة مغلقة

للتحقيق ① كما انه E مغلقة $\Leftarrow$ E^c ~~مفتوحة~~ مفتوحة
نأخذ E^c اذا كانت تنتمي τ فانها تكون مغلقة
اي E مغلقة.

او ② نأخذ τ^c اذا كانت $E \in \tau^c$ فان E مغلقة.

مبرهنة :

اذا كانت A, B, C مجموعات جزئية من فضاء تبولوجي (X, τ) فان :

① $d(\emptyset)=\emptyset$

② اذا كانت $A \subseteq B$ فان $d(A) \subseteq d(B)$

③ اذا كانت $x \in d(E)$ فان $x \in d(E \setminus \{x\})$

④ $d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$

البرهان : ① لكل $x \in X$ ولكل $G \in \tau$ تحتوي على x نحصل على انه :

$$\emptyset \cap G - \{x\} = \emptyset$$

$$\therefore d(\emptyset) = \emptyset$$

② نفرض ان $A \subseteq B$

نفرض انه $x \in d(A)$

ولكل مجموعة مفتوحة G تحتوي على x نحصل على انه

$$A \cap G - \{x\} \neq \emptyset \quad —— ①$$

$$\because A \subseteq B \Rightarrow A \cap G \subseteq B \cap G$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq A \cap G - \{x\} \subseteq B \cap G - \{x\}$$

من ① نحصل على انه

$$B \cap G - \{x\} \neq \emptyset$$

$$\therefore x \in d(B) \Rightarrow d(A) \subseteq d(B)$$

٣ نفرض انه $x \in d(E)$

الآن لكل مجموعة مفتوحة G تحتوي على x فعلى

على انه

$E \cap G - \{x\} \neq \emptyset$

$\therefore E \cap G \cap \{x\}^c \neq \emptyset$

$E \cap G \cap [\{x\}^c \cap \{x\}^c] \neq \emptyset$ لأن $A \cap A = A$

كانت $\cap$ ابدالية

$E \cap \{x\}^c \cap G \cap \{x\}^c \neq \emptyset$

$(E / \{x\}) \cap G - \{x\} \neq \emptyset$

$\therefore x \in d(E / \{x\})$

٤ $\because A \subseteq A \cup B$

$B \subseteq A \cup B$

من الفرع (ج) نفس البرهنة نحصل على انه:

$\therefore d(A) \subseteq d(A \cup B)$

$d(B) \subseteq d(A \cup B)$

$\therefore d(A) \cup d(B) \subseteq d(A \cup B)$ —— (1)

الآن نفرض انه $x \notin d(A) \cup d(B)$

$\Rightarrow x \notin d(A) \wedge x \notin d(B)$

حالة $x \notin d(A)$ معنى يوجد G_A تحتوي على x بحيث أنه

$$A \cap G_A - \{x\} = \emptyset \quad \text{(2)}$$

$x \notin d(B)$ معنى يوجد G_B تحتوي على x بحيث أنه

$$B \cap G_B - \{x\} = \emptyset \quad \text{(3)}$$

لتكن $G = G_A \cap G_B$ تكون G مجموعة مفتوحة تحتوي على x

ومن (2) نحصل على أنه

$$A \cap G - \{x\} = \emptyset \quad \text{(4)}$$

ومن (3) نحصل على

$$B \cap G - \{x\} = \emptyset \quad \text{(4)}$$

من (4) , (5) نحصل على

$$(A \cup B) \cap G - \{x\} = \emptyset$$

$$\therefore x \notin d(A \cup B)$$

الفضاء الباري :
يقال للفضاء التبولوجي (X,T) بأنه فضاء باري
اذا كان كل مجموعة الجزئية من X هي مجموعة مفتوحة
او مغلقة .

مثال : اذا كانت $X=\{a,b\}$
$T=\{\phi,\{a\},X\}$
هل ان (X,T) فضاء باري ؟
من الواضح ان المجاميع الجزئية من X هي $\{a\},\{b\}$

المجاميع المفتوحة هي : $\phi,\{a\},X$
المجاميع المغلقة هي : $X,\{b\},\phi$

$\therefore (X,T)$ فضاء باري

مثال : اذا كانت $X=\{a,b,c\}$
$T=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$
هل ان (X,T) فضاء باري ؟
المجاميع الجزئية من X هي $\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$

المجاميع المفتوحة هي : $\{a\},\{b\},\{a,b\},\phi,X$
المجاميع المغلقة هي : $\{b,c\},\{a,c\},\{c\},X,\phi$

$\therefore (X,T)$ هو فضاء باري

الانغلاق Closure :

ليكن (X,τ) فضاءاً تبولوجياً ، E مجموعة جزئية من X . $(E \subseteq X)$ يعرف انغلاق المجموعة E ويرمز $\bar{E}$ بأنه تقاطع كل المجاميع المغلقة التي تحتوي على E أي أن

$\bar{E} = \cap F_i$ ، F_i المجاميع المغلقة الحاوية على E

$E \subseteq F_i \ \forall i$ ، $E \subseteq \bar{E}$

$\bar{E}$ مغلقة لأنها تقاطع مجاميع مغلقة

لكن $\bar{E} \subseteq F_i$

مثال: ليكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ ،

$\tau = \{ \emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d, e\}, X \}$

فاذا كانت

$E_1 = \{a, b\}$

$E_2 = \{d, e\}$

$E_3 = \{b, c\}$

المطلوب ايجاد $\bar{E_1}$ ، $\bar{E_2}$ ، $\bar{E_3}$ ؟

المجاميع المغلقة هي τ^c

$= \{ X, \{b, c, d, e\}, \{a, d, e\}, \{d, e\}, \{a\}, \emptyset \}$

المجاميع المغلقة الحاوية على E_1 هي

X ،

$\therefore \bar{E_1} = X$

الجوامع المغلقة الحاوية على E_2 هي

X , $\{b,c,d,e\}$, $\{a,d,e\}$, $\{d,e\}$

$$\therefore \bar{E}_2 = X \cap \{b,c,d,e\} \cap \{a,d,e\} \cap \{d,e\}$$
$$= \{d,e\}$$

الجوامع المغلقة الحاوية على E_3 هي

X , $\{b,c,d,e\}$

$$\therefore \bar{E}_3 = X \cap \{b,c,d,e\} = \{b,c,d,e\}$$

مبرهنة: لتكن E مجموعة جزئية في فضاء تبولوجي عندئذٍ يكون

$$\bar{E} = E \cup d(E)$$

البرهان: سوف نثبت ان

$$E \cup d(E) \subseteq \bar{E}$$

بما ان $E \subseteq F_i \quad \forall i$

$$\therefore E \subseteq \cap F_i = \bar{E} \Rightarrow E \subseteq \bar{E} \text{ --- } 1'$$

من $1'$

$$d(E) \subseteq d(\bar{E}) \text{ --- } 2'$$

بما ان $\bar{E}$ مجموعة مغلقة (لانها تقاطع جوامع مغلقة)

$$\therefore d(\bar{E}) \subseteq \bar{E} \text{ --- } 3'$$

من $2'$, $3'$ نحصل على

$$d(E) \subseteq \bar{E} \text{ --- } 4'$$

بأخذ اتحاد $1'$, $4'$ نحصل على

$$E \cup d(E) \subseteq \bar{E} \text{ --- } 1$$

الاتجاه الثاني :

وهنا نثبت ان $\bar{E} \subseteq E \cup d(E)$

بما ان $E \subseteq E \cup d(E)$

بما ان $\bar{E} \subseteq F_i \quad \forall i$

$\boxed{E \subseteq F_i}$

: يكفي ان نبرهن ان $E \cup d(E)$ مغلقة .

او نبرهن ان $(E \cup d(E))^c$ مفتوحة ؟

نفرض ان $x \notin E \cup d(E)$

هذا يعني $x \notin E$ & $x \notin d(E)$

بما ان $x \notin d(E)$

توجد مجموعة مفتوحة G_x تحتوي على x وبحيث انه

$G_x \cap E - \{x\} = \phi$

بما ان $x \notin E$

$\therefore G_x \cap E = \phi$

هذا يعني ان $G_x \subset E^c$ —— ①''

اي ان G_x لا تتقاطع مع جميع نقاط E

$\therefore \quad G_x \subseteq d(E)^c$ —— ②''

من ①'' , ②'' نحصل على

$(E \cup d(E))^c = \cup \{G_x : x \notin E \cup d(E)\}$

$\therefore \ (E \cup d(E))^c$ مفتوحة

$\Leftarrow$

$\bar{E} \subseteq E \cup d(E)$ —— ②

من ① , ② نحصل على

$\bar{E} = E \cup d(E)$

بديهيات الانغلاق :

① $\overline{\emptyset}=\emptyset$, $\overline{X}=X$

② $\overline{E}$ هي اصغر مجموعة مغلقة تحتوي على E

③ $\overline{E}=E \iff E$ مغلقة

④ $\overline{\overline{E}}=\overline{E}$

⑤ $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ ؛ البرهان :

$$\overline{A\cup B}=(A\cup B)\cup d(A\cup B) = A\cup B\cup d(A)\cup d(B)$$
$$= A\cup d(A)\cup B\cup d(B)=\overline{A}\cup\overline{B}$$

ملاحظة: ان البديهية الخامسة لا تصح اذا ابدلنا الاتحاد بالتقاطع احيانا

$\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$

$\overline{A\cap B}\neq\overline{A}\cap\overline{B}$ مثال: اعطِ مثال تبين فيه ان

الحل:

نأخذ $X=\{a,b,c,d,e\}$,

$\tau=\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{a,b,c,d\},X\}$

$A=\{a,b,d\}$, $B=\{c,d\}$

$A\cap B=\{d\}$

المجاميع المغلقة هي:

$\{X,\{b,c,d,e\},\{a,d,e\},\{d,e\},\{e\},\emptyset\}$

المجموعات المغلقة التي تحتوي على A هي

$X,$

$\therefore \quad \bar{A} = X$

المجموعات المغلقة التي تحتوي على B هي

$X, \{b, c, d, e\}$

$\therefore \quad \bar{B} = \{b, c, d, e\}$

المجموعات المغلقة التي تحتوي على $A \cap B$ هي :

$X, \{b, c, d, e\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}$

$\overline{A \cap B} = \{d, e\}$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{b, c, d, e\}$

$\therefore \quad \bar{A} \cap \bar{B} \neq \overline{A \cap B}$

داخل المجموعة :

ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي ولتكن $E \subseteq X$ يعرف داخل المجموعة E ويرمز له بـ E° بانه اتحاد كل المجاميع المفتوحة المحتواة في E

$$E^{\circ} = \cup G_i$$

استنتاج $G_i \subseteq E$

وعليه $E^{\circ} = \cup G_i \subseteq E$

$\therefore E^{\circ} \subseteq E$

$\therefore E^{\circ} \cap E^{c} = \emptyset$

E° مجموعة مفتوحة .

مثال : ليكن $X = \{a, b, c, d, e\}$

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, X\}$

$A = \{a, b, e\}$

$B = \{a, c, d\}$

جد A° , B° !

المجاميع المفتوحة المحتواة في A هي

$\emptyset, \{a\}$

$\therefore A^{\circ} = \emptyset \cup \{a\} = \{a\}$

المجاميع المفتوحة المحتواة في B هي

$\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}$

$\therefore B^{\circ} = \emptyset \cup \{a\} \cup \{c, d\} \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\}$

$X^{\circ} = X$

$\emptyset^{\circ} = \emptyset$

برهنة : لكل مجموعة E في فضاء تبولوجي يكون لدينا

الداخلية

$$E^\circ = \overline{E^c}^{\,c}$$

البرهان : سوف نثبت ان $\overline{E^c}^{\,c} \subseteq E^\circ$ —— (1)

let $x \in \overline{E^c}^{\,c} \Rightarrow x \notin \overline{E^c}$

$\Rightarrow x \notin (E^c \cup d(E^c)) \Rightarrow x \notin E^c \ \& \ x \notin d(E^c)$

$\therefore x \notin d(E^c)$

توجد مجموعة مفتوحة G_x تحتوي x بحيث انه

$G_x \cap E^c - \{x\} = \emptyset$

لان $x \notin E^c$

$G_x \cap E^c = \emptyset$

هذا يعني انه

$x \in G_x \subseteq E$

وعليه $x \in \cup G_x = E^\circ$

$\therefore \overline{E^c}^{\,c} \subseteq E^\circ$

الاتجاه الثاني: سوف نثبت ان $E^{\circ} \subseteq E^{c^{c}}$ ②

let $x \in E^{\circ}$

عندئذٍ E° مجموعة منفصلة عن E^{c} اي ان

$E^{\circ} \cap E^{c} = \phi$

$E^{\circ} \cap E^{c} - \{x\} = \phi$

$\Rightarrow x \notin d(E^{c})$

بما ان $x \in E^{\circ} \Rightarrow x \notin E^{c}$

$\Rightarrow x \notin d(E^{c}) \cup E^{c}$

$\Rightarrow x \notin \overline{E^{c}} \Rightarrow x \in \overline{E^{c}}^{c}$

من ①، ② نحصل على ان

$E^{\circ} = \overline{E^{c}}^{c}$

مبرهنات الداخل:

① $X^{\circ} = X$, $\phi^{\circ} = \phi$

② E° هو اكبر مجموعة مفتوحة جزئية من E

③ $E^{\circ} \subset E$

④ $E^{\circ\circ} = E^{\circ}$

⑤ $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$ البرهان:

$(A \cap B)^{\circ} = \overline{(A \cap B)^{c}}^{c} = \overline{(A^{c} \cup B^{c})}^{c}$

$= (\overline{A^{c}} \cup \overline{B^{c}})^{c} = \overline{A^{c}}^{c} \cap \overline{B^{c}}^{c} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$

خارج المجموعة: ليكن (X,τ) فضاءاً تبولوجياً، ولتكن $E \subseteq X$. يعرف خارج المجموعة E ويرمز له
بـ E^e بالشكل الآتي:

$$E^e = E^{c^{\circ}}$$

بديهيات الخارج:

① $\emptyset^e = X$

② $E^e \subseteq E^c$

③ $E^c = E^{e^{e}}$

④ $(A \cup B)^e = A^e \cap B^e$

حدود المجموعة: ليكن (X,τ) فضاءاً تبولوجياً، ولتكن $E \subseteq X$ تعرف حدود المجموعة E ويرمز لها بـ $b(E)$
بالشكل الآتي

$$b(E) = (E^{\circ} \cup E^e)^c$$

ملاحظة: اذا كانت $\bar{E} = E$ $\Rightarrow$ فإن E مغلقة

$E^{\circ} = E$ $\Rightarrow$ فإن E مفتوحة

مثال: لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$

$\tau = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c, d\}, \{b\}, X\}$

$E = \{c, d, e\}$

جد $\bar{E}, E^\circ, E^e, b(E)$ ؟

المجاميع المفتوحة هي: $X, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, d\}, \{b\}, \emptyset$

المجاميع المغلقة هي: $\emptyset, \{e\}, \{d, e\}, \{a, c, e\}, \{a, c, d, e\}, X$

$\bar{E} = \bigcap F_i \; ; \; E \overset{\text{مغلقة}}{\subseteq F_i} \; \forall i$

$= \{a, c, d, e\} \cap X = \{a, c, d, e\}$

$E^\circ = \bigcup G_i \; , \; \overset{\text{مفتوحة}}{G_i} \subseteq E \; \forall i$

$E^\circ = \emptyset$

$E^e = (E^c)^\circ = \{a, b\}^\circ = \{b\} \cup \emptyset = \{b\}$

$b(E) = (E^\circ \cup E^e)^c = (\emptyset \cup \{b\})^c = \{b\}^c = \{a, c, d, e\}$

مبرهنة: A مغلقة ومفتوحة $\Longleftrightarrow \bar{E} = E^\circ$ ؟

$\Leftarrow$ الطرف الايمن: نفرض ان A مغلقة ومفتوحة حسب مبرهنات الداخل والانغلاق

A مغلقة $\Leftarrow E = \bar{E}$ ①، A مفتوحة $\Leftarrow E = E^\circ$ ② من ① و ②

$E^\circ = \bar{E}$

$\Rightarrow$ الطرف الايسر: نفرض ان $E^\circ = \bar{E}$. بما ان $\bar{E} = (E)^\circ \subseteq E$

: $\bar{E} \subseteq E$ ولكن $E \subseteq \bar{E} \Leftarrow E = \bar{E} \Leftarrow E$ مغلقة

وبما ان $E \subseteq \bar{E} = E^\circ \Leftarrow E \subseteq E^\circ$ ولكن $E^\circ \subseteq E \Leftarrow$

$E^\circ = E \Leftarrow E$ مفتوحة

مثال : لتكن $X=\{a,b,c,d,e\}$

$\tau=\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\},X\}$

$E=\{a,e\}$

جد :

① $d(E)$

② $\bar{E}$

③ E°

④ E^{e}

⑤ $b(E)$

⑥ هل ان E مغلقة ام مفتوحة ، لماذا ؟

المجاميع المفتوحة هي :

$\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,e\},\{a,b,c,d\},X$

المجاميع المغلقة هي :

$X,\{b,c,d,e\},\{c,d,e\},\{b,e\},\{c,d\},\{e\},\emptyset$

حل ① - $a\in X$: المجاميع المفتوحة التي تحتوي على a هي :

$\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\},X$

$E\cap\{a\}-\{a\}=\emptyset \Rightarrow a\notin d(E)$

$b\in X$: المجاميع المفتوحة التي تحتوي على b هي :

$\{a,b\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\},X$

$E\cap\{a,b\}-\{b\}=\{a\}-\{b\}=\{a\}\neq\emptyset$

$E\cap\{a,b,c,d\}-\{b\}=\{a\}-\{b\}=\{a\}\neq\emptyset$

$E\cap\{a,b,e\}-\{b\}=\{a,e\}-\{b\}=\{a,e\}\neq\emptyset$

$E\cap X-\{b\}=E-\{b\}=E\neq\emptyset$

$\therefore b\in d(E)$

$c\in X$: المجاميع المفتوحة التي تحوي على c هي :

$\{a,c,d\},\ \{a,b,c,d\},\ X$

$E\cap\{a,c,d\}-\{c\}=\{a\}-\{c\}=\{a\}\neq\emptyset$

$E\cap\{a,b,c,d\}-\{c\}=\{a\}-\{c\}=\{a\}\neq\emptyset$

$E\cap X-\{c\}=E-\{c\}=E\neq\emptyset$

$\therefore\ c\in d(E)$

$d\in X$: المجاميع المفتوحة التي تحوي على d هي :

$\{a,c,d\},\ \{a,b,c,d\},\ X$

$E\cap\{a,c,d\}-\{d\}=\{a\}\neq\emptyset$

$E\cap\{a,c,d,b\}-\{d\}=\{a\}\neq\emptyset$

$E\cap X-\{d\}=E\neq\emptyset$

$d\in d(E)$

$e\in X$: المجاميع المفتوحة التي تحوي على e هي :

$\{a,b,e\},\ X$

$E\cap\{a,b,e\}-\{e\}=\{a\}\neq\emptyset$

$E\cap X-\{e\}=\{a\}\neq\emptyset$ $\quad\therefore\ e\in d(E)$

$\therefore\ d(E)=\{b,c,d,e\}$

حل ②

$\overline{E}=\cap F_i \qquad E\subseteq F_i$ مغلق $\forall i$

$\overline{E}=X\neq E$ $\therefore$ غير مغلق

حل ③

$E^\circ=\cup G_i \qquad G_i\subseteq E$ مفتوح $\forall i$

$=\emptyset\cup\{a\}=\{a\}\neq E$ غير مفتوح

حل ④

$E^e=E^{c\circ}=\{b,c,d\}^\circ=\emptyset$

حل ⑤

$b(E)=(E^\circ\cup E^e)^c=(\{a\}\cup\emptyset)^c=\{b,c,d,e\}$

H.W

مثال: ليكن

$X = \{a, b, c, d, e\}$

$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}, X\}$

$A = \{c, e\}$

$B = \{a, b, c\}$

جد $\bar{A}, \bar{B}, \mathring{A}, A^e, B^\circ, B^e, b(A), b(B)$ ؟

$\bar{A}$

اذا جميع المفتوحة هي:

$\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}, X\}$

اذا جميع المغلقة هي:

$X, \{b,c,d,e\}, \{c,d,e\}, \{b,e\}, \{e\}, \{c,d\}, \emptyset$

$\bar{A} = \cap F_i \qquad A \subseteq F_i \ \forall i$ مغلق

$= X \cap \{b,c,d,e\} \cap \{c,d,e\} = \{c,d,e\}$

$\bar{B} = \cap F_i \qquad B \subseteq F_i \ \forall i$ مغلق

$\bar{B} = X$

$\mathring{A} = \cup G_i \qquad G_i \subseteq A \ \forall i$ مفتوح

$A^\circ = \emptyset$

$B^\circ = \emptyset \cup \{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\}$

$A^e = A^{c\circ} = \{a,b,d\}^\circ = \emptyset \cup \{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\}$

$B^e = B^{c\circ} = \{d,e\}^\circ = \emptyset$

$b(A) = (A^\circ \cup A^e)^c = (\emptyset \cup \{a,b\})^c = \{c,d,e\}$

$b(B) = (B^\circ \cup B^e)^c = (\{a,b\} \cup \emptyset)^c = \{c,d,e\}$

مثال: لتكن

$X = \{a, b, c, d, e\}$

$\tau = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, X\}$

$A = \{a, d\}$

جد $d(A)$ ①

$\bar{A}$ ②

$\mathring{A}$ ③

A^e ④

$b(A)$ ⑤

⑥ هل ان A مغلقة ام مفتوحة ، ولماذا ؟

$a \notin d(A)$

لانه $A \cap \{a\} - \{a\} = \phi$

$b \in d(A)$

لانه لكل $b \in G \Leftarrow A \cap G - \{b\} \neq \phi$

$c \in d(A)$

لانه لكل $c \in G \Leftarrow$

$A \cap G - \{c\} \neq \phi$

$d \in d(A)$

لانه لكل $d \in G \Leftarrow$

$A \cap G - \{d\} \neq \phi$

$e \in d(A)$

$A \cap X - \{e\} \neq \phi$

$d(A) = \{b, c, d, e\}$

$\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, X$

المجاميع المفتوحة

المجاميع المغلقة :-

$X, \{b,c,d,e\}, \{c,d,e\}, \{b,e\}, \{e\}, \emptyset$

$\bar{A} = \cap F_i \qquad A \subseteq F_i \quad \forall i$ مغلقة

$\bar{A} = X$

$A^\circ = \cup G_i \qquad G_i \subseteq A \quad \forall i$ مفتوحة

$A^\circ = \emptyset \cup \{a\} = \{a\}$

$A^e = A^{c^\circ} = \{b,c,e\}^\circ = \emptyset \cup \cancel{\{\ \}} \cup \cancel{\{b,e\}} \cancel{\{\ \}}$

$b(A) = (A^\circ \cup A^e)^c = (\{a\} \cup \cancel{\{b,e\}})^c = \{a,\cancel{b,e}\}^c$

$= \cancel{\{\ \}} = \{b,c,d,e\}$

$\because A^\circ \neq A \quad , \quad \because \bar{A} \neq A$

ليست مفتوحة $\therefore$ ليست مغلقة $\therefore$

تبولوجيا أنعم وتبولوجيا أخشن :-

ليكن τ_1, τ_2 تبولوجيتين معرفتين على مجموعة غير خالية X. اذا كانت كل مجموعة جزئية من X مفتوحة بالنسبة الى τ_1 هي ايضاً مجموعة مفتوحة بالنسبة الى τ_2 اي $(\tau_1 \subseteq \tau_2)$

عندئذٍ نقول ان τ_1 هي انعم من τ_2 (اصغر) $\tau_1 < \tau_2$

ونقول τ_2 هي اخشن من τ_1 (أكبر) $\tau_2 > \tau_1$

تعريف: يقال بان τ_1 , τ_2 على X غير قابلتين للمقارنة اذا لم يكن احدهما اوسع من الاخرى، اي

$$\tau_1 \nleq \tau_2 \ , \ \tau_2 \nleq \tau_1$$

مثال: لتكن

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$
$$\tau_1 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,e\}, X\}$$
$$\tau_2 = \{\phi, \{a\}, \{a,b\}, X\}$$
$$\tau_3 = \{\phi, \{a\}, X\}$$
$$\tau_4 = \{\phi, \{b\}, X\}$$

$\tau_3 \leq \tau_2 \leq \tau_1$ او $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3$

بينما $\tau_2 \nleq \tau_3$ و $\tau_3 \nleq \tau_2$

ملاحظة: في الفضاءات التبولوجية تكون نقاط غاية المجموعة بالنسبة للتبولوجيات الاوسع هي ايضا نقاط غاية للمجموعة نفسها للتبولوجيات الاخرى.

البرهان: ليكن (X, τ_1) ، (X, τ_2) فضائين تبولوجيين حيث ان $\tau_1 \leq \tau_2$ ولتكن $A \subseteq X$

نفرض ان x هي نقطة غاية للمجموعة A في الفضاء τ_2

$$G \cap A - \{x\} \neq \phi$$

لكل مجموعة مفتوحة G في τ_2 ، $x \in G$

ولكن $\tau_1 \leq \tau_2$ وعليه تكون

$$G \cap A - \{x\} \neq \phi$$

لكل مجموعة مفتوحة G في τ_1 ، $x \in G$

∴ X نقطة خارجية لـ A في τ_1

الفصل الثالث
"القواعد والتبولوجيا النسبية"

القاعدة التبولوجية: ليكن (X,τ) فضاءاً تبولوجياً يقال عن العائلة β من مجموعات جزئية تنتمي الى τ بانها قاعدة للتبولوجيا τ اذا وفقط اذا كان كل من عناصر τ يساوي لاتحاد من عناصر β.

مثال: ليكن $X=\{a,b\}$

$\tau=\{\phi,\{a\},\{b\},X\}$ ∈

$\beta=\{\{a\},\{b\}\}$

هل ان β قاعدة للتبولوجيا τ ؟

① $\{a\}\in\tau$

$\{b\}\in\tau$

∴ تمثل قاعدة

② $\{a\}\cup\{b\}\in\tau$

تعريف: ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي وليكن $X^*\subseteq X$ نسمي التبولوجيا النسبية τ^* (في العائلة) التي تتألف من تقاطعات عناصر τ مع X^* اي

$$\tau^*=\{G^*:G\cap X^*=G^*;G\in\tau\}$$

مثال: ليكن $X=\{a,b,c\}$, $\beta=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$

$\tau=\{\phi,\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\},\{b\},X\}$

فان β ليست قاعدة من X لانه

① $\{a,b\},\{b,c\}\in\tau$

② $\{b\}\neq\cup B_i\ ;\ B_i\subseteq\beta$