

المصفوفات الأولية Elementary matrices

يُطلق على المصفوفة المربعة من الدرجة n ($A_{n \times n}$) إذا تم الحصول عليها بإجراء تحويل أولي واحد فقط على تلك المصفوفة، أي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الأولية

Unit matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

✓

مثلاً لو كانت المصفوفة الأولية $E_{n \times n}$ ناتجة عن تحويل أولي واحد فقط على المصفوفة $I_{n \times n}$

$$I_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} E_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عندئذٍ لمصفوفة

$$A_{n \times m} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\therefore EA = E_n A_{n \times m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

المصفوفة الأولية

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

وهي كافية

ايجاد معكوس المصفوفة بالعوامل الأولية

النظرية : اذا كانت A مصفوفة مربعة وان $|A| \neq 0$

عندئذ يمكن تحويل المصفوفة A الى

مصفوفة احادية $Unit\ matrix$ بعدد معين

من العوامل بواسطة المصفوفة الأولية E_n

حيث ان كل تحويل للمصفوفة A هو ضرب

المصفوفة A بـ E_n

$$\therefore A = I A$$

$$\text{c.e. } E_k \times E_{k-1} \dots E_3 \times E_2 \times E_1 \quad A = I$$

نضرب طرفي المعادلة من اليمين بـ A^{-1}

$$\therefore E_k E_{k-1} \dots E_3 E_2 E_1 \underbrace{A A^{-1}}_I = A^{-1}$$

$$\underbrace{E_k E_{k-1} \dots E_3 E_2 E_1}_K I = A^{-1}$$

نستنتج ان الحاصل على A^{-1} هو باجراء محو (K) من العوامل

كل المائلة

١- نكتب $[A | I]$

٢- اجراء العوامل الأولية للمصفوفة A

ونفس الاجراء يتم للمصفوفة I

٣- نحصل على A^{-1} اي

$$[A : I] \xrightarrow{\text{العوامل الأولية}} [I : A^{-1}]$$

Example: Find A^{-1} , by elementary transformations

for $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Solution : $A = IA$

or $A | I$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_3 = R_3 + R_1 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_3 = R_3 + R_1$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] R_2 \rightarrow \frac{1}{3} R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] R_1 = R_1 - \frac{1}{2} R_3$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \cdot 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] R_2 = R_2 - \frac{1}{3} R_3$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \hline \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] R_3 \rightarrow \frac{1}{2} R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow R_3 \rightarrow \frac{1}{2} R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_{I} \qquad \underbrace{\quad\quad\quad}_{A^{-1}}$

$\therefore$ The inverse of A

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Home work: Find the inverse of

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[B \mid I] \rightarrow [I \mid B^{-1}]$$

Answer: $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Find the inverse of $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Using Elementary transformations.

Solution $[B : I] \rightarrow [I : B^{-1}]$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \\ \hline 0 \quad 2 \\ 1 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \\ \hline 1 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 1 \end{array} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 = -R_1 + R_2 \\ \hline -1 \quad -3 \\ 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ \hline -1 \quad -1 \\ 0 \quad 1 \\ \hline -1 \quad 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 = -\frac{1}{2} R_2 \\ \hline 0 \times -\frac{1}{2} \quad -2 \times -\frac{1}{2} \\ \hline 0 \quad 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} -1 \times -\frac{1}{2} \quad 0 \times -\frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} \quad 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} R_1 = R_1 - 3R_2 \\ \hline 1 \quad 3 \\ 0 \quad -3 \\ \hline 1 \quad 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} R_1 = R_1 - 3R_2 \\ \hline 1 \quad 1 \\ -3 \quad 0 \\ \hline -\frac{1}{2} \quad 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Example: Find the inverse of

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1/ Elementary transformations. (المعاملات)

2/ By $AA^{-1} = I$

$$\text{Let } A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \cdot a + 2c & 0 \cdot b + 2d \\ a + c & b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2c & 2d \\ a + c & b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المعروفان معادلتان : فان

$$2c = 1 \rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}} ; 2d = 0 \rightarrow \boxed{d = 0}$$

$$a + c = 0 \rightarrow a = -c \rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$b + d = 1 \rightarrow b = 1 - d = 1 - 0 = 1 \quad \boxed{b = 1}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$3/ A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

$$\text{adj}(A) = [\text{Cofactor } A]^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Example: Solve the following set of equations by Gaussian Elimination

$$\begin{aligned} X + 2y + 3z &= 6 \\ 2X - 3y + 2z &= 14 \\ 3X + y - z &= -2 \end{aligned}$$

Solution: d

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2, R_3 \rightarrow R_3 - \frac{5}{7}R_2}$$

$d_2 = -2 \times 6 - 14 = -2$
 $d_3 = -2 - 18 = -20$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{50}{7} & -\frac{150}{7} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{50}{7} & -\frac{150}{7} \end{array} \right]$$

→ This matrix represent upper triangular matrix

So the set of equations after eliminations reduced to

$$\begin{aligned} X + 2y + 3z &= 6 \\ 0X - 7y - 4z &= 2 \\ 0X + 0y - \frac{50}{7}z &= -\frac{150}{7} \rightarrow Z = 3 \end{aligned}$$

$$-7y = 4z \rightarrow -7y = 12 + 2 \rightarrow y = -2$$

$$X + 2(-2) + 3(3) = 6 \rightarrow X = 1$$

i.e. $X = \begin{bmatrix} X \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Example: Find the inverse of

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} ; \text{ by } A = IA$$

or by Gauss-Jordan reduction method
(Elementary matrices method)

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = IA$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \equiv [A : I]$$

$$\begin{array}{c} R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1 \\ \hline \begin{array}{cc} 3 & 7 \\ -3 & -6 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \\ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -3(1) & -3(0) \\ \hline -3 & 0 \end{array} \end{array}$$

$$\text{Answer : } A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}A = AA^{-1} = I$$