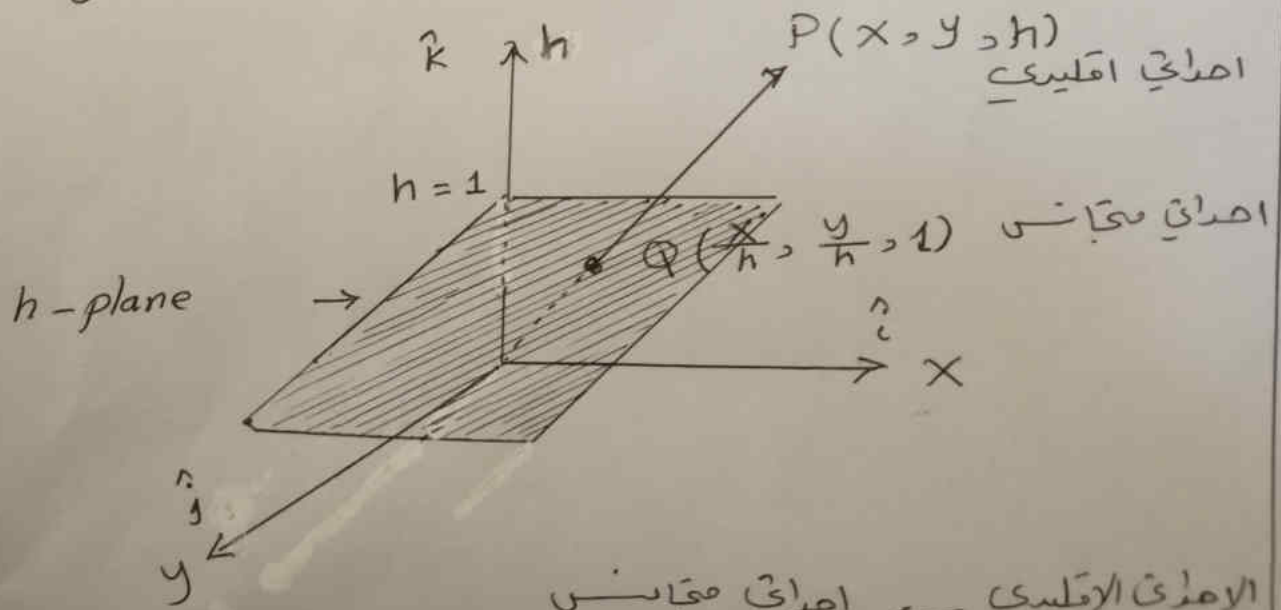
Two Dimensional Transformations التحويلات بعدين

١- الاحداثيات المتجانسة Homogeneous Coordinates

- في الهندسة الاقليدية (الديكارتية) لايمكن تقاطع خطين متوازيين في نفس المستوى.
- اما في مساحة المنظور (perspect) يمكن ان يتقاطع خطان متوازيان عندما يصبح خط البصر افقي فاضي، عندئذ يتقاطع خطين عند نقطه بعيدة (لانهائية) ومثال ذلك تصبح السكة الحديدية للقطار اضيق عند النظر في الافق البعيد ∞.
- الفضاء الاقليدي (الديكارتي) مناسب جداً لوصف الهندسة ثنائية الابعاد - ثلاثية الابعاد، لكن الفضاء الاقليدي غير مناسب للتعامل مع مشكله (التقاطع في اللانهاية) مساحة المنظور، لذلك الهندسة الاقليدية هي مجموعة فرعية من هندسة المنظور (حاله خاصة).
- فاذا كانت x و y احداثيات ديكارتية فعند اللانهاية تصبح x و y ، (∞ ، ∞) لايكون لها معنى في الفضاء الديكارتي (الاقليدي) حيث لاتتقاطع الخطوط المتوازية في الهندسة الاقليدية، على الرغم من تقاطعها في هندسة المنظور، وقد وجد العلماء حلاً لهذة المشكله في الفضاء الاقليدي، وهو استخدام الاحداثيات المتجانسه بابعاد N+1 لتمثل احداثيات الابعاد N في الاحداثيات الاقليدية ويمكن تمثيل احداثي البعد الثالث بـ h كما في الشكل



الاحداثي الاقليدي ← احداثي متجانس
(X, Y, h) ← (X/h, Y/h, 1)

- ملاحظة :

مجموعة الاحداثيات المتجانسة $(\frac{X}{h}, \frac{Y}{h}, 1)$ و $(\frac{X'}{h'}, \frac{Y'}{h'}, 1)$ تمثل نفس النقطة اذا وفقط اذا كانت الواحدة من هذه الاحداثيات المتجانسة هي مضاعفات الاخرى باحداثيات ثلاثية مختلفة X و Y و h.

فمثلاً الاحداثي $(7, 4, 2)$ و $(14, 8, 4)$ هي نفس النقاط ممثلة باحداثيات ثلاثية مختلفة، اي ان لكل نقطة في الاحداثي الاقليدي لا عدة تمثيلات متجانسة شرط ان تكون على الاقل واحدة من هذه الاحداثيات المتجانسة لا تكون بصيغة $(0, 0, 0)$، لانها تؤدي الى لانهاية فاذا كانت h لا تساوي صفر عندها يمكن القسمة على h لتصبح النقطة $(\frac{X}{h}, \frac{Y}{h}, 1)$ او ماكياتي $(X_h, Y_h, 1)$.

اذن يمكن تمثيل المصفوفة الاحادية $[X \ Y]$ بشكل الاحداثيات المتجانسة $[X, Y, 1]$.

- Two Dimensional Transformation:

1- Homogeneous Coordinate:

In mathematics homogeneous coordinates or (projection coordinates) are a system of coordinates used in projection geometry like Cartesian coordinates as used in Euclidean الهندسة الاقليدية geometry. They have an advantage that the coordinates of points including points at infinity can be projected using infinite coordinate.

في الهندسة الاقليدية يكون الشكل فيها مستوي.

2- The transformations:

2a. Translation: الصفحة 81

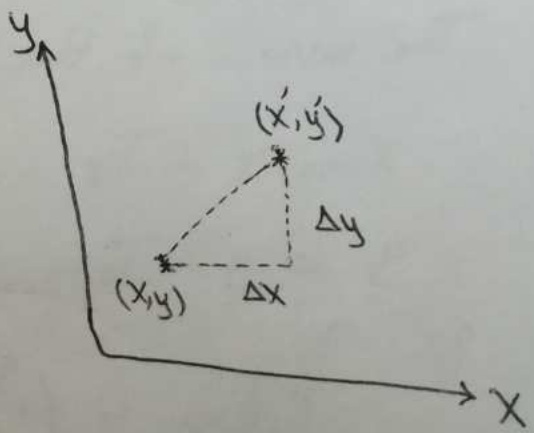
In Euclidean geometry, a translation is a function that move any point a const. distance, in specified direction.

A translation can be also interpreted as the addition of a const. vector to every point, or as shifting the origin of the coordinates system. A translation operator is an operator such that

$$T_s f(x_i) = f(x_i + \delta)$$

The translation from the point (x,y) to the point (x', y'), as shown in the fig., then

$$x' = x + \Delta x$$
$$y' = y + \Delta y$$



Let $T_x = \Delta x$, & $T_y = \Delta y$

then

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x + T_x \\ y' &= y + T_y \end{aligned}} \quad \text{---------- (1) Translation}$$

In the projection coordinates (homogeneous coordinates) in a matrix form.

$$(x \quad y \quad 1) \longrightarrow (x' \quad y' \quad 1)$$

$$(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{pmatrix}$$

Therefore the translation matrix $T_{(T_x, T_y)}$

$$T_{(T_x, T_y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1) \quad (T_{(T_x, T_y)})$$

The inverse of this transformations is

$$x = x' - T_x$$

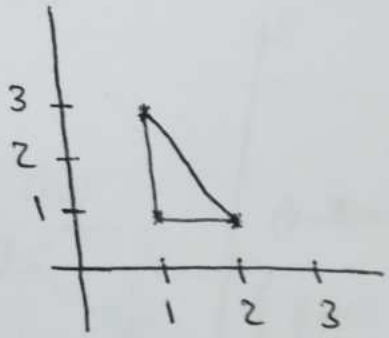
$$y = y' - T_y$$

&

$$T^{-1}_{(T_x, T_y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & 1 \end{pmatrix}$$ H.W.

Example: If the triangle A(1,1) B(2,1) C(1,3)
translate the triangle by a const. 2 for both x & y dimension.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$



Then the scaling (translation) matrix is

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

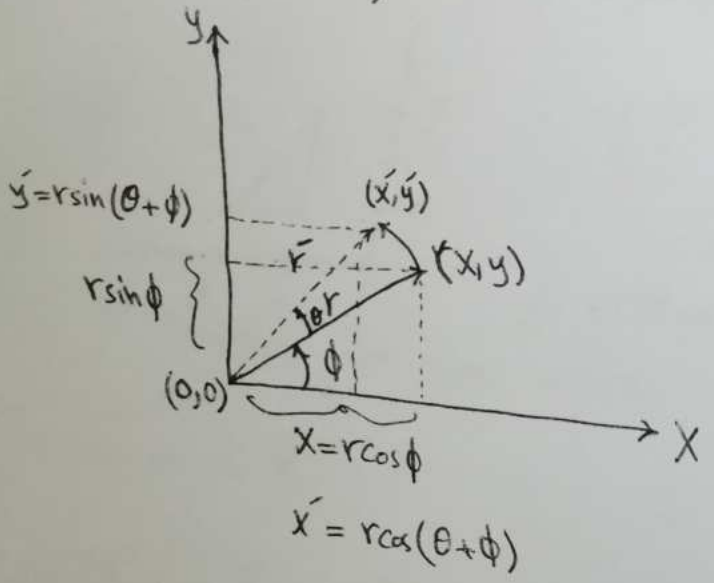
$$\therefore \underline{P' = PT}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotation:

1) Consider the rotation about Z-axis which passes through the origin (0, 0, 0).



from the fig.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned}\right\} \quad \text{------ (1)}$$

then the rotated coordinates $\acute{x}, \acute{y}$ are

$$\left.\begin{aligned} \acute{x} &= r\cos(\theta+\phi) \\ \acute{y} &= r\sin(\theta+\phi) \end{aligned}\right\} \quad \text{------ (2)}$$

Using the trigonometric

$$\left.\begin{aligned} \acute{x} &= r(\cos\theta\,\underline{\cos\phi} - \sin\theta\,\underline{\sin\phi}) \\ \acute{y} &= r(\sin\theta\,\underline{\cos\phi} + \cos\theta\,\underline{\sin\phi}) \end{aligned}\right\} \quad \text{---- (3)}$$

$$\therefore \begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \Bigg\} \quad \text{.....(4)}$$

The rotation about the origin.

In the matrix form equ. (4) can be written as

$$(x' \;\; y') = (x \;\; y) \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

or simply we can write

$$X' = XR$$

∴ The matrix of rotation about the origin is

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

The other matrix of rotation about the origin in the homogeneous coordinates is

$$R_{(\theta)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Then the transformation (rotation)

$$(x' \; y' \; 1) = (x \; y \; 1) \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Properties of $R(\theta)$: $= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

1. $R^{-1}(\theta) = R^T(\theta) = R(\theta)$

   $R^{-1}(\theta) = \frac{adj(R)}{|R|} = R^T$ H.W.

2. $R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_1) \cdot R(\theta_2)$ H.W.

3. $|R(\theta)| = 1$ H.W.

4. $R^n(\theta) = R(n\theta)$ H.W.

3. Scaling:

The eqns which describe the scaling are

$$x' = S_x \; x$$

$$y' = S_y \; y$$

Therefore

$$\therefore (x' \; y' \; 1) = (x \; y \; 1) \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ in homogenous coordinates

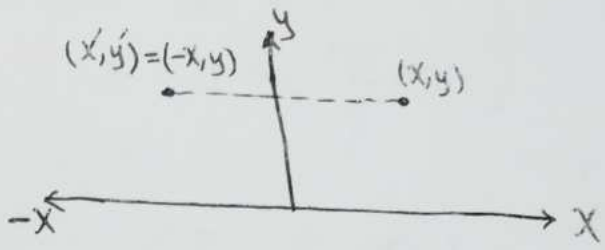
If $\left.\begin{matrix} S_x > 1 \\ S_y > 1 \end{matrix}\right\}$ applification & $\left.\begin{matrix} S_x < 1 \\ S_y < 1 \end{matrix}\right\}$ minimization

$$S = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Find the S^{-1} H.W.

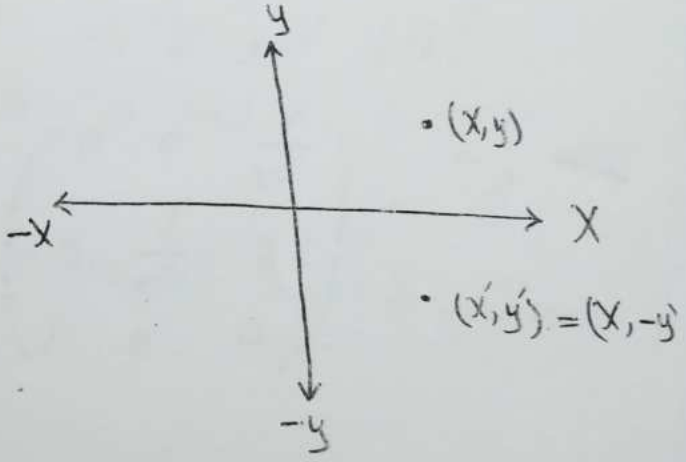
ans. $S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Reflection:



$x' \longrightarrow -x$
$y' \longrightarrow y$
} reflection about y-axis

$x' \longrightarrow x$
$y' \longrightarrow -y$
} reflection about x-axis



Therefore the reflection can be written in the matrix form in homogenous coordinates

a. Reflection about y-axis:

$$(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Reflection about x-axis:

$$(x' \; y' \; 1) = (x \; y \; 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C. Reflection about the origin:

$$(x' \; y' \; 1) = (x \; y \; 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

H.W: Write down the inverse matrices of the reflections in homogenous coordinates

i.e.

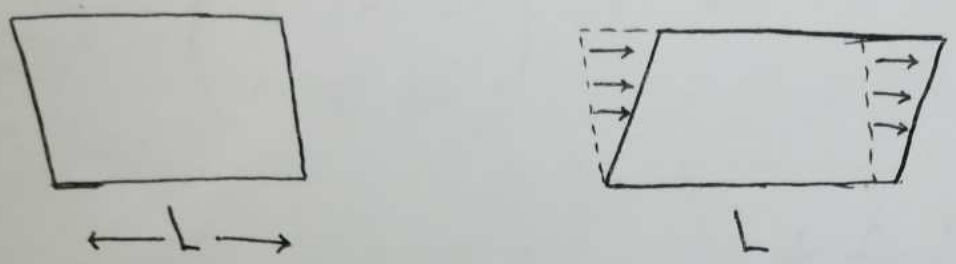
$$Ref(y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow Ref^{-1}(y)$$

$$Ref(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow Ref^{-1}(x)$$

$$Ref(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow Ref^{-1}(0)$$

التشويه القص

5. Shearing:



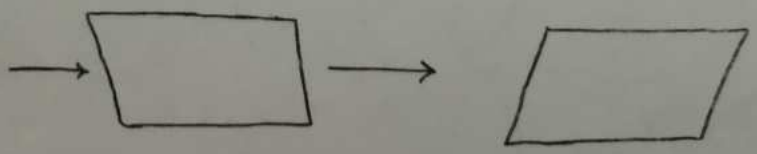
A transformation in which all points along a given line L remain fixed, while other points are shifted parallel to L, by a distance proportional to their perpendicular distance from L.

Shearing a plane fig. does not change it area.

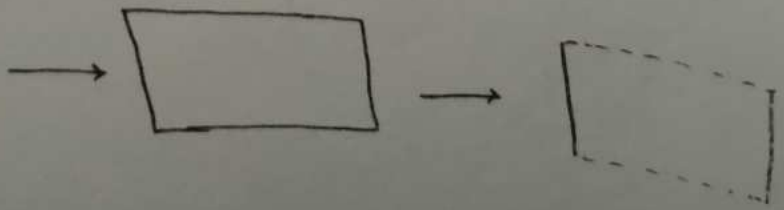
The shear can also be generalized to three dimensional in which plane are translated instead of lines.

Therefore the shearing transformations are

$$x' = x + ay$$



$$y' = y + bx$$



$$(x' \; y' \; 1) = (x \; y \; 1) \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$Sh_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sh_y = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

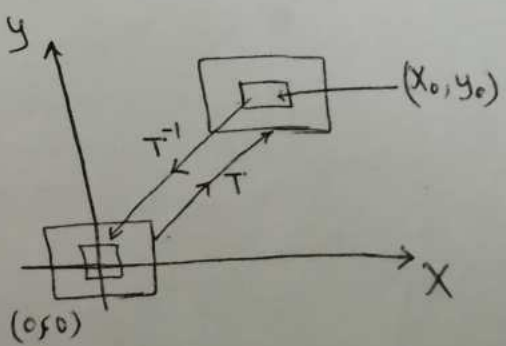
$$Sh_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note: All the previous transformations are at the origin $(0,0)$.

2. Transformation about general point (fixed point) (X_0, y_0):

① Scaling about general point

$$S' = T^{-1}_{(x_0, y_0)} \, S \, T_{(x_0, y_0)}$$



Example: Describe the homogeneous matrices for:

1. A Rotation through an angle θ (anti clock wise) about the origin and about the point x, y

Solution 1: Rotation about the origin

$$R_{(0,0)}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution 2: A rotation about the point (x,y);

A rotation through an angle θ about (x,y) is obtained by performing a translation $T^{-1}_{(T_x,T_y)}$ which maps (x,y) to the origin, followed by a rotation through an angle θ about the origin, and followed by a translation $T_{(T_x,T_y)}$ which maps the origin to the point (x,y)

$$R'_{(x,y)}(\theta) = T^{-1}_{(T_x,T_y)} \; R_{(0,0)}(\theta) \; T_{(T_x,T_y)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$ H.W.

2. Scaling about the point (x, y)

$$S' = T^{-1}_{(x,y)} \; S \; T_{(x\,y)}$$

3. Reflection about $y-$axis $(x \rightarrow -x)$

4. Reflection about $x-$axis (H.W)

5. Reflection about the origin (H.W).

2// Solution: Scaling about the point (x, y)

$$S_{(x,y)} = T^{-1}_{(x,y)} \; S \; T_{(x,y)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -T_x & -T_y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$ H.W.

3// $$(x' \; y' \; 1) = (x, y, 1) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$